

# Abelprijs 2007: S.R. Srinivasa Varadhan

Frank den Hollander  
Mathematisch Instituut  
Universiteit Leiden  
Postbus 9512  
2300 RA Leiden  
*denholla@math.leidenuniv.nl*

30 januari 2008

## **Samenvatting**

Op 22 maart 2007 maakte de Noorse Akademie van Wetenschappen en Letteren in Oslo bekend dat zij de Abelprijs voor 2007 had toegekend aan S.R. Srinivasa Varadhan van het Courant Institute of Mathematical Sciences in New York. Varadhan ontving deze onderscheiding “voor zijn fundamentele bijdragen aan de waarschijnlijkheidsrekening en in het bijzonder voor het creëren van een geunificeerde theorie van grote afwijkingen”. De jury noemde Varadhan’s werk van “grote conceptuele kracht en tijdloze schoonheid”.

\* Verschijnt in Nieuw Archief voor Wiskunde. Met dank aan A. van Enter en F. Redig voor commentaar op de tekst.

## Abelprijs 2007

De Abelprijs is in 2001 ingesteld door de Noorse regering, ter gelegenheid van de 200e geboortedag van Niels Henrik Abel (25 augustus 1802 – 6 april 1829). De Abelprijs heeft de statuur van de Nobelprijs. Eerdere laureaten zijn:

J.-P. Serre	(2003)
M.F. Atiyah & I.M. Singer	(2004)
P.D. Lax	(2005)
L. Carleson	(2006).

De officiële uitreikingsceremonie van de Abelprijs 2007 vond plaats op 22 mei 2007, in de aula van de Universiteit van Oslo, waar Varadhan de prijs ontving uit handen van koning Harald van Noorwegen. Op 23 mei gaf Varadhan zijn Abel Lecture, gevolgd door lezingen van G.C. Papanicolaou, T. Lyons en O. Zeitouni, die verschillende aspecten van zijn werk belichtten.

## De theorie van grote afwijkingen

De theorie van grote afwijkingen beschrijft de kans dat het *empirische* gemiddelde van een groot aantal stochastische variabelen (d.w.z. hun som gedeeld door hun aantal) significant afwijkt van hun *theoretische* gemiddelde (d.w.z. het gemiddelde van hun kansverdeling). Het is daarmee een theorie die inzicht geeft in afwijkingen van *de wet van de grote aantallen*, het werkpaard van de waarschijnlijkheidsrekening. In haar diepste kern is de theorie een vergaande veralgemenisering van het *principe van Laplace* voor de asymptotische analyse van integralen van functies die sterk variëren. Haar basis ligt in de statistische fysica en dateert van eind 19e en begin 20e eeuw (L. Boltzmann, J.W. Gibbs, A. Einstein). Latere ontwikkelingen, in de periode 1930–1960, kwamen uit de verzekeringswiskunde en uit de statistiek (F. Esscher, H. Cramér, I.N. Sanov) en, in de periode 1960–1970, andermaal uit de statistische fysica (O. Lanford, D. Ruelle). Varadhan dient echter te worden beschouwd als de architect-bouwmeester van de theorie.

Aanvankelijk concentreerde Varadhan zich op het gedrag voor korte tijd van oplossingen van elliptische differentiaalvergelijkingen (DV'en) voor warmtegeleiding [14], [15] en liet hij zien dat dit gedrag gedreven werd door een *atypisch* deel van de padenruimte, beschreven door zogenaamde kwadratische actiefunctionalen. Deze eerste stap bleek een centrale bouwsteen te zijn voor de latere ontwikkeling van de theorie van grote afwijkingen. In de jaren 1970–1985 heeft hij, samen met M.D. Donsker, die eerste stap uitgewerkt tot een coherente en zeer algemene methode om het atypische gedrag van stochastische processen te beschrijven, i.h.b. Markovprocessen [3].

Het centrale concept bestaat hierin, dat aan elke afwijking van het typische gedrag van het proces een zekere kostwaarde wordt toegekend (“kost-

waarde = minus de logaritme van de kans”), beschreven met behulp van een zogenaamde *entropiefunctie*. Dit concept, genaamd het *grote afwijkingen principe*, heeft een analogie met de theorie van zwakke convergentie van maten en is derhalve bij uitstek geschikt voor het bestuderen gemiddelden van functionalen van het proces. Immers, het proces zal onder gegeven randvoorwaarden steeds voor die afwijking kiezen die optimaal is in een “kosten-versus-baten” optimalisatie. Deze optimalisatie wordt beschreven door *Varadhan’s Lemma*, dat de theorie verbindt met de variationele analyse. Afhankelijk van de gekozen functionaal zien vertrouwde entropiefuncties het licht, zoals de Shannon entropie uit de informatietheorie en de Kolomogorov-Sinai entropie uit de ergodentheorie.

Het bleek essentieel om een *oneindig-dimensionaal* perspectief te kiezen. Dit leidde tot het beschouwen van het *empirische proces* geassocieerd met het pad (d.w.z. het pad gemiddeld over zijn verschuivingen in de tijd), waaruit lager-dimensionale observabelen, zoals het empirische gemiddelde van het pad, kunnen worden afgeleid via het zogenaamde *contractieprincipe*. Dit samenspel leidde uiteindelijk tot de oplossing van zeer diepe problemen, waaronder een vermoeden van M. Kac en M. Luttinger omtrent het asymptotische gedrag van de omgeving van een Brownse beweging [4] (de “Wiener Sausage”) en het discrete analogon daarvan voor een stochastische wandeling op een rooster [5]. Dit werk leidde op zijn beurt tot een beter inzicht in de spectrale eigenschappen van stochastische Schrödinger-operatoren. Donsker en Varadhan gaven voorts een asymptotische oplossing van het polaronmodel [6], een probleem uit de vastestoffysica waarbij aan het pad van een Brownse beweging een zelf-interactie wordt toegekend. Varadhan gaf ook nog een constructie van een twee-dimensionale maat voor polymeren [16], genoemd naar S. Edwards, dat als een vroeg voorbeeld uit de constructieve veldentheorie dient te worden aangemerkt.

De theorie van grote afwijkingen vindt niet alleen toepassing in deelgebieden van de wiskunde en de fysica, maar ook in tal van andere disciplines, waaronder informatica, computationele scheikunde, moleculaire biologie, medische statistiek, econometrie en logistiek. De grote bijdrage van Varadhan is dat hij losse ideeën wist samen te brengen en wist om te vormen en uit te breiden tot een coherente, krachtige en zeer algemene theorie. Aan de toepassingen heeft hij vervolgens ruimschoots bijgedragen, zoals hierboven al werd omschreven en zoals hieronder nog zal blijken uit de beschrijving van zijn overige bijdragen aan de waarschijnlijkheidsrekening. Voor een overzicht van de theorie van grote afwijkingen zij de lezer verwezen naar de boeken van Varadhan [17], Deuschel en Stroock [2], Dembo en Zeitouni [1] en den Hollander [8].

## Overige bijdragen

Hieronder volgt een korte beschrijving van drie andere gebieden waaraan Varadhan fundamentele bijdragen heeft geleverd. Elk van deze bijdragen is op zijn beurt sterk beïnvloed door zijn werk aan grote afwijkingen.

### Stochastische analyse

De theorie van *diffusieprocessen* vindt zijn oorsprong in het werk van P. Lévy in de jaren 1930 en K. Itô in de jaren 1940. In de jaren 1970 heeft Varadhan, samen met D.W. Stroock, deze theorie een nieuwe toegang gegeven door diffusies te karakteriseren via wat zij noemen *het martingaalprobleem* [12]. Hierbij worden diffusies beschreven als zwakke oplossingen van stochastische DV'en, die zo gekozen worden dat een grote klasse van functionalen van de diffusie de martingaaaleigenschap hebben, d.w.z. hun verwachtingswaarde in de toekomst gegeven hun verleden is precies hun waarde in het heden. Deze aanpak maakte een zeer sterke veralgemenisering mogelijk, waardoor kon worden bewezen dat een grote klasse van Markovketens in de zwakke zin convergeren naar diffusieprocessen, na geschikte schaling in ruimte en tijd (een vorm van de centrale limietstelling). Tevens konden *homogeniseringseigenschappen* voor diffusieprocessen met sterk in de ruimte en tijd variërende coëfficiënten worden afgeleid. Thans behoort de martingaalmethode tot het standaardarsenaal van de stochastische analyse. In het bijzonder is ze van belang voor de constructie van *maatwaardige diffusies*, oneindig-dimensionale Markovprocessen die een centrale rol spelen in de populatiedynamica, in de jaren 1980 en 1990 ontwikkeld door D. Dawson, E.B. Dynkin en S. Watanabe.

Het werk van Stroock en Varadhan leidde verder tot een precieze beschrijving van de *drager* van diffusieprocessen, d.w.z. de drager van de maat op de padenruimte. Deze drager wordt gekarakteriseerd als de afsluiting van een familie van oplossingen van deterministische DV'en, waardoor continuïteitseigenschappen van oplossingen van stochastische DV'en onder toevoeging van ruis kunnen worden bewezen. Dit was een eerste stap in de richting van de later ontwikkelde *Malliavin calculus*, door P. Malliavin in de jaren 1980.

### Wanordelijke diffusie

De Brownse beweging en de stochastische wandeling zijn ruimtelijk homogene processen, d.w.z. hun overgangskansen hangen niet af van hun plaats. Een *stochastische wandeling in een stochastische omgeving* is een variant waarbij de overgangskansen eerst zelf *stochastisch* worden gekozen, waarna de wandeling evolueert door gebruik te maken van deze overgangskansen, die als het ware zijn ingevroren. Dit model is in de jaren 1970 door F. Spitzer ingevoerd

en het wordt o.a. gebruikt bij de beschrijving van transport in wanordelijke materialen, zoals elektrische stroom in legeringen en het vloeien van olie in poreus gesteente. Doel is het bewijzen van *homogeniseringseigenschappen*, d.w.z. laten zien dat het ruimte-tijd schalingsgedrag van de wandeling niet afhangt van de realisatie van de stochastische omgeving, maar slechts van de kansverdeling ervan, en te identificeren wat dit schalingsgedrag precies is (i.h.b. diffusief, subdiffusief of superdiffusief). In dimensie 1 is het probleem in de jaren 1970 en 1980 opgelost door F. Spitzer, H. Kesten en Ya. G. Sinai. Maar in dimensies  $\geq 2$  is het een zeer taai probleem gebleken, met belangrijke bijdragen in de jaren 1990 door J. Bricmont, A. Kupiainen en G. Lawler en in de jaren 2000 door E. Bolthausen, A.-S. Sznitman en O. Zeitouni. Varadhan [18] bevat een analyse van de grote afwijkingen, die ook hier weer een centrale rol spelen. Voor een samenvatting zij de lezer verwezen naar de overzichtsartikelen van Zeitouni [20] en Sznitman [13].

De bestudering van een stochastische wandeling in een stochastische omgeving vraagt om een geheel nieuwe aanpak in vergelijking met de analyse van ruimtelijk homogene processen. Begin jaren 1980 introduceerde Varadhan, samen met G.C. Papanicolaou, het concept *omgeving gezien vanuit de wandeling*. Dit concept, dat door S. Kozlov onafhankelijk werd ingevoerd en dat een grote rol speelde bij Varadhan's werk aan hydrodynamische schaling (zoals hieronder beschreven), bracht het gebied een grote sprong verder. De reden is dat het omgevingsproces van de wandeling een oneindig-dimensionaal Markovproces is waaruit de ruimte-tijd schaling van de wandeling direct kan worden afgelezen. Essentieel daarbij is om voor dit omgevingsproces een (voor de evolutie) invariante kansmaat met geschikte eigenschappen te vinden. Dit werd bereikt in werk van Varadhan met C. Kipnis [10], waarin een zeer algemene centrale limietstelling voor additieve functionalen van reversibele Markovprocessen wordt afgeleid, gebruikmakend van het omgevingsproces en van spectraaltheorie. Dit werk legde de basis voor een groot aantal toepassingen.

Het continue analogon van het probleem is een diffusieproces met een ruimtelijke ruis, d.w.z. de diffusieoperator hangt op een stochastische wijze af van de plaats. Dit blijkt iets toegankelijker dan het discrete probleem.

## Hydrodynamische schaling

De heilige graal van de statistische fysica is het *macroscopisch* gedrag van veeldeeltjessystemen te verklaren uit de *microscopische* interactiewetten, zowel in als uit evenwicht. Vele wetten van de statistische fysica zijn een direct of indirect gevolg van de wet van de grote aantallen. Met behulp van de theorie van grote afwijkingen kan worden beschreven wat de kans is dat een systeem fluctuaties vertoont op een *mesoscopische* schaal, die interpolet tussen de microscopische en de macroscopische schaal. Dit blijkt een belangrijke sleutel bij de bestudering van het gedrag van grote systemen.

*Hydrodynamische vergelijkingen* zijn deterministische DV'en die de evolutie van *behouden* grootheden beschrijven, zoals massa, impuls en energie. Op een mesoscopische schaal zijn de evolutievergelijkingen van het systeem i.h.a. niet gesloten. Varadhan's belangrijkste bijdrage, gestart in werk eind jaren 1980 met M.Z. Guo en G.C. Papanicolaou [7], bestond er in om aan te tonen dat mesoscopische gemiddelden van een grote klasse van observabelen zeer goed kunnen worden benaderd door functies van behouden grootheden. Voor grote systemen treedt er daarmee een *scheiding* op tussen de snel variërende microscopische observabelen en de langzaam variërende mesoscopische variabelen. Over de eerste kan dan worden uitgemiddeld, waarna een effectieve DV resulteert voor de laatste. Belangrijke bijdragen werden geleverd door J. Fritz, J. Lebowitz en H. Spohn in de jaren 1980 en door C. Kipnis, C. Landim, S. Olla, F. Rezakhanlou en H.-T. Yau in de jaren 1990. Voor een overzicht van dit gebied zij de lezer verwezen naar de boeken van Spohn [11] en van Kipnis en Landim [9].

De hydrodynamische vergelijkingen zijn universeel van aard, d.w.z. ze zien er hetzelfde uit voor een grote klasse van systemen die microscopisch verschillend maar macroscopisch gelijksoortig zijn. De details van de microscopische interactie manifesteren zich via de *transportcoëfficiënten* in de hydrodynamische vergelijkingen. Deze dienen dan ook door de schalingstheorie te worden verklaard en te worden uitgerekend. Uiteindelijk dient de afleiding te geschieden op basis van Newtons's bewegingsvergelijkingen, maar tot nu toe bleek dat helaas te hoog gegrepen. Zodra echter een ruis wordt toegevoegd komt de waarschijnlijkheidsrekening in beeld en kan, voor een geschikte klasse van systemen, de hydrodynamische schaling worden afgeleid. De ruis zorgt er voor dat het ergodische gedrag van het systeem toegankelijker is.

Bij de scheiding van variabelen wordt gebruik gemaakt van het begrip *lokaal evenwicht*. Dit is een *Gibbsverdeling*, bekend uit de statistische fysica voor evenwicht, waarvan de parameters langzaam variëren over ruimte en tijd. De techniek vraagt om een zeer scherpe controle van fluctuaties, waarbij de theorie van grote afwijkingen een centrale rol speelt. Voor zogenaamde gradient-systemen bleek de theorie goed te ontwikkelen. Voor niet-gradient-systemen bleek de uitdaging enorm veel groter, en een belangrijke sleutel werd gevonden door H.T. Yau [19] door gebruik te maken van het begrip *relatieve entropie*.

De hydrodynamische schalingstheorie staat in nauwe wisselwerking met de theorie van deterministische DV'en. Enerzijds gebruikt zij existentie- en uniciteitsresultaten uit deze theorie, anderzijds voedt zij haar door deze resultaten af te leiden uit de schalingseigenschappen van veeldeeltjessystemen. Hier raakt Varadhan's werk aan dat van Abel laureaat P.D. Lax.

## Korte biografie

Varadhan werd in 1940 geboren in Madras (Chennai) in India en voltooide zijn studie aan Madras University in 1960. Hij promoveerde in 1963 aan het Indian Statistical Institute in Calcutta, bij de beroemde statisticus C.R. Rao. De vermaarde russische wiskundige A.N. Kolomogorov, grondlegger van de waarschijnlijkheidsrekening, was lid van de promotiecommissie en betitelde Varadhan's proefschrift als "het werk van een meester". Na zijn promotie ging Varadhan als postdoctorant werken aan het Courant Institute in New York. Daar is hij de rest van zijn loopbaan gebleven. In 1994 ontving hij de Birkhoff Prize, in 1996 de Leroy Steele Prize, in 2003 een eredoctoraat van de universiteit Pierre et Marie Curie in Parijs en in 2004 een eredoctoraat van het Indian Statistical Institute. Hij is lid van diverse internationale academies, waaronder de National Academy of Sciences van de Verenigde Staten.

Varadhan is getrouwd en heeft een zoon. Zijn oudste zoon kwam in 2001 om bij de aanslag op het World Trade Centre in New York, een gebeurtenis die een diepe schaduw over zijn gezin heeft geworpen.

Varadhan heeft talrijke promovendi en postdocs begeleid. Door de jaren heen heeft hij zich ook ingespannen voor de wiskunde in organisatorische zin. Zo was hij directeur van het Courant Institute gedurende de perioden 1980–1984 en 1992–1994, editor van de *Annals of Probability* – een van de meest toonaangevende tijdschriften in de waarschijnlijkheidsrekening – gedurende de periode 1997–1999, alsmede lid van diverse internationale adviescommissies. In 2005 was hij lid van het internationale review panel dat EURANDOM beoordeelde.

Varadhan is een zachtmoedige en innemende persoonlijkheid, met een milde blik op zijn medemens. Het is een genoegen om met hem te praten en te lachen. Hij is steeds behulpzaam en schijnt een licht uit over zijn collega's. Hij is dol op reizen, muziek en theater. Vrijwel elk jaar keert hij terug naar India en geeft hij lezingen voor jonge wiskundigen.

Varadhan heeft de waarschijnlijkheidsrekening in haar huidige vorm blijvend beïnvloed. Hij heeft vele nieuwe concepten ingevoerd, die de oplossing van diepe problemen mogelijk hebben gemaakt en die een beschrijving van een rijke variëteit aan verschijnselen in complexe stochastische systemen hebben ontsloten.

## Nalezen

Lezenswaardig is de Abel biografie: A. Stubhaug, *Niels Henrik Abel and His Times: Called Too Soon by Flames*, Springer, 2000. Hierin wordt niet alleen een beeld geschetst van het korte, intense en wiskundig zeer produktieve leven van Abel, maar ook een indruk gegeven van de tijdgeest waarin Abel

leefde, zowel in Noorwegen als in Duitsland, Engeland en Frankrijk.

Voor details over de Abelprijs, zie: <http://www.abelprisen.no/en/>

Voor details over het leven van Abel, zie: <http://nl.wikipedia.org/wiki/>

De laureaat voor 2008 wordt bekend gemaakt op 27 maart 2008!

## Referenties

- [1] A. Dembo and O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications* (2nd. ed.), Springer, New York, 1998.
- [2] J.-D. Deuschel and D.W. Stroock, *Large Deviations*, Academic Press, London, 1989.
- [3] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, *Comm. Pure Appl. Math.* 28 (1975) 1–47 (Part I); 28 (1975) 279–301 (Part II); 29 (1976) 389–461 (Part III); 36 (1983) 183–212 (Part IV).
- [4] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, Asymptotics for the Wiener Sausage, *Comm. Pure Appl. Math.* 28 (1975) 525–565.
- [5] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, On the number of distinct sites visited by a random walk, *Comm. Pure Appl. Math.* 32 (1979) 721–747.
- [6] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, Asymptotics for the polaron, *Comm. Pure Appl. Math.* 36 (1983) 505–528.
- [7] M.Z. Guo, G.C. Papanicolaou and S.R.S. Varadhan, Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions, *Commun. Math. Phys.* 118 (1988) 31–59.
- [8] F. den Hollander, *Large Deviations*, Fields Institute Monographs, Vol. 14, American Mathematical Society, Providence RI, 2000.
- [9] C. Kipnis and C. Landim, *Scaling Limits of Interacting Particle Systems*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 320, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [10] C. Kipnis and S.R.S. Varadhan, Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusion, *Commun. Math. Phys.* 106 (1986) 1–19.
- [11] H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.



- [12] D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan, *Multidimensional Diffusion Processes*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 233, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [13] A.-S. Sznitman, Random Motions in Random Media, in: *Mathematical Statistical Physics*, Proceedings of the ESF/RDSES Summer School at the Ecole Physique in Les Houches, France, July 2005 (eds. A. Bovier, J. Dalibard, F. Dunlop, A. van Enter and F. den Hollander), Elsevier, Amsterdam, 2006, Course 4, pp. 219–242.
- [14] S.R.S. Varadhan, Asymptotic probabilities and differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 19 (1966) 261–286.
- [15] S.R.S. Varadhan, On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients, *Comm. Pure Appl. Math.* 20 (1967) 431–455.
- [16] S.R.S. Varadhan, Appendix to K. Symanzik, Euclidean quantum field theory, in: *Local Quantum Theory* (ed. R. Jost), Academic Press, 1969.
- [17] S.R.S. Varadhan, *Large Deviations and Applications*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 46, SIAM, Philadelphia, 1984.
- [18] S.R.S. Varadhan, Large deviations for random walks in a random environment, *Comm. Pure Appl. Math.* 56 (2003) 1222–1245.
- [19] H.-T. Yau, Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models, *Lett. Math. Phys.* 22 (1991) 63–80.
- [20] O. Zeitouni, Random walks in random environment, in: *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1837, Proceedings of the Probability Summer School in Saint-Flour, France, July 2001 (ed. J. Picard), Springer-Verlag, 2004, pp. 189–312.