R.R. Mahabir

Getallen maken met Lüroth systemen

Bachelorscriptie, Versie 31-10-2014

Scriptiebegeleider: dr. C.C.C.J. Kalle

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Er zijn tal van manieren om getallen te schijven. Zo kun je getallen bijvoorbeeld schrijven aan de hand van het decimale stelsel, welke we in het dagelijks leven gebruiken. Of aan de hand van het binaire stelsel, welke veelal in de moderne digitale elektronica wordt gebruikt.

Een andere manier om getallen te schrijven is met behulp van Lüroth systemen, genoemd naar de Duitse wiskundige Jacob Lüroth (1844-1910). In zijn artikel [Lür83] uit 1883 introduceerde Jacob Lüroth een manier om getallen uit het interval $[0, 1)$ te schrijven, die in het algemeen ietswat ingewikkeldere getalsontwikkelingen geeft, maar daar tegenover wel hele prettige dynamische eigenschappen geeft.

Hoewel het al meer dan 100 jaar geleden is sinds de introductie van Lüroth systemen wordt er vandaag de dag nog steeds onderzoek verricht naar Lüroth systemen. De afgelopen jaren zijn er tal van artikelen verschenen waarin Lüroth systemen zijn bestudeerd. Er wordt onder andere onderzoek verricht naar de dynamische en metrische eigenschappen van Lüroth systemen. In [KKK91] worden een aantal metrische eigenschappen voor de alternerende Lüroth transformatie aangetoond. In [BBDK96] worden ergodische eigenschappen voor Lüroth systemen aangetoond. Een interessante eigenschap is dat van alle (I, ε) generalized Lüroth systemen, die voldoen aan de eigesnchappen beschreven in het artikel, de alternerende Lüroth transformatie de beste benadering heeft. In [SF11] wordt de Hausdorff dimensie van de Cantor verzameling $F_\varphi = \{x \in (0, 1] : d_n(x) \geq \varphi(n), \forall n \geq 1\}$ bepaald. In de verzameling F_φ zijn $d_n(x)$ de getallen in de Lüroth reeks en is $\varphi(n)$ een geheeltallige functie op $\mathbb{N}$. In [IS13] wordt er gekeken naar de herformulatie van Gauss' probleem (voor kettingbreuken) naar Lüroth transformaties. In [CWZ13] wordt aangetoond dat er geen punten zijn waarvoor de partiële sommen van de Lüroth ontwikkeling oneindig vaak een optimale benadering zijn. Dit is een greep uit artikelen die de laatste jaren zijn verschenen over Lüroth systemen. Sommige van deze artikelen zijn zeer recent. Dit toont aan dat er vandaag de dag nog steeds interesse is in Lüroth systemen en dat er nog interessante vraagstukken zijn waaraan gewerkt kan worden.

In het eerste deel van deze scriptie kijken we naar de alternerende Lüroth transformatie op het interval $[0, 1)$. In hoofdstuk 2 wordt de alternerende Lüroth transformatie geïntroduceerd en laten we zien hoe het gebruikt kan worden om getalsontwikkelingen te maken. Daarna worden er een aantal resultaten die Lüroth in zijn artikel [Lür83] voor de Lüroth transformatie heeft bewezen ook voor de alternerende Lüroth transformatie bewezen, waaronder maatbehoudendheid met betrekking tot de Lebesgue-maat. Als laatst bewijzen we dat de alternerende Lüroth transformatie ergodisch in met betrekking tot de Lebesgue-maat.

In het tweede deel wordt er een uitbreiding van de alternerende Lüroth transformatie geïntroduceerd. In hoofdstuk 3 geven we een wiskundige beschrijven van de uitbreiding van de alternerende Lüroth transformatie. Daarnaast tonen we voor de uitbreiding van de alternerende Lüroth transformatie een aantal eigenschappen aan, om uiteindelijk te bewijzen dat er een invariante maat bestaat voor de uitgebreide alternerende Lüroth transformatie.

2 De alternerende Lüroth transformatie

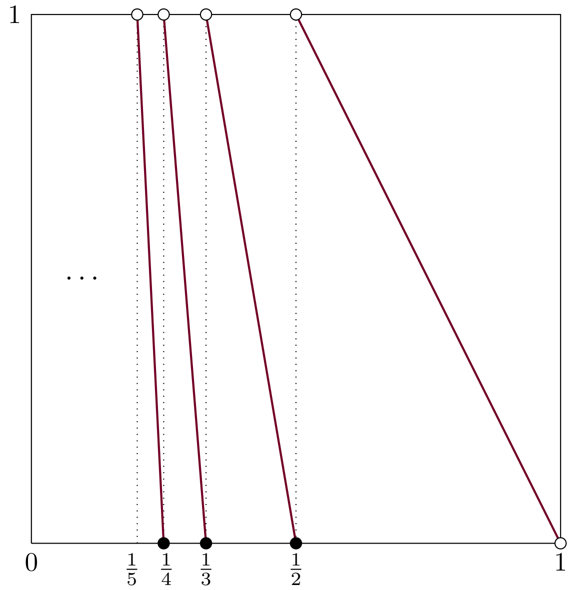
In dit hoofdstuk bekijken we de alternerende Lüroth transformatie. We zullen bekijken hoe deze transformatie eruit ziet en hoe het kan worden gebruikt om getalsontwikkelingen te maken.

2.1 De alternerende Lüroth transformatie

De alternerende Lüroth transformatie is een afbeelding $L : [0, 1) \to [0, 1)$ gegeven door

$$L(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & x \in (\frac{1}{2}, 1), \\ k - k(k-1)x, & x \in \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right], k \geq 3, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

De afbeelding die hierbij hoort ziet er als volgt uit:



Figuur 1: De alternerende Lüroth transformatie.

We merken op dat voor alle $x \in [0, 1)$ geldt dat $L(x) \in [0, 1)$.

2.2 Getalsontwikkelingen

Voor iedere $x \in [0, 1)$ is het mogelijk een unieke getalsontwikkeling te maken met behulp van de alternerende Lüroth transformatie. Voor $x = 0$ nemen we als getalsontwikkeling gewoon $x = 0$. Voor $x \in (0, 1)$ en $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ zodanig dat $L^{n-1}(x) \neq 0$, waarbij $L^0(x) = x$, definiëren we de getallen $a_n = a_n(x)$ als volgt

$$a_n(x) = a_1(L^{n-1}(x)),$$

waarbij $a_1(x) = k$ als $x \in \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right]$ voor $k \geq 3$ en $a_1(x) = 2$ als $x \in (\frac{1}{2}, 1)$. Nu kunnen we $L(x)$ als volgt schrijven

$$L(x) = \begin{cases} a_1 - a_1(a_1 - 1)x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dus voor alle $x \in (0, 1)$ zodanig dat $L^{n-1}(x) \neq 0$ hebben we

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{L(x)}{a_1(a_1 - 1)} \\
&= \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_1(a_1 - 1)}\left(\frac{1}{a_2 - 1} - \frac{L^2(x)}{a_2(a_2 - 1)}\right) \\
&= \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_1(a_1 - 1)(a_2 - 1)} + \frac{L^2(x)}{a_1(a_1 - 1)a_2(a_2 - 1)} \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_1(a_1 - 1)(a_2 - 1)} + \frac{1}{a_1(a_1 - 1)a_2(a_2 - 1)(a_3 - 1)} - \ldots \\
&\quad + \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1 - 1)a_2(a_2 - 1)\ldots a_{n-1}(a_{n-1} - 1)(a_n - 1)} \\
&\quad + \frac{(-1)^n L^n(x)}{a_1(a_1 - 1)a_2(a_2 - 1)\ldots a_n(a_n - 1)}.
\end{aligned}$$

We merken op dat als $L^{n-1}(x) = 0$ voor een zekere $n \geq 1$ en we aannemen dat n het kleinste gehele getal is met deze eigenschappen dan geldt er

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_1(a_1 - 1)(a_2 - 1)} + \frac{1}{a_1(a_1 - 1)a_2(a_2 - 1)(a_3 - 1)} \\
&\quad - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1 - 1)a_2(a_2 - 1)\ldots a_{n-1}(a_{n-1} - 1)(a_n - 1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(-1)^{i-1}}{\prod_{j=1}^{i} a_j(a_j - 1)}.
\end{aligned}$$

En in het geval dat $L^{n-1}(x) \neq 0$ voor alle $n \geq 1$ hebben we

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_1(a_1 - 1)(a_2 - 1)} + \ldots \\
&\quad + \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1 - 1)a_2(a_2 - 1)\ldots a_{n-1}(a_{n-1} - 1)(a_n - 1)} + \ldots \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(-1)^{i+1}}{\prod_{j=1}^{i} a_j(a_j - 1)}.
\end{aligned}$$

2.3 Uniciteit

Stelling 2.1. *Ieder getal $x \in [0,1)$ heeft een unieke Lüroth getalsontwikkeling.*

Bewijs. Laat $S_n = S_n(x)$ de som zijn van de eerste n termen in de getalsontwikkeling van x. Dan geldt er

$$|x - S_n| \;=\; \left|\frac{L^n(x)}{a_1(a_1-1)\dots a_n(a_n-1)}\right|.$$

Aangezien $L^n(x) \in [0,1)$ en $a_n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ voor alle x en alle $n \geq 1$ vinden we

$$|x - S_n| \;\leq\; \frac{1}{2^n} \to 0 \text{ als } n \to \infty.$$

Uit het bovenstaande volgt nu dat als x en y dezelfde Lüroth getalsontwikkeling hebben dan geldt voor alle $n \geq 1$

$$|x - y| \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

waaruit volgt dat x gelijk is aan y. $\square$

2.4 Over de rationaliteit van Lüroth getalsontwikkelingen

Stelling 2.2. *Ieder rationaal getal heeft een eindige of periodieke Lüroth getalsontwikkeling.*

Bewijs. Laat $p_0 \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ en $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ met $0 \leq \frac{p_0}{q} < 1$, dan bestaat er een $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ zodanig dat $\frac{p_0}{q} \in (\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}]$. Dan geldt voor de alternerende Lüroth tranformatie $L(\frac{p_0}{q}) = k - k(k-1)\frac{p_0}{q} < 1$, waaruit volgt dat $kq - k(k-1)p_0 < q$. Voor $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ definiëren we $p_n = k_n q - k_n(k_n-1)p_{n-1}$ met $k_n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ zodanig dat $\frac{p_n}{q} \in (\frac{1}{k_n}, \frac{1}{k_n - 1}]$ dan geldt er $L^n(\frac{p_0}{q}) = \frac{p_n}{q}$ met $0 \leq p_n \leq q$. Laat $V = \{0, 1, \dots, q-1\}$ dan geldt er $p_n \in V$ voor alle $n \geq 0$. Aangezien $|V| = q$ geldt er dat $L^m(\frac{p_0}{q}) = L^n(\frac{p_0}{q})$ met $0 \leq m < n \leq q$. $\square$

Stelling 2.3. *Ieder getal met een eindige Lüroth getalsontwikkeling is rationaal.*

Bewijs. Neem aan dat een getal $x \in [0,1]$ een eindige ontwikkeling heeft. Dan geldt er dus dat er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat voor alle $m \in \mathbb{N}_{\geq n}$ geldt dat $L^m(x) = 0$. Stel x is irrationaal dan geldt er $L(x) \notin \mathbb{Q}$ en in het algemeen geldt er voor alle $q \in \mathbb{N}$ dat $L^q(x) \neq 0$. Tegenspraak. $\square$

Stelling 2.4. *Ieder getal met een periodieke Lüroth getalsontwikkeling is rationaal.*

Bewijs. Neem aan dat een getal $x \in [0,1]$ een periodieke ontwikkeling heeft met preperiode van lengte k en periode van lengte m. We kunnen een getal x als volgt schrijven:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(-1)^{i+1}}{\prod_{j=1}^{i} a_j(a_j-1)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i(-1)^{i+1}}{\prod_{j=1}^{i} a_j(a_j-1)} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{a_i(-1)^{i+1}}{\prod_{j=1}^{i} a_j(a_j-1)}. \end{aligned}$$

We definiëren de volgende getallen

$$y = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i(-1)^{i+1}}{\prod_{j=1}^{i} a_j(a_j-1)}, \quad p = \prod_{j=1}^{k} a_j(a_j-1), \text{ en } r = \prod_{j=k+1}^{k+m} a_j(a_j-1).$$

Dan geldt er dat $y \in \mathbb{Q}$, aangezien $a_i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ voor alle $1 \leq i \leq k$ en de som eindig is en voor p en r geldt er dat $p, r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ aangezien $a_j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ voor alle $1 \leq j \leq k+m$. We kunnen x nu als volgt schrijven

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i(-1)^{i+1}}{\prod_{j=1}^{i} a_j(a_j-1)} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{a_i(-1)^{i+1}}{\prod_{j=1}^{i} a_j(a_j-1)} \\
&= y + \frac{1}{p} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{a_i(-1)^{i+1}}{\prod_{j=k+1}^{i} a_j(a_j-1)} \\
&= y + \frac{1}{p} \left(\sum_{i=k+1}^{k+m} \frac{a_i(-1)^{i+1}}{\prod_{j=k+1}^{i} a_j(a_j-1)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\prod_{j=k+1}^{k+m} a_j(a_j-1)} \right)^n \right) \right) \\
&= y + \frac{1}{p} \left(\sum_{i=k+1}^{k+m} \frac{a_i(-1)^{i+1}}{\prod_{j=k+1}^{i} a_j(a_j-1)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \right) \right) \\
&= y + \frac{1}{p} \left(\sum_{i=k+1}^{k+m} \frac{a_i(-1)^{i+1}}{\prod_{j=k+1}^{i} a_j(a_j-1)} \left(\frac{r}{r-1} \right) \right) \\
&= y + \frac{r}{p(r-1)} \sum_{i=k+1}^{k+m} \frac{a_i(-1)^{i+1}}{\prod_{j=k+1}^{i} a_j(a_j-1)}.
\end{aligned}$$

Hieruit concluderen we nu dat $x \in \mathbb{Q}$. □

2.5 Maatbehoudendheid voor de alternerende Lüroth transformatie

In dit hoofdstuk zullen we laten zien dat de Lebesgue-maat invariant is voor de alternerende Lüroth transformatie L. We gaan ervan uit dat de lezer vertrouwd is met enkele begrippen uit maattheorie zoals: semi-algebra, σ-algebra, Borel σ-algebra, kansmaat, maat, Lebesgue-maat en meetbare ruimten.

Definitie 2.5. Laat $(X, \mathcal{A})$ en $(Y, \mathcal{B})$ meetbare ruimten zijn. Een functie $T : X \to Y$ heet *meetbaar* als voor iedere $E \in \mathcal{B}$ geldt dat $T^{-1}(E) = \{x \in X : T(x) \in E\} \in \mathcal{A}$.

Definitie 2.6. Laat $(\Omega, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte zijn en T een meetbare functie van Ω naar zichzelf. Een maat μ op $(\Omega, \mathcal{A})$ heet *invariant* onder T als voor iedere meetbare verzameling $E \subseteq \Omega$ geldt dat $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$. We zeggen ook dat T *maatbehoudend* is met betrekking tot de maat μ.

Stelling 2.7. *Laat $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ een kansruimte zijn, $i = 1, 2$, en $T : X_1 \to X_2$ een transformatie. Neem aan dat $\mathcal{S}$ een semi-algebra is die $\mathcal{B}_2$ voortbrengt. Dan is T meetbaar en maatbehoudend dan en slechts dan als we voor elke $A \in \mathcal{S}$ hebben dat $T^{-1}(A) \in \mathcal{B}_1$ en $\mu_1(T^{-1}(A)) = \mu_2(A)$.*

Bewijs. Zie Stelling 1.2.2. in [DD08]. □

Opmerking 2.8. De half-open intervallen $[a,b)$ op $[0,1)$ vormen een semi-algebra die de Borel σ-algebra op $[0,1)$ voortbrengt.

Lemma 2.9. *Laat* $[a,b) \subset [0,1)$. *Dan hebben we:*

$$L^{-1}[a,b) = \bigcup_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{b}{k(k-1)}, \frac{1}{k-1} - \frac{a}{k(k-1)} \right].$$

Bewijs. Voor ieder interval $[a,b) \subset [0,1)$ geldt

$$\begin{aligned}
L^{-1}(a,b) &= \Big\{ x \ : \ L(x) \in [a,b) \Big\} \\
&= \Big\{ x \ : \ a \leq L(x) < b \Big\} \\
&= \Big\{ x \ : \ a \leq k - k(k-1)x < b, \ \forall k \geq 2 \Big\} \\
&= \left\{ x \ : \ x \in \left(\frac{1}{k-1} - \frac{b}{k(k-1)}, \frac{1}{k-1} - \frac{a}{k(k-1)} \right], \ \forall k \geq 2 \right\} \\
&= \bigcup_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{b}{k(k-1)}, \frac{1}{k-1} - \frac{a}{k(k-1)} \right].
\end{aligned}$$

□

Stelling 2.10. *De Lebesgue-maat is invariant voor de alternerende Lüroth transformatie* L.

Bewijs. Vanwege Stelling 2.7 is het voldoende om invariantie na te gaan voor half-open intervallen. Vanwege Lemma 2.9 geldt

$$\begin{aligned}
\lambda(L^{-1}[a,b)) &= \lambda\left(\bigcup_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{b}{k(k-1)}, \frac{1}{k-1} - \frac{a}{k(k-1)} \right] \right) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \lambda\left(\frac{1}{k-1} - \frac{b}{k(k-1)}, \frac{1}{k-1} - \frac{a}{k(k-1)} \right] \\
&= (b-a) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} \\
&= (b-a) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\
&= b - a \\
&= \lambda[a,b).
\end{aligned}$$

□

2.6 Ergodiciteit voor de alternerende Lüroth transformatie

In deze paragraaf zullen we laten zien dat de alternerende Lüroth transformatie ergodisch is met betrekking tot de Lebesgue-maat λ.

Definitie 2.11. Laat (X, Σ, μ) een kansruimte zijn en $T : X \to X$ een maatbehoudende transformatie. Dan is de transformatie T *ergodisch* met betrekking tot de maat μ als voor alle $E \in \Sigma$ met $T^{-1}(E) = E$ geldt dat $\mu(E) = 0$ of $\mu(E) = 1$.

Het *fundamenteel interval* van orde k duiden we aan met

$$\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \{x : a_1(x) = i_1, a_2(x) = i_2, \ldots, a_k(x) = i_k\}.$$

Er geldt dat de alternerende Lüroth transformatie L^k beperkt tot het fundamenteel interval $\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \{x : a_1(x) = i_1, a_2(x) = i_2, \ldots a_k(x)$ surjectief en linear is met helling $i_1(i_1 - 1) \ldots i_{k-1}(i_{k-1} - 1)i_k$, aangezien voor $x \in \Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \{x : a_1(x) = i_1, a_2(x) = i_2, \ldots a_k(x)\}$ geldt

$$L^k(x) = i_k - i_k(i_k - 1)[i_{k-1} - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot i_{k-1} \cdot (i_{k-1} - 1) \cdot \ldots \cdot i_1 \cdot (i_1 - 1)x].$$

Lemma 2.12. *Voor het fundamenteel interval van orde k geldt*

$$\lambda(\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k)) \quad = \quad \frac{1}{i_1(i_1 - 1) \ldots i_{k-1}(i_{k-1} - 1)i_k}$$

Bewijs. Voor het bewijs gebruiken we de getalsontwikkelingen zoals gegeven in Paragraaf 2.2. Voor $x \in \Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ hebben we de uitdrukking:

$$\begin{aligned} x \;=\; & \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_1(a_1 - 1)(a_2 - 1)} + \frac{1}{a_1(a_1 - 1)a_2(a_2 - 1)(a_3 - 1)} - \ldots \\ & + \frac{(-1)^{k-1}}{a_1(a_1 - 1)a_2(a_2 - 1) \ldots a_{k-1}(a_{k-1} - 1)(a_k - 1)} + \frac{(-1)^k L^k(x)}{a_1(a_1 - 1)a_2(a_2 - 1) \ldots a_k(a_k - 1)} \\ =\; & \frac{p_k}{q_k} + \frac{(-1)^k L^k(x)}{a_1(a_1 - 1)a_2(a_2 - 1) \ldots a_k(a_k - 1)}. \end{aligned}$$

Als k even is, dan geldt $(-1)^k = 1$ en $0 \leq L^k(x) < 1$ waaruit volgt,

$$x \in \left[\frac{p_k}{q_k}, \frac{p_k}{q_k} + \frac{1}{a_1(a_1 - 1)a_2(a_2 - 1) \ldots a_k(a_k - 1)}\right),$$

En als k oneven is, dan geldt $(-1)^k = -1$ en $0 \leq L^k(x) < 1$ waaruit volgt,

$$x \in \left(\frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{a_1(a_1 - 1)a_2(a_2 - 1) \ldots a_k(a_k - 1)}, \frac{p_k}{q_k}\right],$$

aangezien $(-1)^k = -1$ en $0 \leq L^k(x) < 1$. We kunnen hieruit concluderen dat

$$\lambda(\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k)) \quad = \quad \frac{1}{i_1(i_1 - 1) \ldots i_{k-1}(i_{k-1} - 1)i_k}. \;\square$$

Lemma 2.13. *[Knopp's Lemma] Als B een Lebesgue-meetbare verzameling is en $\mathcal{C}$ de klasse van deelintervallen van $[0,1)$ die voldoet aan*

(a) elke open deelinterval $[0,1)$ is een aftelbare vereniging van disjuncte elementen van $\mathcal{C}$,

(b) er is een $\gamma > 0$ zodanig dat voor alle $A \in \mathcal{C}$, $\lambda(A \cap B) \geq \gamma\lambda(A)$,

dan geldt $\lambda(B) = 1$.

Bewijs. Zie Lemma 1.8.1 in [DD08]. □

Opmerking 2.14. De Lebesgue-maat is invariant met betrekking tot verschuiving. Daarnaast geldt voor schaling de eigenschap: voor iedere Borelverzameling B en iedere $t > 0$ geldt $\lambda(t \cdot B) = t\lambda(B)$, waarbij $t \cdot B = \{t \cdot b : b \in B\}$. Op elk fundamenteel interval $\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ van orde k is L^k een bijectie tussen $\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ en $[0,1)$ met schalingsfactor $\lambda(\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k))$, waaruit volgt dat voor alle $B \in \mathcal{B}$ geldt

$$\lambda(\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k) \cap L^{-k}(B)) = \lambda(\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k)) \cdot \lambda(B).$$

Stelling 2.15. *De alternerende Lüroth transformatie L is ergodisch met betrekking tot de Lebesgue-maat λ.*

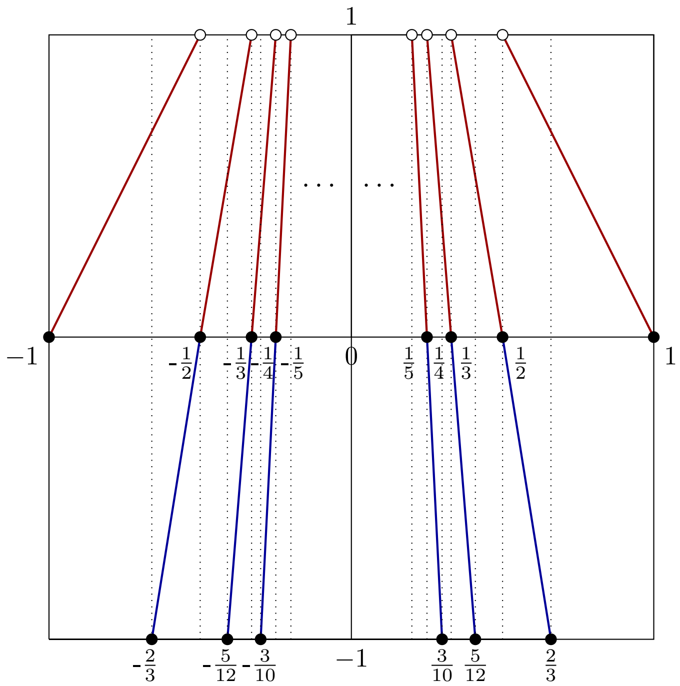
Bewijs. Laat $\mathcal{C}$ de verzameling zijn van alle fundamentele intervallen van alle orde. De verzameling $\mathcal{C}$ voldoet aan (a) van Lemma 2.13, aangezien voor iedere $x \in [0,1)$ en $\varepsilon > 0$ er een $k \in \mathbb{N}$ is zodanig dat $x \in \Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ en $\lambda(\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k)) < \varepsilon$. Laat $B \in \mathcal{B}$ zodanig dat $L^{-1}(B) = B$ en neem aan dat $\lambda(B) > 0$. Neem $A \in \mathcal{C}$. Dan geldt vanwege Opmerking 2.14

$$\begin{aligned} \lambda(A \cap B) &= \lambda(A \cap L^{-k}(B)) \\ &= \lambda(A) \cdot \lambda(B). \end{aligned}$$

Als we $\gamma = \lambda(B) > 0$ nemen dan wordt voldaan aan (b) van Lemma 2.13 en geldt $\lambda(B) = 1$, waarmee bewezen is dat de alternerende Lüroth transformatie L ergodisch is met betrekking tot de Lebesgue-maat λ. □

3 De uitgebreide alternerende Lüroth transformatie

In dit hoofdstuk zullen we kijken naar een uitbreiding van de alternerende Lüroth transformatie. In paragraaf 3.1 zullen we beschrijven hoe de uitgebreide Lüroth transformatie tot stand is gekomen. In paragraaf 3.2 introduceren we wat notatie en terminologie, waarmee we dan in paragraaf 3.3 een wiskundige beschrijving voor de uitgebreide alternerende Lüroth transformatie geven. Vervolgens zullen we dan in paragraaf 3.4 een aantal eigenschappen van de uitgebreide alternerende Lüroth afbeelding bewijzen.



Figuur 2: De uitgebreide alternerende Lüroth transformatie.

3.1 Het onstaan van de uitgebreide alternerende Lüroth transformatie

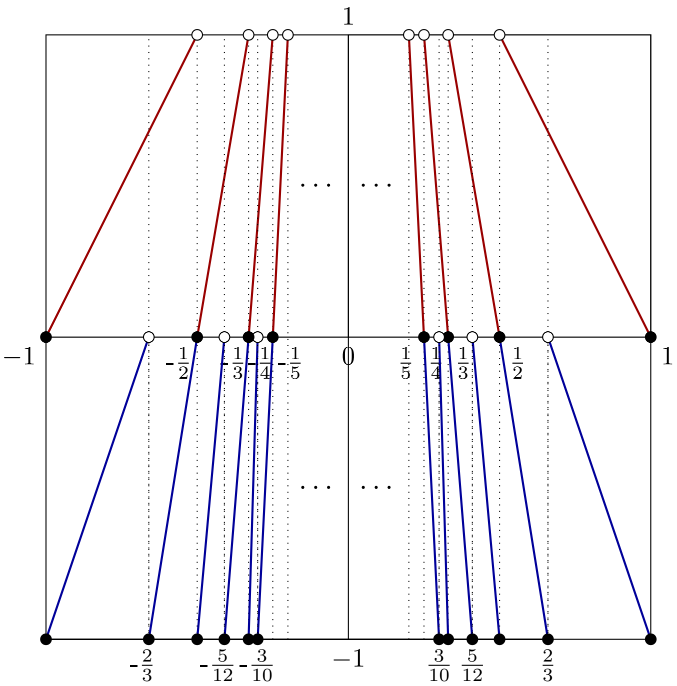
Het plaatje in Figuur 2 is tot stand gekomen door de lijnen van de alternerende Lüroth transformatie door te trekken tot -1 en het vervolgens in de y-as te spiegelen. Met behulp van dit plaatje kunnen we voor alle $x \in [-1, 1]$ verschillende getalsontwikkelingen maken die sterk lijken op de getalsontwikkelingen voor de alternerende Lüroth transformatie.

De verschillende getalsontwikkelingen komen tot stand door op de gebieden met alleen een rode lijn de rode lijn te kiezen en op de gebieden met zowel een rode als een blauwe lijn een keuze maken tussen een van de twee. De cijfers in de getalsontwikkeling zijn daardoor afhankelijk van de keuzes die we maken.

We merken op dat de waarden van de rode lijnen in het interval $[0, 1]$ liggen en de waarden van de blauwe lijnen in het interval $[-1, 0]$. We willen twee transformaties krijgen, een transformatie van de rode lijnen naar $[0, 1]$ en een transformatie van de blauwe lijnen naar $[-1, 0]$. Dit doen we door op de gebieden waar alleen maar één keuze is (de rode lijn) ook een blauwe lijn toe te voegen. Het plaatje dat we dan hebben is te zien in Figuur 3. We merken op dat we verderop de kans om de toegevoegde blauwe lijnen te kiezen op nul zetten. Het toevoegen van de blauwe lijnen is alleen nodig om goed gedefinieerde transformaties te krijgen.

3.2 Random maps en invariante maten

Bij de bewijzen verder op in dit hoofdstuk zullen we gebruik maken van resultaten uit [Ino12]. Daarom introduceren we nu wat notatie en begrippen die in dat artikel gebruikt worden.



Figuur 3: De uitgebreide alternerende Lüroth transformatie.

De parameterruimte duiden we aan met W, waarvan we aannemen dat deze aftelbaar is. Met een σ-algebra $\mathcal{A}$ op W en voor de telmaat gebruiken we ν. We nemen aan dat het drietal $(W, \mathcal{B}, \nu)$ een σ-eindige maatruimte is.

De toestandsruimte duiden we aan met X. De Borel σ-algebra op X geven we aan met $\mathcal{B}$ en m is de Lebesgue-maat op de σ-algebra van X. We nemen aan dat het drietal $(X, \mathcal{B}, m)$ een σ-eindige maatruimte is.

Laat $\tau_t : X \to X$ $(t \in W)$ een niet-singuliere transformatie zijn. Dit betekent dat voor alle $A \in \mathcal{A}$ geldt dat $m(\tau_t^{-1}A) = 0$ als $m(A) = 0$. Verder nemen we aan dat $\tau_t(x)$ een meetbaar functie is als functie van t.

Laat $p : W \times X \to [0, \infty)$ een meetbare functie zijn die een kansdichtheidsfunctie van t is voor alle $x \in X$, dat betekent dat $\int_W p(t,x)\nu(\mathrm{dt}) = 1$ voor $x \in X$.

Laat Λ een aftelbare of eindige verzameling zijn en laat $\Lambda_t \subseteq \Lambda$ voor alle $t \in W$. We nemen Λ als een verzameling van indices van deelintervallen van X. Voor $t \in W$ nemen we aan dat $\{I_{t,i}\}_{i \in \Lambda_t}$ een familie is van gesloten intervallen zodanig dat $\mathrm{Int}(I_{t,i}) \cap \mathrm{Int}(I_{t,j}) = \emptyset$ $(i \neq j)$ en $m(X \backslash \bigcup_{i \in \Lambda_t} I_{t,i}) = 0$. Met $\mathrm{Int}(I)$ duiden we het inwendige van het interval I aan.

Definitie 3.1. De verzameling $T = \{\tau_t, p(t,x), \{I_{t,i}\}_{i \in \Lambda} : t \in W\}$ heet een *random map.*

Laat $\tau_{t,i}$ de restrictie zijn van τ_t tot $\mathrm{Int}(I_{t,i})$ voor elke $t \in W$ en $i \in \Lambda$. We definiëren dan

$$\varphi_{t,i}(x) := \begin{cases} \tau_{t,i}^{-1}(x), & x \in \tau_{t,i}(\mathrm{Int}(I_{t,i})), \\ 0, & x \in X \backslash \tau_{t,i}(\mathrm{Int}(I_{t,i})), \end{cases}$$

voor elke $t \in W$ en $i \in \Lambda$, en merken op dat $\phi_{t,i}(x) = 0$ als $i \in \Lambda \backslash \Lambda_t$.

We nemen aan dat voor de random map T het volgende geldt:

(A1) De restrictie van τ_t tot $\mathrm{Int}(I_{t,i})$ is een C^1 en monotone functie voor elke $i \in \Lambda$ en $t \in W$.

(A2) Voor elke $x \in X$ en $i \in \Lambda$ geldt dat $w_{x,i}(t) := \phi_{t,i}(x)$ meetbaar is als functie van t.

Voor $t \in W$ en $x \in X$ definiëren we nu

$$g(t,x) := \begin{cases} p(t,x)/|\tau_t'(x)|, & x \in \bigcup_i \mathrm{Int}(I_{t,i}), \\ 0, & x \in X \backslash \bigcup_i \mathrm{Int}(I_{t,i}), \end{cases}$$

Definitie 3.2. De *totale variatie* van g op $[a,b]$ wordt gegeven door

$$\bigvee_{[a,b]} g = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{j=0}^{n_p-1} |g(x_{j+1}) - g(x_j)|.$$

waarbij het supremum loopt over de verzameling van alle partities $\mathcal{P}$, waarbij we dus hebben $\mathcal{P} = \{P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n_p}\} | a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n_p} = b\}$.

We nemen aan dat de functie $g(t,x)$ voldoet aan de volgende twee voorwaarden:

(a) $\sup_{x\in X} \int_W g(t,x)\nu(\mathrm{dt}) < \alpha < 1$;

(b) Er bestaat een constante M zodanig dat $\bigvee_X g(t,\cdot) < M$ voor bijna alle $t \in W$, dat betekent, er is een ν-meetbare verzameling $W_0 \subset W$ zodanig dat $\int_{W_0} p(t,x)\nu(\mathrm{dt}) = 1$ en $\bigvee_X g(t,\cdot) < M$ voor alle $t \in W_0$.

Stelling 3.3. *[Stelling 5.2 in [Ino12]] Laat $T = \{\tau_t, p(t,x), \{I_{t,i}\}_{i\in\Lambda} : t \in W\}$ een random afbeelding zijn die voldoet (A1) en (A2). Neem aan dat de random afbeelding T voldoet aan de bovenstaande voorwaarden (a) en (b). Dan heeft T een invariante maat die absoluut continu is met betrekking tot de Lebesgue-maat.*

Opmerking 3.4. Als W eindig is dan hebben we de volgende uitdrukking voor de maat μ (zie [Ino12] voor de afleiding)

$$\mu(A) = \sum_{t\in W} \int_{\tau_t^{-1}(A)} p(t,x)\nu(\{t\})\ \mu(dx) \qquad \text{voor } A \in \mathcal{A}.$$

3.3 De uitgebreide Lüroth transformatie

In deze paragraaf zullen we een wiskundige beschrijving geven van de alternerende Lüroth transformatie. Daarnaast zullen we de notatie en begrippen die we in paragraaf 3.2 hebben geïntroduceerd aan de uitgebreide Lüroth transformatie koppelen.

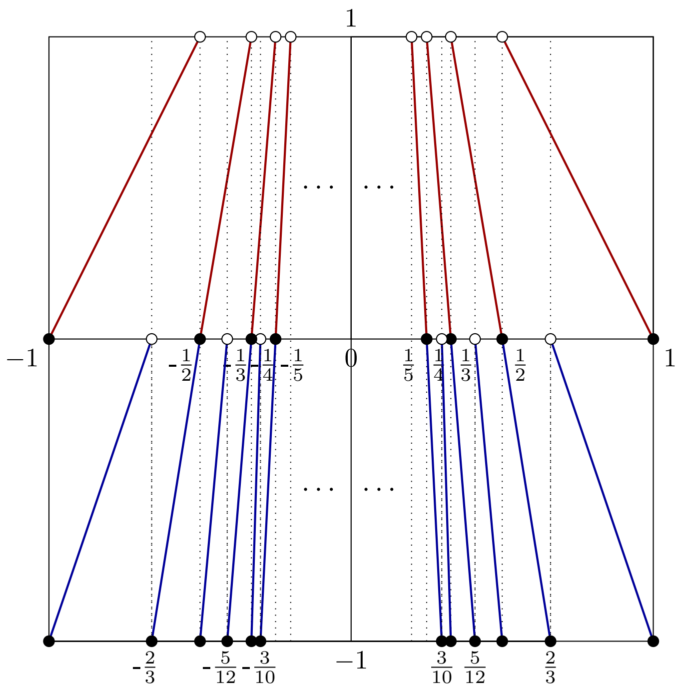
Voor de uitgebreide alternerende Lüroth transformatie hebben we de parameterruimte $W = \{0,1\}$, de σ-algebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(W)$ en de (tel)maat $\nu(A) = |A|$ voor alle $A \in \mathcal{A}$. Het drietal $(W, \mathcal{A}, \nu)$ vormt dus een σ-eindige maatruimte.

De toestandsruimte voor de uigebreide alternerende Lüroth transformatie is $X = [-1,1]$, $\mathcal{B}$ is de Borel σ-algebra op $[-1,1]$ en m is de Lebesgue-maat op $([-1,1],\mathcal{B})$. Het drietal $([-1,1],\mathcal{B},m)$ vormt dus een σ-eindige maatruimte.

In Figuur 4 is het opnieuw het plaatje behorende bij de uitgebreide alternerende Lüroth transformatie te zien. We kunnen voor de uitgebreide alternerende Lüroth transformatie onderscheid maken tussen twee transformaties. De transformatie die gegeven wordt door de rode lijnen en de transformatie die gegeven wordt door de blauwe lijnen, deze zullen we respectievelijk aanduiden met τ_0 en τ_1.

De transformatie τ_0 is een afbeelding van $[-1,1]$ naar $[0,1]$ die als volgt is gedefinieerd:

$$\tau_0(x) = \begin{cases} k + k(k-1)x, & x \in \left[-\frac{1}{k-1}, -\frac{1}{k}\right), k \geq 2, \\ k - k(k-1)x, & x \in \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right], k \geq 2, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



Figuur 4: De uitgebreide alternerende Lüroth transformatie.

De transformatie τ_1 is een afbeelding van $[-1,1]$ naar $[-1,0]$ die als volgt is gedefinieerd

$$\tau_1(x) := \begin{cases} -1 + \frac{1}{2}k(k+1) + \frac{1}{2}(k-1)k(k+1)x, & x \in \left[-\frac{1}{k-1}, -\frac{k+2}{k(k+1)}\right), k \geq 2, \\ k+1+k(k+1)x, & x \in \left[-\frac{k+2}{k(k+1)}, -\frac{1}{k}\right), k \geq 2, \\ k+1-k(k+1)x, & x \in \left(\frac{1}{k}, \frac{k+2}{k(k+1)}\right], k \geq 2, \\ -1 + \frac{1}{2}k(k+1) - \frac{1}{2}(k-1)k(k+1)x, & x \in \left(\frac{k+2}{k(k+1)}, \frac{1}{k-1}\right], k \geq 2, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

We definiëren de kansdichtheidsfunctie $p : \{0,1\} \times [-1,1] \to [0,\infty)$ als volgt

$$p(t,x) := \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \big[-\frac{k+2}{k(k+1)}, -\frac{1}{k}\big) \cup \big(\frac{1}{k}, \frac{k+2}{k(k+1)}\big] \cup \{0\}, k \geq 2, \\ 1-t, & x \in \big[-\frac{1}{k-1}, -\frac{k+2}{k(k+1)}\big) \cup \big(\frac{k+2}{k(k+1)}, \frac{1}{k-1}\big], k \geq 2. \end{cases}$$

Deze functie is een kansdichtheidsfunctie van t voor alle $x \in [-1,1]$, aangezien voor alle $x \in [-1,1]$ geldt dat $1 - p(0,x) = p(1,x)$ waaruit volgt dat

$$\begin{aligned} \int_W p(t,x)\nu(dt) &= p(0,x)\nu(\{0\}) + p(1,x)\nu(\{1\}) \\ &= p(0,x)\cdot 1 + p(1,x)\cdot 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

We nemen voor Λ de aftelbare verzameling $\mathbb{Z}/\{-1,1\}$ en nemen $\Lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda$ dan geldt er dus dat $\Lambda_t \subseteq \Lambda$ voor alle $t \in W$. We definiëren de gesloten intervallen $I_{t,i}$ als volgt

$$I_{0,i} := \begin{cases} \left[\frac{1}{1+i}, \frac{1}{i}\right], & i \leq -2, \\ \{0\}, & i = 0, \\ \left[\frac{1}{i}, \frac{1}{i-1}\right], & i \geq 2. \end{cases} \qquad I_{1,i} := \begin{cases} \left[\frac{2}{i}, \frac{2i-12}{(i-2)(i-4)}\right], & i \leq -2, i \text{ even} \\ \left[\frac{2i-10}{(i-1)(i-3)}, \frac{2}{i-1}\right], & i \leq -3, i \text{ oneven} \\ \{0\}, & i = 0, \\ \left[\frac{2}{i+1}, \frac{2i+10}{(i+1)(i+3)}\right], & i \geq 3, i \text{ oneven}, \\ \left[\frac{2i+12}{(i+2)(i+4)}, \frac{2}{i}\right], & i \geq 2, i \text{ even}, \end{cases}$$

Dan geldt voor elke $t \in \{0,1\}$ dat $\{I_{t,i}\}_{i\in\Lambda_t}$ een familie is van gesloten intervallen zodanig dat $\text{Int}(I_{t,i}) \cap \text{Int}(I_{t,j}) = \emptyset$ $(i \neq j)$ en $m([-1,1]\setminus \bigcup_{i\in\Lambda_t} I_{t,i}) = 0$.

De verzameling $T = \{\tau_t, p(t,x), \{I_{t,i}\}_{i\in\Lambda} : t \in [-1,1]\}$ is dan de random map behorende bij de uitgebreide alternerende Lüroth transformatie.

Laat $\tau_{t,i}$ de restrictie zijn van τ_t tot $\text{Int}(I_{t,i})$ voor elke $t \in W$ en $i \in \Lambda$. Er geldt

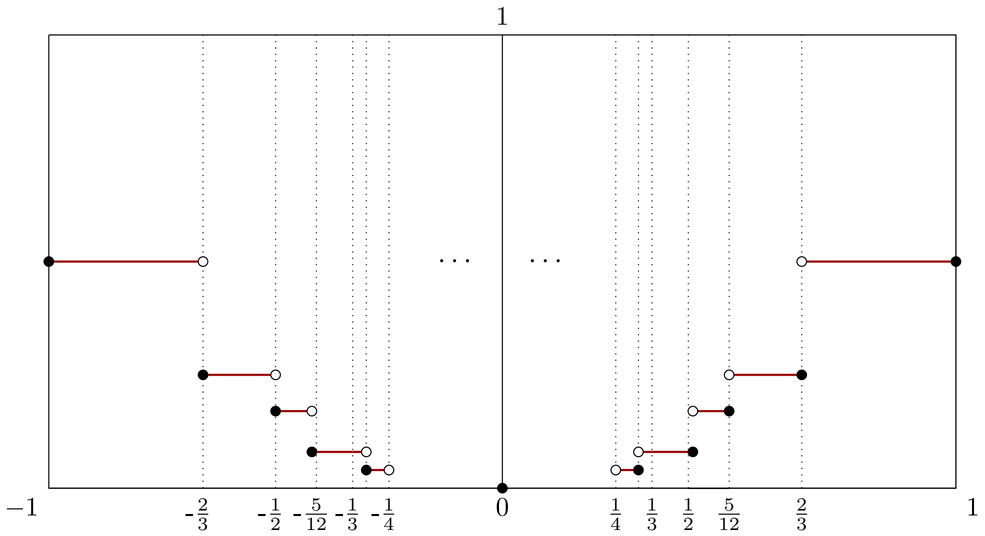
$$\varphi_{t,i}(x) := \begin{cases} \frac{x-i}{i(i-1)}, & x \in \tau_{t,i}(\text{Int}(I_{t,i})), t = 0, i \leq -2, \\ \frac{i-x}{i(i-1)}, & x \in \tau_{t,i}(\text{Int}(I_{t,i})), t = 0, i \geq -2, \\ \frac{2x+2-i(i+1)}{(i-1)i(i+1)}, & x \in \tau_{t,i}(\text{Int}(I_{t,i})), t = 1, i \leq -2, i \text{ even}, \\ \frac{x-i-1}{i(i+1)}, & x \in \tau_{t,i}(\text{Int}(I_{t,i})), t = 1, i \leq -2, i \text{ oneven}, \\ \frac{1+i-x}{i(i+1)}, & x \in \tau_{t,i}(\text{Int}(I_{t,i})), t = 1, i \geq -2, i \text{ oneven}, \\ \frac{i(i+1)-2x-2}{(i-1)i(i+1)}, & x \in \tau_{t,i}(\text{Int}(I_{t,i})), t = 1, i \geq -2, i \text{ even} \\ 0, & x \in [-1,1]\setminus\tau_{t,i}(\text{Int}(I_{t,i})), \end{cases}$$

voor elke $t \in W$ en $i \in \Lambda$.

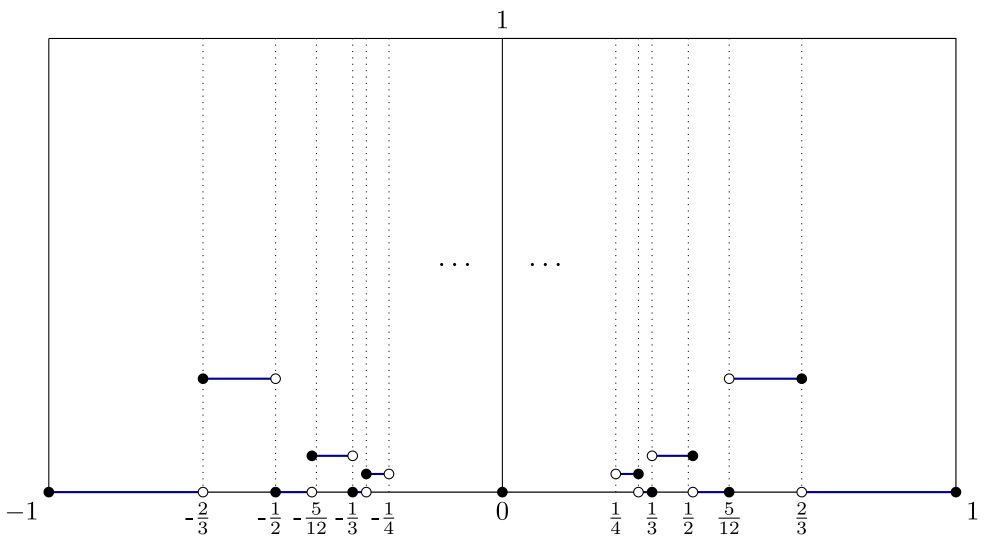
Voor $t \in W$ en $x \in [-1,1]$ geldt

$$g(t,x) := \begin{cases} \frac{1-t}{k(k-1)}, & x \in \left[-\frac{1}{k-1}, -\frac{k+2}{k(k+1)}\right) \cup \left(\frac{k+2}{k(k+1)}, \frac{1}{k-1}\right], k \geq 2, \\ \frac{1}{2k(k-1+2t)}, & x \in \left[-\frac{k+2}{k(k+1)}, -\frac{1}{k}\right) \cup \left(\frac{1}{k}, \frac{k+2}{k(k+1)}\right], k \geq 2, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

In Figuur 5 en Figuur 6 zien we respectievelijk de functies $g(0,x)$ en $g(1,x)$. Aan de hand van deze plaatjes kunnen we makkelijker inzien wat de totale variatie van g is.



Figuur 5: De functie $g(0,x)$.



Figuur 6: De functie $g(1,x)$.

Lemma 3.5. *Voor de functie $g : W \times [-1,1] \to [0, \frac{1}{2}]$ bestaat een constante M zodanig dat $\bigvee_{[-1,1]} g(t, \cdot) < M$ voor bijna alle $t \in W$.*

Bewijs. Als $x \in \left[-\frac{k+2}{k(k+1)}, -\frac{1}{k}\right) \cup \left(\frac{1}{k}, \frac{k+2}{k(k+1)}\right]$ dan geldt $g(0,x) = \frac{1}{k(k-1)}$ en als $x \in \left[-\frac{1}{k-1}, -\frac{k+2}{k(k+1)}\right) \cup \left(\frac{k+2}{k(k+1)}, \frac{1}{k-1}\right]$ dan geldt $g(0,x) = \frac{1}{2k(k-1)}$. Een bovengrens wordt dan gegeven door

$$\bigvee_{[-1,1]} g(0,\cdot) = 2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{2k(k-1)} \right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1.$$

Als $x \in \left[-\frac{k+2}{k(k+1)}, -\frac{1}{k}\right) \cup \left(\frac{1}{k}, \frac{k+2}{k(k+1)}\right]$ dan geldt $g(1,x) = \frac{1}{2k(k-1)}$ en als $x \in \left[-\frac{1}{k-1}, -\frac{k+2}{k(k+1)}\right) \cup \left(\frac{k+2}{k(k+1)}, \frac{1}{k-1}\right]$ dan geldt $g(1,x) = 0$. Een bovengrens wordt dan gegeven door

$$\bigvee_{[-1,1]} g(1,\cdot) = 4 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k(k-1)} = 2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 2. \qquad \square$$

Stelling 3.6. *De random map $T = \{\tau_t, p(t,x), \{I_{t,i}\}_{i\in\Lambda} : t \in \{0,1\}\}$ heeft een invariante maat μ die absoluut continu is met betrekking tot de Lebesgue-maat.*

Bewijs. De random map T voldoet aan (A1) aangezien voor elke $i \in \Lambda$ en $t \in W$ de restrictie van τ_t tot $\mathrm{Int}(I_{t,i})$ een lineaire functie is, dus C^1 en monotoon. Ook wordt aan (A2) voldaan, want de σ-algebra is $\mathcal{P}(W)$ en elke inverse beeld ligt in $\mathcal{P}(W)$. Voor de variatie van g geldt

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[-1,1]} \int_W g(t,x)\ \nu(dt) &= \sup_{x\in[-1,1]} [g(0,x)\nu(dt) + g(1,x)\nu(dt)] \\
&= \sup_{x\in[-1,1]} [g(0,x)\cdot 1 + g(1,x)\cdot 1] \\
&= \sup_{x\in[-1,1]} [g(0,x) + g(1,x)]
\end{aligned}$$

Aan de hand van Figuur 5 en Figuur 6 is te zien dat het supremum wordt aangenomen voor $x \in [-1, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. We hebben voor de variatie van g:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[-1,1]} \int_W g(t,x)\ \nu(dt) &= \sup_{x\in[-1,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]} [g(0,x) + g(1,x)] \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

waarmee voldaan wordt aan (a). Ook wordt er voldaan aan (b), dit volgt namelijk uit Lemma 3.5. Dan volgt het resultaat met Stelling 3.3. $\square$

We kunnen voor de maat μ in Stelling 3.6 een uitdrukking geven. Uit Opmerking 3.4 volgt dat voor alle $A \in \mathcal{B}$ geldt

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \sum_{t\in\{0,1\}} \int_{\tau_t^{-1}(A)} p(t,x)\nu(\{t\})\ \mu(dx) \\
&= \int_{\tau_0^{-1}(A)} p(0,x)\ \mu(dx) + \int_{\tau_1^{-1}(A)} p(1,x)\ \mu(dx)
\end{aligned}$$

Laat U_1 de vereniging van intervallen zijn waarbij de transformatie τ_0 kiezen met kans $p = 1$, dus $U_1 = \bigcup_{k\geq 2} \left[-\frac{1}{k-1}, -\frac{k+2}{k(k+1)}\right) \cup \left(\frac{k+2}{k(k+1)}, \frac{1}{k-1}\right]$ en laat U_2 de vereniging van intervallen zijn waarbij we τ_0 of τ_1 kiezen allebei met kans $p = \frac{1}{2}$, dus $U_2 = \bigcup_{k\geq 2} \left[-\frac{k+2}{k(k+1)}, -\frac{1}{k}\right) \cup \left(\frac{1}{k}, \frac{k+2}{k(k+1)}\right]$.

Aangezien $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ geldt voor alle $A \in \mathcal{B}$

$$
\begin{aligned}
\mu(A) &= \int_{\tau_0^{-1}(A)} p(0,x)\ \mu(dx) + \int_{\tau_1^{-1}(A)} p(1,x)\ \mu(dx) \\
&= \int_{\tau_0^{-1}(A)\cap U_1} p(0,x)\ \mu(dx) + \int_{\tau_1^{-1}(A)\cap U_1} p(1,x)\ \mu(dx) \\
&\quad + \int_{\tau_0^{-1}(A)\cap U_2} p(0,x)\ \mu(dx) + \int_{\tau_1^{-1}(A)\cap U_2} p(1,x)\ \mu(dx) \\
&= \int_{\tau_0^{-1}(A)\cap U_1} 1\ \mu(dx) + \int_{\tau_1^{-1}(A)\cap U_1} 0\ \mu(dx) \\
&\quad + \int_{\tau_0^{-1}(A)\cap U_2} \frac{1}{2}\ \mu(dx) + \int_{\tau_1^{-1}(A)\cap U_2} \frac{1}{2}\ \mu(dx) \\
&= \mu(\tau_0^{-1}(A) \cap U_1) + \frac{1}{2} \cdot \mu(\tau_0^{-1}(A) \cap U_2) + \frac{1}{2} \cdot \mu(\tau_1^{-1}(A) \cap U_2). \qquad (1)
\end{aligned}
$$

4 Conclusie

We hebben aangetoond dat de uitgebreide alternerende Lüroth transformatie op $[-1, 1]$ een invariante maat μ heeft die absoluut continu is met betrekking tot de Lebesgue-maat. Bovendien weten we dat μ de specifieke vorm van (1) heeft. Er kan verder onderzocht worden of de uitgebreide alternerende Lüroth transformatie ergodisch is. Hiervoor is waarschijnlijk de ergodiciteit van de alternerende Lüroth tranformatie zoals bewezen in Stelling 2.15 van belang. Indien dit het geval is kan er gekeken worden naar eigenschappen die een rol spelen in de ergodentheorie.

Referenties

[BBDK96] Jose Barrionuevo, Robert M. Burton, Karma Dajani, and Cor Kraaikamp. Ergodic properties of generalized Lüroth series. *Acta Arith.*, 74(4):311–327, 1996.

[CWZ13] Chunyun Cao, Jun Wu, and Zhenliang Zhang. The efficiency of approximating real numbers by Lüroth expansion. *Czechoslovak Math. J.*, 63(138)(2):497–513, 2013.

[DD08] Karma Dajani and Sjoerd Dirksin. *A Simple Introduction to Ergodic Theory: Lecture Notes*, December 2008.
Available: http://www.staff.science.uu.nl/∼kraai101/lecturenotes2009.pdf.

[Ino12] Tomoki Inoue. Invariant measures for position dependent random maps with continuous random parameters. *Studia Math.*, 208(1):11–29, 2012.

[IS13] Marius Iosifescu and Gabriela Ileana Sebe. On Gauss problem for the Lüroth expansion. *Indag. Math. (N.S.)*, 24(2):382–390, 2013.

[KKK91] Sofia Kalpazidou, Arnold Knopfmacher, and John Knopfmacher. Metric properties of alternating Lüroth series. *Portugal. Math.*, 48(3):319–325, 1991.

[Lür83] Jacob Lüroth. Ueber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe. *Math. Ann.*, 21(3):411–423, 1883.

[SF11] Luming Shen and Kui Fang. The fractional dimensional theory in Lüroth expansion. *Czechoslovak Math. J.*, 61(136)(3):795–807, 2011.