F. P. Bos

Een duivelse trap tussen β-ontwikkelingen en λ-kettingbreuken

Bachelorscriptie

Scriptiebegeleider: dr. C. C. C. J. Kalle

Datum Bachelorexamen: 16 juli 2016

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding **2**

2 Constructie van ϕ_λ **5**

2.1 Dynamische systemen 5

2.2 β-ontwikkelingen 5

2.3 λ-kettingbreuken 8

2.4 De afbeeldingen $\lambda \mapsto \beta(\lambda)$ en ϕ_λ 11

3 Singulariteit van ϕ_λ **12**

3.1 Maattheoretische definities en stellingen 12

3.2 Bewijs van het hoofdresultaat 15

4 Conclusie **19**

Bibliografie **20**

1 Inleiding

Een afbeelding $f : I \to \mathbb{R}$ van een interval I naar de reële getallen $\mathbb{R}$ vertoont soms fijne structuren zoals constantheid, strikte stijging, continuïteit, absolute continuïteit of differentieerbaarheid. Aan de grenzen van zulke structuren bevinden zich interessante, vaak tegenintuïtieve afbeeldingen. In deze scriptie bewijzen we de *singulariteit* van een afbeelding.

Zij I een (open, gesloten, halfopen, begrensd, onbegrensd) interval van $\mathbb{R}$. Een afbeelding $f : I \to \mathbb{R}$ heet *singulier* als aan de volgende eisen voldaan wordt:

- f is monotoon op I,
- f is niet constant,
- f is continu op I,
- $f'(x) = 0$ voor Lebesgue-bijna alle $x \in I$.

Men kan zich allereerst afvragen of er wel zo'n functie bestaat. Het antwoord hierop is positief. We geven twee voorbeelden: De *Cantorfunctie* en *Minkowski's vraagtekenfunctie*.

In 1883 introduceerde de Duitse wiskundige George Cantor (1845-1918), nota bene in een voetnoot, een verzameling die nu de *Cantorverzameling* wordt genoemd:

> "Als ein Beispiel einer perfekten Punktmenge, die in keinem noch so kleinen Intervall überall dicht ist, führe ich den Inbegriff aller reellen Zahlen an, die in der Formel
>
> $$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + ... + \frac{c_v}{3^v} + ...$$
>
> enthalten sind, wo die Koeffizienten c_v nach Belieben die beiden Werte 0 und 2 anzunehmen haben und die Reihe sowohl aus einer endlichen, wie aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern bestehen kann."
>
> [Can83, p. 194], zie ook [Got80, p. 207]

De Cantorverzameling C is dus de verzameling van reële getallen in $[0, 1]$ die een basis-3-ontwikkeling zonder 1 hebben:

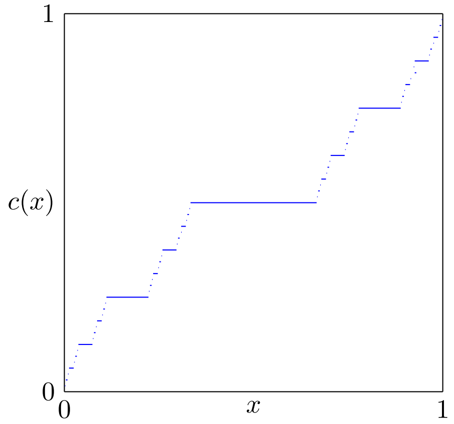
$$C := \{z = \sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{3^n} : c_n \in \{0, 2\}\}.$$

In 1884 gebruikte Cantor zijn verzameling voor het definiëren van een afbeelding, die later bekend is geworden als de Cantorfunctie ([Can84], zie ook [Got80, p. 256]). De Cantorfunctie is de afbeelding $c : [0, 1] \to [0, 1]$ gegeven door $x \mapsto c(x)$, waarbij $c(x)$ als volgt gevonden wordt:

- Schrijf x in basis-3-ontwikkeling[1] $(x_n)_{n\geq 1} \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}_{\geq 1}}$, dus zodanig dat $x = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{3^n}$.
- Als $(x_n)_{n\geq 1}$ een 1 bevat, vervang dan na de eerste 1 alles door 0.
- Vervang elke 2 door een 1.
- Interpreteer de zo verkregen rij $(\tilde{x}_n)_{n\geq 1} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_{\geq 1}}$ als een basis-2-ontwikkeling: Neem

$$c(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\tilde{x}_n}{2^n}.$$

[1] Een opgave voor de lezer is te bewijzen dat het niet uitmaakt welke basis-3-ontwikkeling van x men kiest.



Figuur 1: Grafiek van de Cantorfunctie.

De Cantorfunctie is stijgend en continu op $[0,1]$, maar niet constant. De Cantorfunctie c heeft overal afgeleide 0, behalve op de Cantorverzameling C. De afgeleide is Lebesgue-bijna overal 0, want C heeft Lebesgue-maat 0. Zodoende is de Cantorfunctie singulier. Omdat de Cantorfunctie 'bijna nergens' stijgt, is hij ook wel bekend onder de naam 'duivelse trap' ('devil's staircase'). Zie [DMRV06] voor een uitgebreid overzicht van de eigenschappen van de Cantorfunctie.

Een ander voorbeeld van een singuliere functie is Minkowski's vraagtekenfunctie. Dat is de functie $? : [0,1] \to [0,1]$ gegeven door

$$?(x) = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3-1}} - ...$$

voor alle $x \in [0,1]$, waarbij $(a_n)_{n\geq 1}$ een eindige of oneindige rij is met $a_n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ voor alle $n \geq 1$ en zodanig dat $(a_n)_{n\geq 1}$ een reguliere kettingbreukontwikkeling[2] van x is, dat wil zeggen

$$x = [0; a_1, a_2, ...] := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}.$$

Minkowski's vraagtekenfunctie is niet alleen singulier, maar bovendien strikt stijgend. Daarom is hij ook wel bekend onder de naam 'glibberige duivelse trap' ('slippery devil's staircase'). Zie [Sal43] voor een uitgebreid overzicht van de eigenschappen van Minkowski's vraagtekenfunctie.

Zoals we hierboven hebben gezien ontstaat de Cantorfunctie als relatie tussen basis-3- en basis-2-ontwikkelingen, en Minkowski's vraagtekenfunctie als relatie tussen reguliere kettingbreukontwikkelingen en een variant op basis-2-ontwikkelingen. In deze scriptie bekijken we twee andere getalsontwikkelingen: λ-kettingbreukontwikkelingen en basis-β-ontwikkelingen.

Een λ-kettingbreuk is een uitdrukkingen van de vorm

$$x = [a_0; a_1, a_2, ...]_\lambda := \lambda a_0 + \cfrac{1}{\lambda a_1 + \cfrac{1}{\lambda a_2 + \ddots}}$$

[2]Een opgave voor de lezer is te bewijzen dat het niet uitmaakt welke reguliere kettingbreukontwikkeling van x men kiest. Irrationale x hebben een oneindige unieke reguliere kettingbreukontwikkeling. Rationale x hebben twee ongelijke eindige reguliere kettingbreukontwikkelingen: $[0; a_1, ..., a_n] = [0; a_1, ..., a_n - 1, 1]$.

voor een parameter $\lambda \in (0,2)$ en een eindige of oneindige rij $(a_n)_{n\geq 0}$ waarvoor $a_0 \in \mathbb{Z}$ en $a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ voor alle $n \geq 1$. Deze λ-kettingbreuken zijn geïntroduceerd in [Ros54]. Voor elke λ is elk reëel getal te schrijven als een λ-kettingbreuk. Deze λ-kettingbreukontwikkeling is over het algemeen niet uniek. In deze scriptie kijken we naar λ-kettingbreuken waar $\lambda = \lambda_k := 2\cos(\pi/k)$ en $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

Een β-ontwikkeling is generalisatie van geheeltallige ontwikkelingen, zoals basis-2-, basis-3- en basis-10-ontwikkelingen. Het is een uitdrukking van de vorm

$$x = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\beta^n}$$

voor een parameter $\beta \in (1,\infty)$ en een eindige of oneindige rij $(a_n)_{n\geq 1}$ waarbij $a_n \in \{0, ..., \lceil\beta\rceil - 1\}$ voor alle $n \geq 1$. Met $\lceil\beta\rceil$ bedoelen we het kleinste gehele getal groter dan β, dus $\beta \leq \lceil\beta\rceil < \beta + 1$. Deze β-ontwikkelingen zijn geïntroduceerd in [Rén57]. Voor elke β heeft elk reëel getal in $[0,1)$ een β-ontwikkeling. Deze β-ontwikkelingen is niet per se uniek. Voor $\beta = 10$ representeren de rijen $(5,0,0,0,...)$ en $(4,9,9,9,...)$ beide het getal $x = 1/2$. Voor niet-geheeltallige β kunnen zelfs twee eindige ontwikkelingen hetzelfde getal representeren: Voor $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, de gulden snede, wordt β^{-1} bijvoorbeeld gerepresenteerd door de eindige rijen (1) en $(0,1,1)$, omdat $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3}$.

In [JRD11] worden λ-kettingbreuken en β-ontwikkelingen verder onderzocht. [JRD11] geeft een methode om, gegeven een $\lambda \in (0,2)$, de λ-kettingbreukontwikkeling van een getal $x \in [0,\infty)$ te vinden. Deze methode maakt dus een keuze voor de ontwikkeling van x (want de ontwikkeling is over het algemeen niet uniek). Ook bespreekt [JRD11] het *greedy-algorithm* voor het vinden van een β-ontwikkeling van een getal $t \in [0,1)$. Ook hier wordt dus een keuze gemaakt voor de ontwikkeling van x. Niet alle mogelijk rijen worden op deze manier gevonden als λ-kettingbreukontwikkeling of β-ontwikkeling. Door de λ-kettingbreukontwikkeling op een alternatieve manier te schrijven, blijkt er een sterk verband tussen de twee ontwikkelingen: Voor elke λ bestaat er een unieke β zodat de rijruimtes van λ-kettingbreukontwikkelingen en β-ontwikkelingen gelijk zijn. Door de λ-kettingbreukontwikkeling te interpreteren als β-ontwikkeling, verkrijgen we de afbeelding ϕ_λ. De afbeelding ϕ_λ is dus net zoals de Cantorfunctie en Minkowski's vraagtekenfunctie een relatie tussen getalsonwikkelingen. In deze scriptie bewijzen we de volgende stelling:

Hoofdresultaat. De afbeelding ϕ_λ is singulier voor $\lambda = \lambda_k := 2\cos(\pi/k)$ en $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

Het bewijs dat ϕ_{λ_k} singulier is vertoont overeenkomsten met [Arr15]. Hier wordt de singulariteit van de afbeelding $?_\alpha$, een verband tussen reguliere kettingbreukontwikkelingen en α-Lüroth-ontwikkelingen, bewezen. [Arr15] gebruikt de stelling dat twee ergodische kansmaten gelijk of onderling singulier zijn. In deze scriptie werken we echter met oneindige maten. We hebben de stelling daarom gegeneraliseerd. Het resultaat is Stelling 3.4, die zegt dat twee ergodisch maten (niet noodzakelijk kansmaten) equivalent of onderling singulier zijn.

De rest van deze scriptie is als volgt opgebouwd: Om het hoofdresultaat te bewijzen construeren we de afbeelding ϕ_λ in Hoofdstuk 2 door β-ontwikkelingen en λ-kettingbreuken te beschrijven via dynamische systemen. In Hoofdstuk 3 geven we enkele maattheoretische definities en stellingen, om ten slotte met Stelling 3.15 het hoofdresultaat te bewijzen.

Verder gebruiken we $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$.

2 Constructie van ϕ_λ

In Hoofdstuk 2 construeren we de afbeelding ϕ_λ. Hiervoor beschrijven we eerst in Paragraaf 2.1 dynamische systemen, banen en baancoderingen in de meest algemene vorm. In Paragraaf 2.2 en 2.3 beschrijven we twee dynamische systemen waarvan de baancoderingen verband houden met respectievelijk β-ontwikkelingen en λ-kettingbreuken. Uit Stelling 2.6 van Paragraaf 2.4 construeren we de afbeelding ϕ_λ.

2.1 Dynamische systemen

Zij X een verzameling. Een *transformatie op* X is een afbeelding $T : X \to X$. Een paar (X, T) met X een verzameling en T een transformatie op X heet een *dynamisch systeem.*

Zij (X, T) een dynamisch systeem. De *baan* van een element $x \in X$ is het rijtje

$$xT(x)T^2(x)... := (x, T(x), T^2(x), ...) = (T^n(x))_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}}.$$

Met een partitie $X = \dot{\bigcup}_{i\in I} X_i$ met indexverzameling I kan men voor elke $n \geq 0$ kijken in welk deel van de partitie de n-de iteratie van T op x ligt. Door de index van dit deel van de partitie te onthouden *codeert* men de baan van x:

$$x_0x_1x_2... := (x_0, x_1, x_2, ...) = (x_n)_{n\geq 0} \in I^{\mathbb{N}}$$

zodanig dat $T^n(x) \in X_{x_n}$ voor alle $n \geq 0$.

Zij (X, T) en (Y, S) twee dynamische systemen. Een afbeelding $\phi : X \to Y$ waarvoor het diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \phi\downarrow & & \downarrow\phi \\ Y & \xrightarrow{S} & Y \end{array}$$

commuteert, dat wil zeggen $\phi \circ T = S \circ \phi$, heet een *conjugatie van* (X, T) *naar* (Y, S).

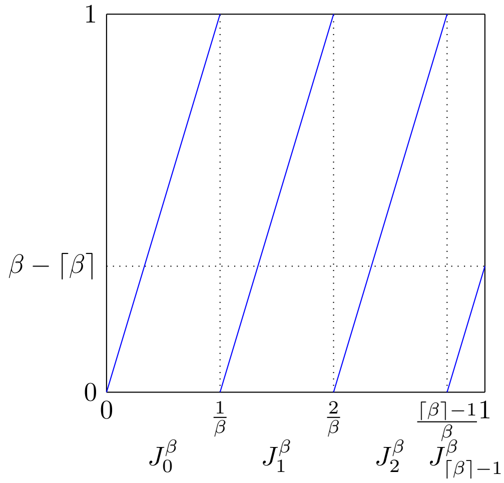
Voor juiste keuzes van X, T, X_i en I is er een verband tussen de codering van de baan van een element $x \in X$ en een β-onwikkeling of λ-kettingbreukontwikkeling van x.

2.2 β-ontwikkelingen

Zoals we in de inleiding hebben gezien, zijn β-ontwikkelingen een veralgemenisering van basis-n-ontwikkelingen voor een positief geheel getal n. Een β-ontwikkeling van een reëel getal kan gevonden worden via een eenvoudig dynamisch systeem, dat we nu zullen bespreken. Zij $\beta \in (1, \infty)$ een parameter (ook wel *grondtal*, *basis* of *radix*). Beschouw het interval $[0, 1)$ en de transformatie $S_\beta : [0, 1) \to [0, 1)$ gegeven door $t \mapsto \beta t \mod 1$. Partitioneer $[0, 1)$ als volgt:

$$J_0^\beta := \left[0, \frac{1}{\beta}\right), J_1^\beta := \left[\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}\right), ..., J_{\lceil\beta\rceil-2}^\beta := \left[\frac{\lceil\beta\rceil - 2}{\beta}, \frac{\lceil\beta\rceil - 1}{\beta}\right), J_{\lceil\beta\rceil-1}^\beta := \left[\frac{\lceil\beta\rceil - 1}{\beta}, 1\right)$$

met indexverzameling $J = J_\beta := \{0, ..., \lceil\beta\rceil - 1\}$. Met $\lceil\beta\rceil$ bedoelen we het kleinste gehele getal groter dan β: $\beta \leq \lceil\beta\rceil < \beta + 1$. Dan is $\lceil\beta\rceil - 1$ het grootste gehele getal strikt kleiner dan β. Zie Figuur 2.



Figuur 2: Grafiek van S_β voor $\beta = \frac{10}{3}$.

We coderen de baan van een element $t \in [0, 1)$ als

$$\mathcal{O}_\beta(t) = t_0 t_1 t_2 ... \in J^{\mathbb{N}}$$

zodanig dat $S_\beta^n(t) \in J_{t_n}^\beta$ voor alle $n \geq 0$.

Stelling 2.1. Zij $t \in [0, 1)$ en $\mathcal{O}_\beta(t) = (t_n)_{n \geq 0}$. Dan geldt

$$t = \sum_{n \geq 0} \frac{t_n}{\beta^{n+1}}.$$

Bewijs. De rij $\mathcal{O}_\beta(t) = \{t_n\}_{n \geq 0}$ is precies zo gedefinieerd dat

$$S_\beta(t) = \beta t - t_0,$$
$$S_\beta^{n+1}(t) = \beta S_\beta^n(t) - t_n$$

voor alle $n \geq 1$. Er geldt dus

$$t = \frac{t_0 + S_\beta(t)}{\beta} = \frac{t_0}{\beta} + \frac{S_\beta(t)}{\beta},$$
$$S_\beta^n(t) = \frac{t_n + S_\beta^{n+1}(t)}{\beta} = \frac{t_n}{\beta} + \frac{S_\beta^{n+1}(t)}{\beta}$$

voor alle $n \geq 1$. Hieruit volgt dat

$$t = \frac{t_0}{\beta} + \frac{S_\beta(t)}{\beta} = \frac{t_0}{\beta} + \frac{t_1}{\beta^2} + \frac{S_\beta^2(t)}{\beta^2} = ... = \frac{t_0}{\beta} + \frac{t_1}{\beta^2} + ... + \frac{t_n}{\beta^{n+1}} + \frac{S_\beta^{n+1}(t)}{\beta^{n+1}}$$

voor alle $n \geq 1$. Omdat $S_\beta^{n+1}(t) \in [0, 1)$ voor alle $n \geq 1$ en $\beta > 1$, geldt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_\beta^{n+1}(t)}{\beta^{n+1}} = 0,$$

en dus

$$t = \frac{t_0}{\beta} + \frac{t_1}{\beta^2} + ... + \frac{t_n}{\beta^{n+1}} + ... = \sum_{n \geq 0} \frac{t_n}{\beta^{n+1}}. \qquad \square$$

We noemen $(t_n)_{n\geq 0}$ de *β-ontwikkeling van t (via transformatie S_β).*

Het gedrag van $\mathcal{O}_\beta(t)$ voor $t \to 1$ geeft aan welke rijtjes in $J^{\mathbb{N}}$ een β-ontwikkeling van een $t \in [0,1)$ zijn. Orden daarvoor $J^{\mathbb{N}}$ lexicografisch door $\prec$ en voer een natuurlijke afstandsfunctie (metriek) d in. Dat wil zeggen dat voor alle $x = x_0x_1x_2..., y = y_0y_1y_2... \in J^{\mathbb{N}}$ geldt

$$x \prec y \Leftrightarrow \exists n \geq 0 : \forall m < n, x_m = y_m \text{ en } x_n < y_n.$$

Als afstandsfunctie nemen we bijvoorbeeld

$$d(x,y) := \frac{1}{2^{\min\{n \geq 0 : x_n \neq y_n\}}}$$

voor alle $x \neq y$ en $d(x,x) = 0$ voor alle x. De rijtjesverzameling $J^{\mathbb{N}}$ wordt hiermee een volledige topologische ruimte. Omdat de afbeelding $t \mapsto \mathcal{O}_\beta(t)$ strikt stijgend is [zie bijvoorbeeld JRD11, p. 13], en begrensd door het maximum $(\lceil\beta\rceil - 1)(\lceil\beta\rceil - 1)(\lceil\beta\rceil - 1)...$ van $J^{\mathbb{N}}$, bestaat de limiet

$$\mathcal{O}_\beta(1) := \lim_{t \to 1} \mathcal{O}_\beta(t).$$

De volgende stelling geeft aan hoe $\mathcal{O}_\beta(1)$ bepaalt welke rijtjes in $J^{\mathbb{N}}$ een β-ontwikkeling van een $t \in [0,1)$ zijn.

Stelling 2.2 ([Par60, Stelling 3]). Als $(a_n)_{n\geq 0} \in J^{\mathbb{N}}$ voor alle $n \geq 0$ voldoet aan

$$a_n a_{n+1} a_{n+2} ... \prec \mathcal{O}_\beta(1), \tag{1}$$

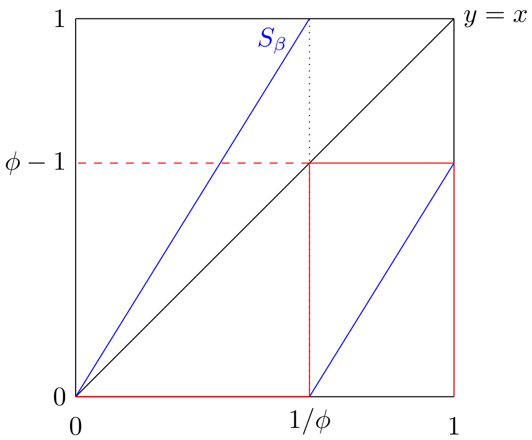
dan bestaat er een $t \in [0,1)$ met $\mathcal{O}_\beta(t) = a_0a_1a_2....$ $\square$

Het omgekeerde van de stelling is ook waar. Een $t \in [0,1)$ heeft per definitie ontwikkeling $\mathcal{O}_\beta(t) = t_0t_1t_2... \prec \mathcal{O}_\beta(1)$, en voor alle $n \geq 0$ geldt $t_nt_{n+1}t_{n+2}... = \mathcal{O}_\beta(S^n_\beta(t)) \prec \mathcal{O}_\beta(1)$.

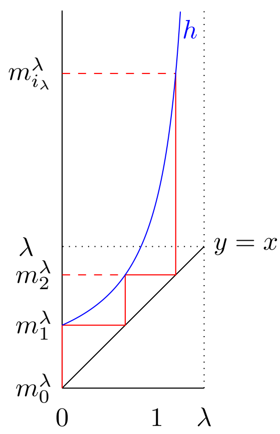
Voorbeeld 2.3. Zij $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ de gulden snede. Dan geldt $J = \{0,1\}$ en $\mathcal{O}_\beta(1) = 11\overline{0} = 11000...$ en

$$\{\mathcal{O}_\beta(t) : t \in [0,1)\} = \{(a_n)_{n\geq 0} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : (\forall n \geq 0 : a_n a_{n_1} a_{n+2}... \prec 11\overline{0})\}.$$

De β-ontwikkelingen voor $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ zijn dus de rijtjes in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die nooit twee enen achter elkaar hebben staan. Zie Figuur 3.



Figuur 3: Voor $\beta = (1+\sqrt{5})/2$ geldt $\mathcal{O}_\beta(1) = 11\overline{0}$. Voor $\beta = (1+\sqrt{5})/2$ heeft een β-ontwikkeling dus nooit twee enen achter elkaar.



Figuur 4: De waarden van m^λ_i worden gevonden door, beginnend in de startwaarde $m^\lambda_0 = 0$, steeds te 'weerkaatsen' in h en in de lijn $y = x$. Omdat h strikt stijgend en onbegrensd is op $[0, \lambda)$, en volledig boven de lijn $y = x$ ligt, is de rij (m^λ_i) stikt stijgend en eindig. $(\lambda = \frac{3}{2})$

2.3 λ-kettingbreuken

Zoals we in de Inleiding hebben gezien, is een λ-kettingbreuk een uitdrukking van de vorm

$$x = [a_0; a_1, a_2, ...]_\lambda := \lambda a_0 + \cfrac{1}{\lambda a_1 + \cfrac{1}{\lambda a_2 + \ddots}}$$

met $\lambda \in (0, 2)$ een parameter. We bespreken nu een dynamisch systeem, zoals beschreven in [JRD11], waarvan de baancoderingen verband houden met λ-kettingbreuken. Zij $\lambda \in (0, 2)$ een parameter. Beschouw het interval $[0, \infty)$. Definieer $h(y) := \frac{1}{\lambda - y}$ en de punten $m^\lambda_0 := 0$, $m^\lambda_1 := h(m^\lambda_0)$ en, zolang $m^\lambda_i < \lambda$, $m^\lambda_{i+1} := h(m^\lambda_i)$.

Stelling 2.4. De rij (m^λ_i) is stikt stijgend en eindig.

Bewijs. De afbeelding h is stikt stijgend op $[0, \lambda)$, want de afgeleide $h'(y) = \frac{1}{(\lambda - y)^2} > 0$ voor alle $y \in [0, \lambda)$. Bovendien heeft h geen dekpunten op $[0, \lambda)$: Uit $\frac{1}{\lambda - y} = y$ volgt dat $y^2 - \lambda y + 1 = 0$, maar deze vergelijking heeft geen reële oplossing. Merk op dat $m^\lambda_1 = \frac{1}{\lambda} > 0 = m^\lambda_0$. Als $\frac{1}{\lambda} \geq \lambda$, dan zijn we klaar. Stel $\frac{1}{\lambda} < \lambda$. Omdat h stikt stijgend is op $[0, \lambda)$ geldt $h(m^\lambda_1) > h(m^\lambda_0)$, oftewel $m^\lambda_2 > m^\lambda_1$. Met volledige inductie volgt dat $m^\lambda_{i+1} > m^\lambda_i$ voor alle i met $m^\lambda_i < \lambda$. De rij (m^λ_i) is dus stikt stijgend. De rij (m^λ_i) is tevens begrensd door λ (met uitzondering van eventueel het laatste element), dus (m^λ_i) is oneindig en convergeert naar een limiet kleiner dan λ, of (m^λ_i) is eindig. Stel dat (m^λ_i) convergeert naar limietwaarde $m \leq \lambda$. Dat wil zeggen dat $\lim_{i\to\infty} m^\lambda_i = m$. Als $m < \lambda$, dan geldt $h(m) = h(\lim_{i\to\infty} m^\lambda_i) = \lim_{i\to\infty} h(m^\lambda_i) = \lim_{i\to\infty} m^\lambda_{i+1} = \lim_{i\to\infty} m^\lambda_i = m$, dus m is een dekpunt van h, een tegenspraak. Ook het geval $\lim_{i\to\infty} m^\lambda_i = m = \lambda$ leidt tot tegenspraak. Er geldt namelijk $\lim_{y\uparrow\lambda} h(y) = \infty$. Daaruit volgt dat $\lim_{i\to\infty} h(m^\lambda_i) = \infty$. Maar $\lim_{i\to\infty} h(m^\lambda_i) = \lim_{i\to\infty} m^\lambda_{i+1} = \lim_{i\to\infty} m^\lambda_i = m = \lambda$, een tegenspraak. Zie Figuur 4. $\square$

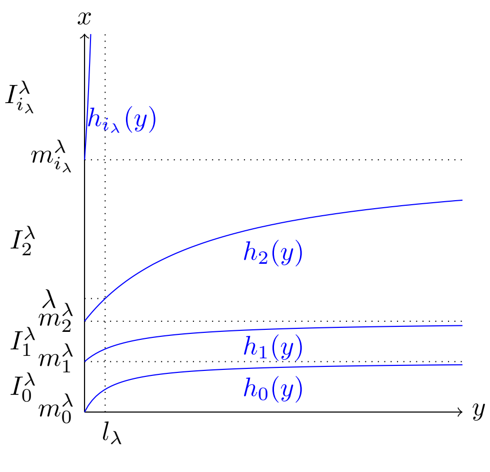
De grootste index van (m_i^λ) noemen we i_λ. Met de rij $(m_i^\lambda) = (m_i^\lambda)_{0\le i\le i_\lambda}$ partitioneren we $[0,\infty)$ als volgt:

$$I_0^\lambda := \left[m_0^\lambda, m_1^\lambda\right), I_1^\lambda := \left[m_1^\lambda, m_2^\lambda\right), ..., I_{i_\lambda-1}^\lambda := \left[m_{i_\lambda-1}^\lambda, m_{i_\lambda}^\lambda\right), I_{i_\lambda}^\lambda := \left[m_{i_\lambda}^\lambda, \infty\right),$$

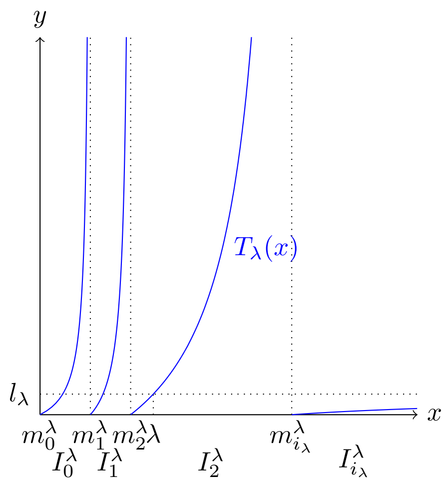
met indexverzameling $I = I_\lambda := \{0, ..., i_\lambda\}$. Definieer $h_0(y) := \frac{y}{\lambda y+1}$ en, zolang $i < i_\lambda$, $h_{i+1}(y) = h(h_i(y))$. Er geldt

$$h_i(0) = h^i(h_0(0)) = h^i(m_0^\lambda) = m_i^\lambda \text{ voor alle } i \in I,$$
$$\lim_{y\to\infty} h_i(y) = \lim_{y\to\infty} h^i(h_0(y)) = h^i(\lim_{y\to\infty} h_0(y)) = h^i(m_1^\lambda) = m_{i+1}^\lambda \text{ voor alle } i \in I\setminus\{i_\lambda\}.$$

Verder is h_0 strikt stijgend op $[0,\infty)$, want $h_0'(y) = \frac{1}{(\lambda y+1)^2} > 0$. Er geldt dus $h_0([0,\infty)) = [m_0^\lambda, m_1^\lambda)$. Omdat h strikt stijgend is op $[0,\lambda)$, vinden we met volledige inductie dat voor alle $i \in I\setminus\{i_\lambda\}$, h_i strikt stijgend is op $[0,\infty)$ en dat $h_i([0,\infty)) = [m_i^\lambda, m_{i+1}^\lambda)$. De eigenschappen van h_{i_λ} hangen af van de positie van $m_{i_\lambda}^\lambda$ ten opzichte van λ. Als $m_{i_\lambda}^\lambda > \lambda$, dan passeert $h_{i_\lambda-1}$ de waarde λ: Er is een unieke $l_\lambda \in [0,\infty)$ zo dat $h_{i_\lambda-1}(l_\lambda) = \lambda$. De functie h_{i_λ} is dan dus niet gedefinieerd op l_λ, en h_{i_λ} is strikt stijgend op $[0, l_\lambda)$ met $\lim_{y\to l_\lambda} h_{i_\lambda}(y) = \infty$. Als $m_{i_\lambda}^\lambda = \lambda$, definieer dan $l_\lambda := \infty$ en er volgt weer dat h_{i_λ} is strikt stijgend is op $[0, l_\lambda)$ met $\lim_{y\to l_\lambda} h_{i_\lambda}(y) = \infty$. Zie Figuur 5.



Figuur 5: Grafieken van h_i voor $\lambda = \frac{3}{2}$.



Figuur 6: Grafiek van T_λ voor $\lambda = \frac{3}{2}$.

We definiëren de transformatie $T_\lambda : [0,\infty) \to [0,\infty)$ door $x \mapsto h_i^{-1}(x)$ voor alle $x \in I_i^\lambda$ (voor alle $i \in I$). Zie Figuur 6.

We coderen de baan van een element $x \in [0,\infty)$ als

$$\omega_\lambda(x) = x_0x_1x_2... \in I^{\mathbb{N}}$$

zodanig dat $T_\lambda^n(x) \in I_{x_n}^\lambda$ voor alle $n \ge 0$.

Schrijf

$$\omega_\lambda(x) = x_0x_1x_2... = \underbrace{00...0}_{e_0 \text{ termen}}\ a_0\ \underbrace{00...0}_{e_1 \text{ termen}}\ a_1\ \underbrace{00...0}_{e_2 \text{ termen}}\ a_2... \quad (a_i \ne 0, e_i \ge 0). \tag{2}$$

In [JRD11, 3.3] wordt het volgende verband met λ-kettingbreuken aangetoond:

$$x = [\![\underbrace{e_0 + 1, 1, ..., 1}_{a_0 \text{ termen}}, \underbrace{e_1 + 2, 1, ..., 1}_{a_1 \text{ termen}}, \underbrace{e_2 + 2, 1, ..., 1}_{a_2 \text{ termen}}, ...]\!]_\lambda \tag{3}$$

voor alle $x \in [0, \infty)$, waarbij

$$[\![b_1, b_2, b_3, ...]\!]_\lambda := [0; b_1, -b_2, b_3, ...]_\lambda = \cfrac{1}{b_1\lambda - \cfrac{1}{b_2\lambda - \cfrac{1}{b_3\lambda - \ddots}}} \tag{4}$$

voor alle rijen natuurlijke getallen $(b_n)_{n\geq 1}$. In het geval dat $\omega_\lambda(x) = x_0x_1x_2...x_n000...$ zijn de rijen (e_i) en (a_i) van (2) eindig en zijn ook de uitdrukkingen in (3) en (4) eindig.

De transformatie T_λ houdt dus verband met λ-kettingbreuken, al is het verband niet zo duidelijk als bij de transformatie S_β. We noemen voor het gemak $(x_n)_{n\geq 0}$ de *λ-kettingbreukontwikkeling van x (via transformatie T_λ)*.

Het gedrag van $\omega_\lambda(x)$ voor $x \to \infty$ geeft aan welke rijtjes in $I^{\mathbb{N}}$ een λ-kettingbreuk van een $x \in [0, \infty)$ zijn. Op dezelfde wijze als bij $J^{\mathbb{N}}$ maken we van de rijtjesverzameling $I^{\mathbb{N}}$ een volledige topologische ruimte. Omdat de afbeelding $x \mapsto \omega_\lambda(x)$ strikt stijgend is ([JRD11, Lemma 2.2, Stelling 3.1]), en begrensd door het maximum $i_\lambda i_\lambda i_\lambda...$ van $I^{\mathbb{N}}$, bestaat de limiet

$$\omega_\lambda(\infty) := \lim_{x\to\infty} \omega_\lambda(x).$$

De volgende stelling geeft aan hoe $\omega_\lambda(\infty)$ bepaalt welke rijtjes in $I^{\mathbb{N}}$ een λ-kettingbreukontwikkeling van een $x \in [0, \infty)$ zijn.

Stelling 2.5 ([JRD11, Stelling 4.4]). Als $(a_n)_{n\geq 0} \in I^{\mathbb{N}}$ voor alle $n \geq 0$ voldoet aan

$$a_n a_{n+1} a_{n+2} ... \prec \omega_\lambda(\infty), \tag{5}$$

dan bestaat er een $x \in [0, \infty)$ met $\omega_\lambda(x) = a_0a_1a_2....$ $\square$

Het omgekeerde van de stelling is ook waar. Een $x \in [0, \infty)$ heeft per definitie ontwikkeling $\omega_\lambda(x) = x_0x_1x_2... \prec \omega_\lambda(\infty)$, en voor alle $n \geq 0$ geldt $x_nx_{n+1}x_{n+2}... = \omega_\lambda(T^n_\lambda(t)) \prec \omega_\lambda(\infty)$.

2.4 De afbeeldingen $\lambda \mapsto \beta(\lambda)$ en ϕ_λ

Merk op dat $\omega_\lambda(\infty)$ en $\mathcal{O}_\beta(1)$ op dezelfde wijze (Stelling 2.5 en 2.2) vastleggen welke rijtjes een λ-kettingbreukontwikkeling of β-ontwikkeling zijn van een $x \in [0,\infty)$ of $t \in [0,1)$. De natuurlijke vraag is of er paren (λ, β) zijn waarvoor $\omega_\lambda(\infty) = \mathcal{O}_\beta(1)$. Het antwoord wordt gegeven door de volgende stelling.

Stelling 2.6 ([JRD11, Propositie 2.6, Stelling 4.6, Stelling 4.8, Gevolg 4.22, 4.2.3]). Voor alle $\lambda \in (0,2)$ bestaat een unieke $\beta = \beta(\lambda) \in (1,\infty)$ met $\omega_\lambda(\infty) = \mathcal{O}_\beta(1)$. De afbeelding $\lambda \mapsto \beta(\lambda)$ is strikt stijgend, surjectief en continu, maar niet analytisch. Voor $\lambda = \lambda_k := 2\cos(\pi/k)$ en $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ geldt $\beta(\lambda) = k - 1$. $\square$

Omdat de afbeeldingen $x \mapsto \omega_\lambda(x)$ en $t \mapsto \mathcal{O}_\beta(t)$ strikt stijgend zijn, en surjectief naar de rijtjes die voldoen aan respectievelijk (5) en (1), bestaat er voor elke λ een strikt stijgende bijectie

$$\begin{aligned} \phi_\lambda : [0,\infty) &\to [0,1), \\ x &\mapsto t \end{aligned}$$

zodanig dat $\omega_\lambda(x) = \mathcal{O}_{\beta(\lambda)}(t)$. Het volgende diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd} x \in [0,\infty) \arrow[r, "T_\lambda"] \arrow[d, "\phi_\lambda"'] & T_\lambda(x) \in [0,\infty) \arrow[d, "\phi_\lambda"] \\ t \in [0,1) \arrow[r, "S_{\beta(\lambda)}"] & S_{\beta(\lambda)}(t) \in [0,1) \end{tikzcd}$$

De afbeelding ϕ_λ is dus een conjugatie van $([0,\infty), T_\lambda)$ naar $([0,1), S_{\beta(\lambda)})$.

Voor $\lambda = 1$ wordt ϕ_λ gegeven door [JRD11, p. 15]:

$$\phi_\lambda(x) = \phi_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}?(x), & \text{als } x \in [0,1], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}?\left(1 - \dfrac{1}{x}\right), & \text{als } x \in [1,\infty), \end{cases}$$

waarbij met $?(x)$ weer Minkowski's vraagtekenfunctie, geïntroduceerd in de Inleiding, wordt bedoeld. We weten dat Minkowski's vraagtekenfunctie singulier is. Omdat $1 - 1/x$ continu en strikt stijgend is, is $?(1 - 1/x)$ ook singulier. Vermenigvuldigen met een constante ongelijk aan 0 behoudt singulariteit, evenals een constante optellen, dus $?(x)/2$ en $1/2 + ?(1 - 1/x)/2$ zijn singulier. De continue aaneenschakeling van twee singuliere functie is ook weer singulier. We concluderen dat ϕ_1 singulier is.

In Hoofdstuk 3 wordt het hoofdresultaat van deze scriptie, dat ook voor alle $\lambda = \lambda_k := 2\cos(\pi/k)$ en $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ de afbeelding ϕ_λ singulier is, bewezen.

3 Singulariteit van ϕ_λ

In Hoofdstuk 3 wordt met Stelling 3.15 aangetoond dat de afbeelding ϕ_λ singulier is voor $\lambda = \lambda_k = 2\cos(\pi/k)$ en $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Daarvoor hebben we enkele definities en stellingen uit de maattheorie nodig. Deze behandelen we in Paragraaf 3.1. Enkele maattheoretische voorkennis is hierbij vereist. Deze vindt men bijvoorbeeld in [EW11, bijlage A]. In Paragraaf 3.2 bewijzen we het hoofdresultaat.

3.1 Maattheoretische definities en stellingen

We beginnen met enkele wat minder basale maattheoretische definities.

Vaak beschouwt men een maatruimte $(X, \mathcal{A})$ met een maat μ waarvoor $\mu(X) = 1$. Zulke maten heten *kansmaten*. In deze scriptie komen we ook maten tegen die geen kansmaten zijn. *Oneindige* maten zijn maten waarvoor $\mu(X) = \infty$. Oneindige maten heten *σ-eindig* als X een aftelbare vereniging van onderling disjuncte meetbare verzamelingen van eindige maat is.

Zij μ_1 en μ_2 twee maten op een meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$. Dan heet μ_1 *absoluut continu (t.o.v. μ_2)*, notatie $\mu_1 \ll \mu_2$, als elke nulverzameling van μ_2 een nulverzameling van μ_1 is. De twee maten heten *equivalent* als ze gelijke nulverzamelingen hebben, oftewel als elk van beide absoluut continu is t.o.v. de ander. Dit wordt genoteerd als $\mu_1 \ll \mu_2 \ll \mu_1$. De maten μ_1 en μ_2 heten *onderling singulier* als er een $A \in \mathcal{A}$ bestaat met $\mu_1(A) = 0$ en $\mu_2(A^c) = 0$. Met A^c bedoelen we het complement van A in X.

Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en T een meetbare transformatie op X. Dan heet T *niet-singulier voor* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ als voor alle $A \in \mathcal{A}$, $\mu(T^{-1}(A)) = 0$ dan en slechts dan als $\mu(A) = 0$. Als zelfs voor alle $A \in \mathcal{A}$, $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, dan heet T *maatbehoudend voor* $(X, \mathcal{A}, \mu)$. We zeggen ook wel dat μ invariant is voor $(X, \mathcal{A}, T)$. Als voor alle $A \in \mathcal{A}$, $T^{-1}(A) = A$ impliceert dat $\mu(A) = 0$ of $\mu(A^c) = 0$, dan heet T *ergodisch voor* $(X, \mathcal{A}, \mu)$. In een *ergodisch maatbehoudend dynamisch systeem* (een kansruimte met een ergodische maatbehoudende transformatie) is het tijdgemiddelde bijna overal gelijk aan het ruimtegemiddelde ("Birkhoff's Ergodic Theorem", zie bijvoorbeeld [Aar97, Stelling 2.2.6]).

Een *standaard maatruimte* is een maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ waar X een complete, separabele metrische ruimte is en $\mathcal{A}$ de σ-algebra voortgebracht door de open verzamelingen van X is.

Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een standaard maatruimte en T een meetbare transformatie op X. Als voor alle $A \in \mathcal{A}$ met $\mu(A) > 0$ er een $n \geq 1$ bestaat zodanig dat $\mu(A \cap T^{-n}(A)) > 0$, dan heet T *conservatief voor* $(X, \mathcal{A}, \mu)$. In een conservatief dynamisch systemen keert elke meetbare verzameling van positieve maat na een aantal iteraties terug naar zichzelf: De doorsnijding heeft positieve maat. Zodoende keert elke meetbare verzameling van positieve maat oneindig vaak terug naar zichzelf. Elke maatbehoudende kansmaat is conservatief: Er is niet genoeg plek voor een meetbare verzameling van positieve maat om voortdurend te 'ontsnappen'. Conservativiteit is daarom alleen van belang bij oneindige maten.

Op $\mathbb{R}$ beschouwen we vaak de Borel-meetbare deelverzamelingen, die we noteren met $\mathcal{B}$, en de Borel-maat, die we noteren we met m. De Lebesgue-meetbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ noteren we met L, en de Lebesgue-maat m_L.

Nu geven we twee stellingen uit de maattheorie. De eerste stelling geeft een criterium voor conservativiteit.

Stelling 3.1 (Maharams Recurrentiestelling [Aar97, Stelling 1.1.7]). Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een σ-eindige standaard maatruimte en T een transformatie op X die maatbehoudend is voor $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Als er een $A \in \mathcal{A}$ bestaat met $\mu(A) \neq \infty$ en

$$\mu\left(\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}(A)\right)^c\right) = 0,$$

dan is T conservatief voor $(X, \mathcal{A}, \mu)$. □

De tweede stelling geeft aan dat onder bepaalde voorwaarden twee maten slechts een factor verschillen.

Stelling 3.2 (Uniciteit van invariante maten [Aar97, Stelling 1.5.6]). Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een standaard maatruimte en T een transformatie op X die conservatief, ergodisch en niet-singulier is voor $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Zij μ_1, μ_2 twee σ-eindige maten op $(X, \mathcal{A})$ met $\mu_1 \ll \mu$ en $\mu_2 \ll \mu$ en zodanig dat T maatbehoudend is voor $(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ en voor $(X, \mathcal{A}, \mu_2)$. Dan geldt $\mu_1 = c\mu_2$ voor een $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. □

De volgende stelling zegt dat ergodische kansmaten gelijk of onderling singulier zijn.

Stelling 3.3 (Gelijkheid of singulariteit van invariante maten [DD08, Stelling 2.1.2]). Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte en μ_1 en μ_2 twee kansmaten op $(X, \mathcal{A})$ en zij T een transformatie op X die ergodisch en maatbehoudend is voor zowel $(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ als $(X, \mathcal{A}, \mu_2)$. Dan geldt $\mu_1 = \mu_2$ of μ_1 en μ_2 zijn onderling singulier. □

In deze scriptie werken we met oneindige maten en willen we een soortgelijke stelling als Stelling 3.3 toepassen. We laten daarom de aanname dat de maten *kans*maten zijn weg. Ergodische maten blijken equivalent of onderling singulier te zijn.

Stelling 3.4 (Equivalentie of singulariteit van invariante maten). Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte en μ_1 en μ_2 twee maten op $(X, \mathcal{A})$ en zij T een transformatie op X die ergodisch en maatbehoudend is voor zowel $(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ als $(X, \mathcal{A}, \mu_2)$. Dan geldt $\mu_1 \ll \mu_2 \ll \mu_1$ of μ_1 en μ_2 zijn onderling singulier.

Bewijs. Stel μ_1 en μ_2 zijn niet equivalent. Dan bestaat er (z.v.v.a.) een $A \in \mathcal{A}$ met $\mu_1(A) = 0$ en $\mu_2(A) > 0$. Definieer $B := \bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}(A)$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
B &= A \cup T^{-1}(A) \cup T^{-2}(A) \cup T^{-3}(A) \cup ..., \\
T^{-1}(B) &= \phantom{A \cup{}} T^{-1}(A) \cup T^{-2}(A) \cup T^{-3}(A) \cup ..., \\
T^{-2}(B) &= \phantom{A \cup T^{-1}(A) \cup{}} T^{-2}(A) \cup T^{-3}(A) \cup ..., \\
T^{-3}(B) &= \phantom{A \cup T^{-1}(A) \cup T^{-2}(A) \cup{}} T^{-3}(A) \cup ..., \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definieer $C := \bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i}(B)$. Dan

$$\begin{aligned}
C &= B \cap T^{-1}(B) \cap T^{-2}(B) \cap ..., \\
T^{-1}(C) &= \phantom{B \cap{}} T^{-1}(B) \cap T^{-2}(B) \cap ...,
\end{aligned}$$

en omdat

$$B \supseteq T^{-1}(B) \supseteq T^{-2}(B) \supseteq T^{-3}(B) \supseteq ... \tag{6}$$

geldt $C = T^{-1}(C)$. Dit is ook in te zien via de volgende equivalenties:

$$a \in C \Leftrightarrow \forall i \geq 0 \; \exists j \geq i : a \in T^{-j}(B) \Leftrightarrow \forall i \geq 1 \; \exists j \geq i : a \in T^{-j}(B) \Leftrightarrow a \in T^{-1}(C).$$

Verder geldt wegens de maatbehoudendheid van T dat

$$0 = \mu_1(A) = \mu_1(T^{-1}(A)) = \mu_1(T^{-2}(A)) = ...,$$

dus

$$0 = \mu_1(B) = \mu_1(T^{-1}(B)) = \mu_1(T^{-2}(B)) = ...,$$

dus

$$\mu_1(C) = 0.$$

Ook geldt

$$0 < \mu_2(A) = \mu_2(T^{-1}(A)) = \mu_2(T^{-2}(A)) = ...,$$

dus

$$0 < \mu_2(B) = \mu_2(T^{-1}(B)) = \mu_2(T^{-2}(B)) = ... \tag{7}$$

Omdat $T^{-1}(C) = C$, geldt wegens de ergodiciteit van T dat $\mu_2(C) = 0$ of $\mu_2(C^c) = 0$. Het geval $\mu_2(C) = 0$ is onmogelijk, want wegens (6) geldt

$$\begin{aligned} C &= B \cap T^{-1}(B) \cap T^{-2}(B) \cap ... \\ &= B \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}(B) \setminus T^{-(i+1)}(B) \right), \end{aligned}$$

en met (7) geldt voor alle $i \geq 0$ dat

$$\mu_2 \left(T^{-i}(B) \setminus T^{-(i+1)}(B) \right) = 0,$$

dus

$$\mu_2 \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}(B) \setminus T^{-(i+1)}(B) \right) = 0,$$

dus $\mu_2(C) = \mu_2(B) \neq 0$. Voor C geldt dus $\mu_1(C) = 0$ en $\mu_2(C^c) = 0$. □

Tenslotte volgen nog twee stellingen die betrekking hebben op reële functies.

Stelling 3.5 (Differentieerbaarheid van monotone functies, [Rub63, Lemma 1]). Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue, stijgende functie, dan bestaat $f'(x)$ voor Lebesgue-bijna alle $x \in [a, b]$. □

Gevolg 3.6. Zij $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ een continue, stijgende functie, dan bestaat $f'(x)$ voor Lebesgue-bijna alle $x \in [a, \infty)$. □

Stelling 3.7 (Stelling van singuliere functies, [Leo09, Stelling 3.72]). Zij I een (open, gesloten, halfopen, begrensd, onbegrensd) interval van $\mathbb{R}$. Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een niet-constante functie waarvoor de afgeleide $f'(x)$ bestaat voor Lebesgue-bijna alle $x \in I$. Dan is f singulier dan en slechts dan als er een Lebesgue-meetbare deelverzameling $A \subseteq I$ bestaat met $m_L(A^c) = 0$ en $m_L(f(A)) = 0$ (herinner dat m_L de Lebesguemaat is). □

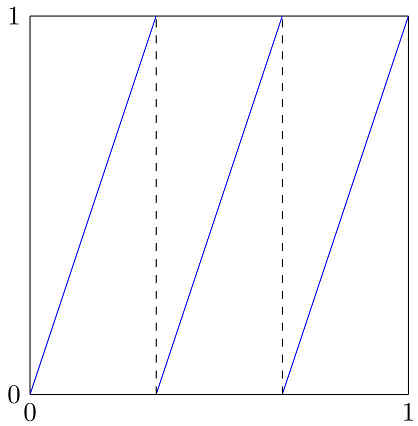
3.2 Bewijs van het hoofdresultaat

Via een aantal proposities zal worden aangetoond dat de afbeelding ϕ_λ voor $\lambda = \lambda_k := 2\cos(\pi/k)$ en $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ singulier is. Het bewijs lijkt op een bewijs van singulariteit in [Arr15]. Daar wordt echter eenvoudiger de onderlinge singulariteit van twee maten aangetoond met Stelling 3.3. Wij gebruiken Stelling 3.4, omdat we in deze scriptie te maken hebben met oneindige maten.

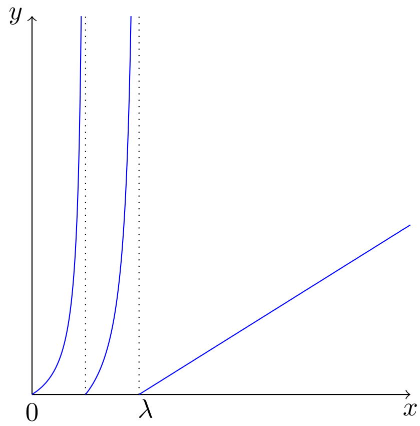
Beschouw $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, m_\infty)$ en $([0,1), \mathcal{B}_1, m_1)$ als standaard maatruimten, waarbij $\mathcal{B}_\infty$ en $\mathcal{B}_1$ de Borel-meetbare deelverzamelingen van respectievelijk $[0,\infty)$ en $[0,1)$ zijn, en m_∞ en m_1 de Borel-maten beperkt tot deze intervallen. We kiezen hier bewust voor Borel, en niet voor Lebesgue, omdat de Borel-meetbare deelverzamelingen worden voortgebracht door de open intervallen.

Neem vanaf nu aan dat $\lambda = \lambda_k := 2\cos(\pi/k)$ en $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ en $\beta = \beta(\lambda) = k-1$. We beginnen het bewijs van het hoofdresultaat met het vinden van invariante en ergodische maten voor S_β en T_λ.

Omdat β geheeltallig is, is de transformatie $S_\beta : [0,1) \to [0,1)$ een stuksgewijs lineaire afbeelding, waarvan ook de laatste tak van 0 naar 1 stijgt: $S_\beta(J_\beta^{k-2}) = S_\beta([\frac{k-2}{k-1}, 1)) = [0,1)$. Zie Figuur 7.



Figuur 7: Grafiek van S_β voor $\beta = 3$. De laatste tak van S_β is 'volledig': Hij stijgt van 0 naar 1.



Figuur 8: Grafiek van T_λ voor $\lambda = \lambda_4 = \sqrt{2}$. De laatste tak van T_λ is lineair en voldoet aan $T_\lambda(x) = x - \lambda$.

Propositie 3.8. De transformatie S_β is maatbehoudend en ergodisch voor $([0,1), \mathcal{B}_1, m_1)$.

Bewijs. Een bekend resultaat uit de ergodische theorie luidt dat maatbehoudendheid alleen op een voortbrengende verzameling deelverzamelingen hoeft te worden aangetoond (zie bijvoorbeeld [EW11, Stelling A.8] en [Hun11, Propositie 3.2]). De open intervallen van $[0,1)$ brengen $\mathcal{B}_1$ voort. Zij $(a,b) \subseteq [0,1)$ een open interval. Het inversebeeld van (a,b) is een eindige vereniging van open intervallen:

$$\begin{aligned} S_\beta^{-1}((a,b)) &= \left(\frac{a}{\beta}, \frac{b}{\beta}\right) \cup \left(\frac{a+1}{\beta}, \frac{b+1}{\beta}\right) \cup \ldots \cup \left(\frac{a+\lceil\beta\rceil-1}{\beta}, \frac{b+\lceil\beta\rceil-1}{\beta}\right) \\ &= \bigcup_{i=0,\ldots,\lceil\beta\rceil-1} \left(\frac{a+i}{\beta}, \frac{b+i}{\beta}\right) \end{aligned}$$

en deze intervallen zijn disjunct, want $(\frac{a+i}{\beta}, \frac{b+i}{\beta}) \subseteq J^i_\beta$. De maten van (a,b) en $S_\beta^{-1}((a,b))$ zijn gelijk:

$$\begin{aligned} m_1(\bigcup_{i=0,\dots,\lceil\beta\rceil-1}\left(\frac{a+i}{\beta}, \frac{b+i}{\beta}\right)) &= \sum_{i=0}^{\lceil\beta\rceil-1} m_1(\left(\frac{a+i}{\beta}, \frac{b+i}{\beta}\right)) \\ &= \sum_{i=0}^{\lceil\beta\rceil-1} \frac{b-a}{\beta} = b-a = m_1((a,b)). \end{aligned}$$

De derde gelijkheid berust op de geheeltalligheid van β. We concluderen dat S_β maatbehoudend is. De ergodiciteit van S_β wordt bewezen in [Rén57, p. 491]. $\square$

Voor het vinden van een invariante maat voor T_λ bewijzen we eerst dat T_λ een 'volledige' laatste tak heeft.

Propositie 3.9. Voor $\lambda = \lambda_k := 2\cos(\pi/k)$ en $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ geldt $m^\lambda_{i_\lambda} = \lambda$ en $T_\lambda(x) = x - \lambda$ voor alle $x \in I^\lambda_{i_\lambda}$.

Bewijs. Zij $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Uit [JRD11, Propositie 2.6] volgt dat $\lambda = \lambda_k$ de maximale waarde van λ is waarvoor $i_\lambda = k-2$. Zij $\beta = \beta(\lambda_k) = k-1$ de overeenkomende β. Omdat dan $\mathcal{O}_\beta(1) = (k-2)(k-2)(k-2)...$, geldt ook $\omega_\lambda(\infty) = (k-2)(k-2)(k-2)... = i_\lambda i_\lambda i_\lambda....$ Dit kan alleen als $m^\lambda_{i_\lambda} = \lambda$. Stel namelijk dat $m^\lambda_{i_\lambda} > \lambda$, dan stijgt de laatste tak van T_λ maar tot l_λ: Er geldt $\lim_{x\to\infty} T_\lambda(x) = l_\lambda < \infty$ (zie pagina 9). Schrijf $\omega_\lambda(l_\lambda) = a_1a_2a_3....$ Zij $x \in I^\lambda_{i_\lambda}$ en schrijf $\omega_\lambda(x) = x_0x_1x_2x_3....$ Omdat $T_\lambda(x) < l_\lambda$ geldt $x_1x_2x_3... \prec a_1a_2a_3....$ Omdat $\lim_{x\to\infty}\omega_\lambda(x) = \omega_\lambda(\infty) = i_\lambda i_\lambda i_\lambda...$, volgt dat dat $i_\lambda i_\lambda i_\lambda... \preceq a_1a_2a_3...$, dus $a_1a_2a_3... = i_\lambda i_\lambda i_\lambda....$ Tegenspraak, want er moet ook $a_1a_2a_3... \prec i_\lambda i_\lambda i_\lambda...$ gelden. Er geldt dus $m^\lambda_{i_\lambda} = \lambda$. Er volgt dat h_{i_λ} strikt stijgend is op $[0,\infty)$ en $\lim_{y\to\infty} h_{i_\lambda}(y) = \infty$. Zoals wordt besproken in [JRD11, 2.3] wordt h_{i_λ} gegeven door $y \mapsto \frac{ay+b}{cy+d}$ voor zekere $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ waarvoor $ad-bc = 1$. Omdat $h_{i_\lambda}(0) = \lambda$ en $\lim_{y\to\infty} h_{i_\lambda}(y) = \infty$ geldt $b/d = \lambda$, $c = 0$, $a > 0$, en dus $ad = 1$. Wegens vergelijking (1) in [JRD11, p. 6] geldt ook $a, d \leq 1$, dus $a = d = 1$ en $b = \lambda$. De functie h_{i_λ} wordt dus gegeven door $\frac{1y+\lambda}{0y+1} = y + \lambda$. De laatste tak van T_λ wordt dus gegeven door $T_\lambda(x) = x - \lambda$ voor alle $x \in I^\lambda_{i_\lambda} = [\lambda, \infty)$. Zie Figuur 8. $\square$

Definieer de maat m'_∞ door $m'_\infty := \int \frac{1}{x}\, dm_\infty$.

Propositie 3.10. De transformatie T_λ is ergodisch voor $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, m'_\infty)$.

Bewijs. We bewijzen dat T_λ ergodisch is voor $([0,\infty), L_\infty, (m_L)'_\infty)$, waarbij L_∞ de Lebesgue-meetbare deelverzamelingen van $[0,\infty)$ zijn en $(m_L)'_\infty := \int \frac{1}{x}\, d(m_L)_\infty$, waarbij $(m_L)_\infty$ de Lebesgue-maat beperkt tot $[0,\infty)$ is. Omdat $(m_L)'_\infty$ een uitbreiding is van m'_∞, volgt de ergodiciteit van T_λ voor m'_∞ uit de ergodiciteit van T_λ voor $(m_L)'_\infty$.

Er geldt $(m_L)'_\infty \ll (m_L)_\infty$ en T_λ is maatbehoudend voor $([0,\infty), L_\infty, (m_L)'_\infty)$ en $(m_L)'_\infty$ is uniek met deze eigenschappen (op vermenigvuldiging van een constante na) ([JRD11, 5.1]).

Zij $A \in L_\infty$ met $T_\lambda^{-1}(A) = A$ en stel $(m_L)'_\infty(A) \neq 0$ en $(m_L)'_\infty(A^c) \neq 0$. Definieer de maat

$$\nu(B) := 2(m_L)'_\infty(A \cap B) + 3(m_L)'_\infty(A^c \cap B)$$

voor alle $B \in L_\infty$. Het is eenvoudig te controleren dat ν inderdaad een maat is, en ν is absoluut continu t.o.v. $(m_L)_\infty$. Bovendien is ν invariant voor $([0,\infty), L_\infty, T_\lambda)$:

$$\begin{aligned}\nu(T_\lambda^{-1}(B)) &= 2(m_L)'_\infty(A \cap T_\lambda^{-1}(B)) + 3(m_L)'_\infty(A^c \cap T_\lambda^{-1}(B)) \\ &= 2(m_L)'_\infty(T_\lambda^{-1}(A \cap B)) + 3(m_L)'_\infty(T_\lambda^{-1}(A^c \cap B)) \\ &= 2(m_L)'_\infty(A \cap B) + 3(m_L)'_\infty(A^c \cap B) = \nu(B)\end{aligned}$$

voor alle $B \in L_\infty$, wegens $T_\lambda^{-1}(A) = A$ en de maatbehoudendheid van T_λ voor $(m_L)'_\infty$. De invariante absoluut continue maat ν is echter geen veelvoud van $(m_L)'_\infty$, want $\nu(A) = 2(m_L)'_\infty(A)$ en $\nu(A^c) = 3(m_L)'_\infty(A^c)$. Dit is in tegenspraak met de uniciteit van $(m_L)'_\infty$. □

Merk verder op dat $m'_\infty \ll m_\infty$. Ook is T_λ maatbehoudend is voor $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, m'_\infty)$. Dat volgt uit de maatbehoudendheid van T_λ voor $([0,\infty), L_\infty, (m_L)'_\infty)$ ([JRD11, 5.1]), en het feit dat T_λ meetbaar is voor $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty)$: Net als voor S_β in het bewijs van Propositie 3.8, is het inversebeeld van een open interval van $[0,\infty)$ een eindige vereniging van open intervallen.

De conjugatie $\phi_\lambda : [0,\infty) \to [0,1)$ is een continue en stijgende afbeelding van $[0,\infty)$ naar $[0,1)$, dus ϕ_λ beeldt intervallen af op intervallen. Dat geldt ook voor de inverse van ϕ_λ. De afbeelding ϕ_λ is daarom meetbaar van $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty)$ naar $([0,1), \mathcal{B}_1)$, en de inverse ϕ_λ^{-1} is meetbaar van $([0,1), \mathcal{B}_1)$ naar $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty)$. We definiëren de *pull-back*-maat:

$$\mu(B) := m_1(\phi_\lambda(B))$$

voor alle $B \in \mathcal{B}_\infty$. Deze definitie is gerechtvaardigd omdat ϕ_λ^{-1} meetbaar is, en het is eenvoudig na te gaan dat μ een maat op $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty)$ is. Daarmee is $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, \mu)$ een kansruimte, want $\mu([0,\infty)) = m_1(\phi_\lambda([0,\infty))) = m_1([0,1)) = 1$.

In de volgende twee proposities bewijzen we eigenschappen van T_λ ten opzichte van de maten μ en m'_∞.

Propositie 3.11. De transformatie T_λ is maatbehoudend en ergodisch voor $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, \mu)$.

Bewijs. Dit volgt direct uit de constructie van μ. Voor alle $B \in \mathcal{B}_\infty$ geldt wegens de maatbehoudendheid van S_β voor m_1 dat

$$\mu(B) = m_1(\phi_\lambda(B)) = m_1(S_\beta^{-1}(\phi_\lambda(B))) = m_1(\phi_\lambda(T_\lambda^{-1}(B))) = \mu(T_\lambda^{-1}(B)),$$

dus T_λ is maatbehoudend voor $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, \mu)$. Voor alle $B \in \mathcal{B}_\infty$ met $T_\lambda^{-1}(B) = B$ geldt

$$S_\beta^{-1}(\phi_\lambda(B)) = \phi_\lambda(T_\lambda^{-1}(B)) = \phi_\lambda(B).$$

Omdat S_β ergodisch is voor $([0,1), \mathcal{B}_1, m_1)$, geldt dan

$$m_1(\phi_\lambda(B)) = \mu(B) = 0 \text{ of } m_1(\phi_\lambda(B)^c) = m_1(\phi_\lambda(B^c)) = \mu(B^c) = 0,$$

dus T_λ is ergodisch voor $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, \mu)$. □

Propositie 3.12. De transformatie T_λ is conservatief voor $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, m'_\infty)$.

Bewijs. We gebruiken Maharams Recurentiestelling (Stelling 3.1). Merk op dat $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, m'_\infty)$ σ-eindig is, want $\{0\} \cup [1,2] \cup [\frac{1}{2},1] \cup [2,4] \cup [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \cup ... \cup [2^i, 2^{i+1}] \cup [2^{-(i+1)}, 2^{-i}] \cup ... = [0,\infty)$

en $m'_\infty(\{0\}) \neq \infty$ en $m'_\infty([2^i, 2^{i+1}]) \neq \infty$ voor alle $i \in \mathbb{Z}$. Bovendien is $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, m'_\infty)$ een standaard maatruimte en T_λ is maatbehoudend en ergodisch voor $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, m'_\infty)$.

We gaan nu aantonen dat er een interval $W = (a,b) \subseteq [0,\infty)$ bestaat met $a \neq 0$ en $b \neq \infty$ (dus $m'_\infty(W) \neq \infty$) zodanig dat $\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}(W) = (0,\infty)$. Voor zo'n W geldt $m'_\infty\left(\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}(W)\right)^c\right) = 0$. Wegens Stelling 3.1 is T_λ dan dus conservatief voor $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, m'_\infty)$.

Herinner dat $h_0(y) = \frac{y}{\lambda y+1}$. Voor de afgeleide van h_0 geldt $h'_0(y) = \frac{1}{(\lambda y+1)^2} < 1$, en dus geldt $T'_\lambda > 1$ op $[0, m_1^\lambda)$. Wegens stelling 3.9 geldt $T_\lambda(x) = x - \lambda$ voor alle $x \in I_{i_\lambda}^\lambda = [\lambda, \infty)$. Neem $a = m_1^\lambda/2$. Neem b zodanig dat $b > h_{i_\lambda}(a) = \lambda + a$ en $h_0(b) > m_1^\lambda/2$. Dit is mogelijk, want $h_0(y)$ stijgt van 0 naar m_1^λ op $[0,\infty)$. Dan geldt $h_0(a) < a < h_0(b)$, en $h_{i_\lambda}(a) < b < h_{i_\lambda}(b) = b + \lambda$. Hieruit volgt dat $T_\lambda^{-1}[(a,b)] \supseteq (h_0(a), h_0(b)) \cup (h_{i_\lambda}(a), h_{i_\lambda}(b))$. Op dezelfde wijze volgt voor willekeurig $i \geq 1$ dat $h_0^i(a) < h_0^{i-1}(a) < h_0^i(b)$ en $h_{i_\lambda}^i(a) < h_{i_\lambda}^{i-1}(b) < h_{i_\lambda}^i(b) = b + n\lambda$. Merk op dat $\lim_{i\to\infty} h_0^i(a) = 0$ en $\lim_{i\to\infty} h_{i_\lambda}^i(b) = \infty$. Neem $W = (a,b)$ en er volgt dat $\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}(W) = (0,\infty)$. $\square$

Ten slotte hebben we nog het volgende resultaat nodig.

Propositie 3.13. In de maatruimten $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, m'_\infty)$ en $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, \mu)$ zijn m'_∞ en μ onderling singulier.

Bewijs. We gebruiken Stelling 3.2 en 3.4. Merk op dat $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, m'_\infty)$ een standaard maatruimte is en T_λ een transformatie op X die conservatief, ergodisch en niet-singulier is voor $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, m'_\infty)$. Zowel $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, m'_\infty)$ als $([0,\infty), \mathcal{B}_\infty, \mu)$ zijn σ-eindig en T_λ is maatbehoudend voor beide maatruimten. Natuurlijk geldt $m'_\infty \ll m'_\infty$. Als ook $\mu \ll m'_\infty$ dan geeft Stelling 3.2 dat $m'_\infty = c\mu$ voor een $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, maar dit is onmogelijk, want $m'_\infty([0,\infty)) = \infty$ en $\mu([0,\infty)) = 1$. Dus $\mu \not\ll m'_\infty$. Wegens Stelling 3.4 zijn μ en m'_∞ dus onderling singulier. $\square$

De volgende propositie geeft aan wat we moeten bewijzen voor de singulariteit van ϕ_λ.

Propositie 3.14. De afbeelding ϕ_λ is singulier dan en slechts dan als er een Lebesgue-meetbare deelverzameling $A \subseteq [0,\infty)$ bestaat met $m_L(A^c) = 0$ en $m_L(f(A)) = 0$ (herinner dat m_L de Lebesgue-maat is).

Bewijs. De afbeelding ϕ_λ is stijgend en continu, dus wegens Gevolg 3.6 bestaat $f'(x)$ voor Lebesgue-bijna alle $x \in [0,\infty)$. Verder is ϕ_λ niet constant, dus de bewering volgt nu uit Stelling 3.7. $\square$

Nu kunnen we eindelijk het hoofdresultaat bewijzen.

Stelling 3.15 (Hoofdresultaat). De afbeelding ϕ_λ is singulier voor $\lambda = \lambda_k := 2\cos(\pi/k)$ en $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

Bewijs. Wegens Propositie 3.13 zijn μ en m'_∞ onderling singulier, dus er bestaat een $B \in \mathcal{B}_\infty$ waarvoor $\mu(B) = 0$ en $m'_\infty(B^c) = 0$. Per definitie van μ en wegens de equivalentie van m'_∞ en m_∞ geldt voor zo'n B ook $m_\infty(B^c) = 0$ en $m_1(\phi_\lambda(B)) = 0$. Er bestaat dus een Borel-meetbare, dus Lebesgue-meetbare verzameling $B \subseteq [0,\infty)$ waarvoor $m_L(B^c) = 0$ en $m_L(\phi_\lambda(B)) = 0$. Wegens Propositie 3.14 is ϕ_λ singulier. $\square$

4 Conclusie

In Hoofdstuk 2 hebben we gezien hoe de transformatie S_β verband houdt met β-ontwikkelingen en de transformatie T_λ verbandt houdt met λ-kettingbreuken. We zagen dat het limietgedrag van beide dynamisch systemen overeenkomt (Stelling 2.2 en 2.5). Uit Stelling 2.6 volgt het bestaan van de afbeelding ϕ_λ, die een conjugatie is van $([0,\infty), T_\lambda)$ naar $([0,1), S_\beta)$. Deze conjugatie is een strikt stijgende bijectie van $[0,\infty)$ naar $[0,1)$. Het vermoeden dat deze afbeelding singulier is, wordt bewezen voor het geval $\lambda = \lambda_k := 2\cos(\pi/k)$ en $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, in Stelling 3.15 van Hoofdstuk 3. Daarvoor was het nodig om eerst wat maattheorie te bespreken en de bekende stelling dat twee ergodische kansmaten gelijk of onderling singulier zijn (Stelling 3.3), te gegeneraliseren tot Stelling 3.4, die zegt dat twee ergodische maten equivalent of onderling singulier zijn.

Eventueel vervolgonderzoek kan zich richten op de gevallen waar $\lambda \neq \lambda_k$. De transformaties S_β en T_λ worden dan een stuk minder eenvoudig, omdat de laatste takken niet meer 'volledig' zijn: De laatste tak van S_β stijgt voor niet-geheeltallige β maar tot $\beta - \lceil\beta\rceil + 1 < 1$ en de laatste tak van T_λ stijgt maar tot $l_\lambda < \infty$. De in Paragraaf 3.2 gedefinieerde maten zijn niet meer invariant voor deze dynamische systemen. Voor $([0,1), S_\beta)$ bestaat een unieke invariante maat die absoluut continu is t.o.v. de Lebesgue-maat. Het bestaan van deze maat werd aangetoond in [Rén57] en een expliciete formule voor de dichtheid van deze maat werd gevonden in [Gel59] en [Par60] (zie ook [Kal09]). Het is voor $\lambda \neq \lambda_k$ onbekend of er een invariante absoluut continue maat voor $([0,\infty), T_\lambda)$ bestaat, zoals wordt opgemerkt in [JRD11, 5.1]. Vervolgonderzoek kan zich richten op het vinden van zo'n maat.

Bibliografie

[Aar97] Jon Aaronson. *An Introduction to Infinite Ergodic Theory.* Amarican Mathematical Society, 1997.

[Arr15] Aubin Arroyo. Generalised Lüroth expansions and a family of Minkowski's question-mark functions. *Comptes Rendus Mathematique*, 353(10):943–946, 2015.

[Can83] Georg Cantor. Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten Nr. 5. *Mathematische Annalen*, 21:51–58 en 545–586, 1883.

[Can84] Georg Cantor. De la puissance des ensembles parfaits de points. *Acta Mathematica Bd.*, 4:381–392, 1884.

[DD08] Karma Dajani and Sjoerd Dirksin. A Simple Introduction to Ergodic Theory (Lecture notes). 2008.

[DMRV06] Oleksiy Dovgoshey, Olli Martio, Vladimir Ryazanov, and Matti Vuorinen. The Cantor function. *Expositiones Mathematicae*, 24(1):1–37, 2006.

[EW11] Manfred Einsiedler and Thomas Ward. *Ergodic Theory with a view towards Number Theory.* Springer, 2011.

[Gel59] Alexander Gel'fond. A common property of number systems. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. SSSR Seriya Matematicheskaya*, 23:809–814, 1959.

[Got80] *Gesammelte Abhandlungen Mathematischen und Philosophischen Inhalts.* Göttingen State and University Library, 1980.

[Hun11] John Hunter. Measure Theory (Lecture notes). 2011.

[JRD11] Elise Janvresse, Benoît Rittaud, and Thierry De La Rue. Dynamics of λ-continued fractions and β-shifts. 2011.

[Kal09] Charlene Kalle. *Expansions and Extensions.* PhD thesis, Utrecht, 2009.

[Leo09] Giovanni Leoni. *A First Course in Sobolev Spaces.* Graduate Studies in Mathematics, Volume 105, American Mathematical Society, 2009.

[Par60] William Parry. On the β-expansions of real numbers. *Acta Mathematica Hungarica*, 11(3):401–416, 1960.

[Rén57] Alfréd Rényi. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Mathematica Hungarica*, 8(3):477–493, 1957.

[Ros54] David Rosen. A class of continued fractions associated with certain properly discontinuous groups. *Duke Mathematical Journal*, 21(3):549–563, 1954.

[Rub63] Lee Rubel. Differentiability of monotonic functions. *Colloquium Mathematicae*, 10(2):277–279, 1963.

[Sal43] R. Salem. On Some Singular Monotonic Functions which are strictly increasing. *Transactions of the Amarican Mathematical Society*, 53:427–439, 1943.