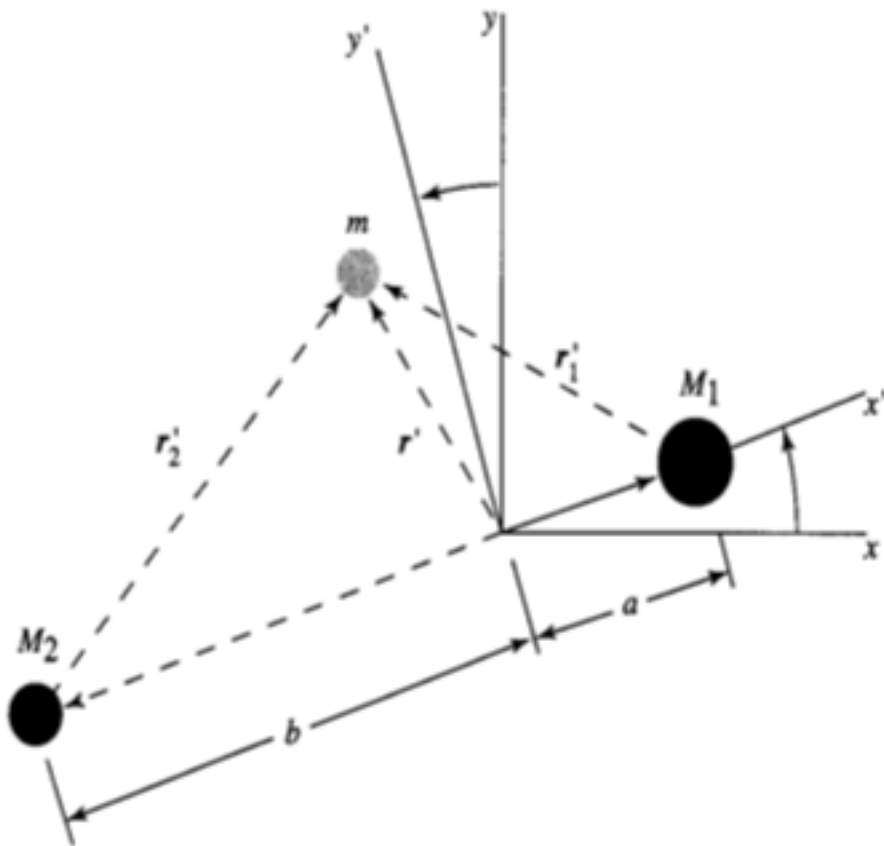


Het gereduceerde 3-lichamenprobleem
Stationaire oplossingen en hun stabiliteit

Maaïke Assendorp

21 augustus 2012



1 Inleiding

Al lang houdt de mensheid en daarmee ook de wetenschappelijke wereld zich bezig met hoe hemellichamen zich bewegen. Redenen hiervoor waren bijvoorbeeld nieuwsgierigheid, of religie. Later was ook voor de scheepsvaart belangrijk om verstand te hebben van hellichamen. Men ging hun gedrag bestuderen en proberen te verklaren.

Zo werden (onder andere) de eerste theorieën voor het 2 en 3 lichamenprobleem voor het eerst opgesteld en gebruikt.

Ik ga in deze scriptie bekijken hoe twee lichamen zich om elkaar heen bewegen, en hoe een derde massa zich daarin kan begeven zodat hij stationair is. Ook ga ik kijken naar of deze stationaire punten stabiel zijn.

Allereerst wat historische achtergrond.

1.1 2 lichamen

1.1.1 Astronomica nova - Kepler

Johannes Kepler (1571-1630) formuleerde onderstaande wetten met betrekking tot de beweging van planeten. Sinds Newton is hier meer over bekend en blijken sommige van deze wetten onvolledig of niet geheel juist te zijn. Ik ga hier later verder op in.

1. De planeet beweegt zich in een ellipsbaan met de zon in één van de brandpunten.
2. De lijn tussen de planeet en de zon (voerstraal) bestrijkt in gelijke tijd gelijke oppervlakte.
3. De kwadraten van de perioden verhouden zich als de derde machten van de lange as van de ellipsbanen.

Het twee lichamen probleem is integreerbaar.

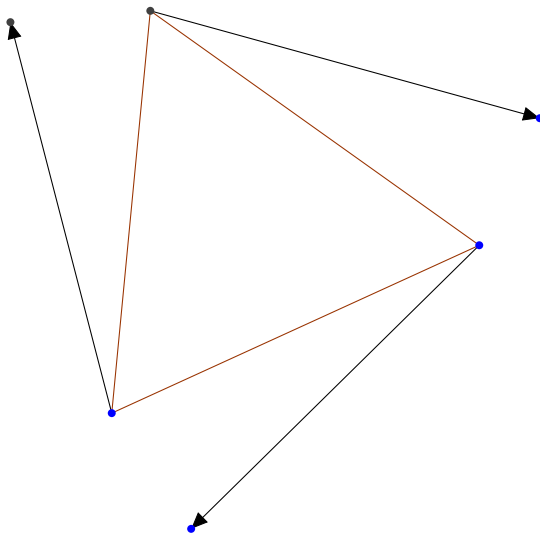
1.2 3 lichamen

Het 3-lichamenprobleem is in tegenstelling tot dat van 2 lichamen niet integreerbaar.

Voor drie willekeurige lichamen, met elk (even willekeurige) startposities en snelheden, is het meestal niet mogelijk om exact de banen te berekenen. Drie geleerden die zich met dit probleem hebben beziggehouden zijn:

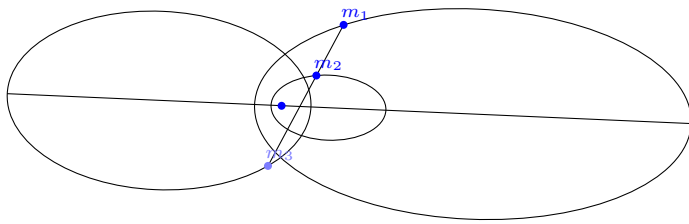
- Lagrange, 1772

Lagrange heeft een voorbeeld uitgeschreven waarin 3 gelijkvormige ellipsen in gelijke tijd worden beschreven. In deze situatie liggen de massa's op de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek:



- Euler, 1774

Euler heeft zich met (minstens) twee situaties bezig gehouden. Één van de twee is een situatie waarin de 3 lichamen collineair liggen ten opzichte van elkaar:



Euler heeft ook het gereduceerd probleem beschreven dat in deze scriptie uitgebreid wordt behandeld. Met behulp van zijn theorie heeft hij nauwkeurige maanstabellen kunnen samenstellen, wat voor navigatie op zee heel nuttig bleek te zijn (1774).¹

- Poincaré, 1893

De belangstelling van Poincaré voor het probleem geeft aan dat zelfs meer dan een eeuw later het probleem nog bekeken werd. Hij heeft het probleem als eerste numeriek benaderd. Een interessant detail is dat in zijn eerste beschrijving van het probleem een rekenfout zat. Zijn werk heeft met dank aan deze fout de chaos-theorie ingeleid.²

1.3 Opbouw

De scriptie is als volgt opgebouwd.

- Ik begin met de beschrijving en oplossing van het twee lichamenprobleem. Aangezien het gereduceerd 3 lichamenprobleem ervan uit gaat dat de twee zware lichamen geen invloed ondervinden van de derde, kunnen deze twee lichamen worden bekeken met de oplossing van het 2-lichamenprobleem, en hoef ik daarna alleen maar nog naar de derde massa kijken.
- Ik ga daarna kijken naar de stationaire oplossingen voor de derde massa in het 3 lichamenprobleem.
- Ik ga bepalen of de stationaire punten stabiel zijn of niet.

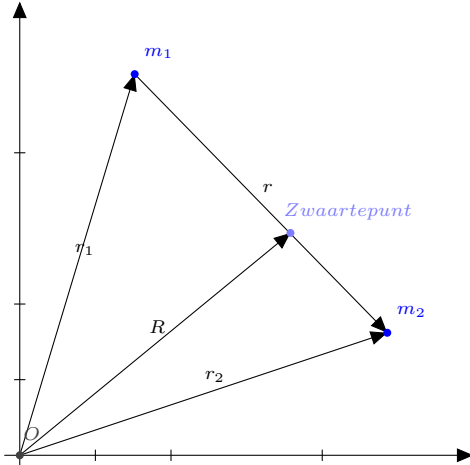
¹Struik, p.153

²<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Poincare.html>

2 Twee-lichamenprobleem

Het twee lichamenprobleem is het probleem waar twee lichamen in een systeem zitten. Zij ondervinden geen externe krachten, maar alleen krachten van elkaar. Het probleem beperkt zich tot zwaartekracht en eventuele beginsnelheid. Krachten als magnetisme worden niet meegenomen.

Er zijn meerdere manieren om het twee lichamen probleem te beschrijven en op te lossen. Ik bespreek er twee. De eerste manier is weliswaar makkelijker om in te zien, maar levert bij verdere berekeningen problemen op omdat er dan nog een coördinaat transformatie moet worden uitgevoerd om dit op te lossen. (Het blijkt handig om het probleem in poolcoördinaten om te zetten met het oog op de ellipsvormige banen.) De tweede manier maakt gebruik van de zogenaamde Lagrange vergelijkingen die het mogelijk maken om het probleem vanaf een vroeg stadium meteen in poolcoördinaten te bekijken.



Als eerste definieer ik wat constanten en variabelen. Ik gebruik de volgende waarden:

- m_1, m_2 dit zijn de massa's die we gaan bekijken. We gebruiken deze aanduiding voor zowel de objecten als hun massa's.
- $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, dit zijn de respectievelijke vectoren tussen de oorsprong en de massa's.
- r_1, r_2 dit zijn de lengten van de vectoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, dus de afstand tussen respectievelijk de oorsprong en m_1 en de oorsprong en m_2 .

We benoemen:

- $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$
- $M = m_1 + m_2$
- $\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (deze waarde μ wordt vaker gebruikt, voor andere natuurkundige situaties, met dezelfde definitie.)
- $\mathbf{R} = \frac{m_1}{M} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}_2$, dit is het zwaartepunt van het systeem.

2.1

De eerste manier die ik bespreek maakt rechtstreeks gebruik van de wetten van Newton.

1. Eerste wet van Newton: De snelheid van een object blijft gelijk als de totale externe kracht nul is.
2. Tweede wet van Newton: De versnelling \mathbf{a} van een object heeft de volgende verhouding met de totale kracht \mathbf{F} op het object en de massa m , $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.
3. Derde wet van Newton: De wederzijdse krachten tussen twee lichamen zijn gelijk en tegengesteld, dus $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Waarbij \mathbf{F}_{12} de kracht is die m_1 uitoefent op m_2 , en \mathbf{F}_{21} vice versa.

We gaan nu kijken naar het probleem. De versnelling \mathbf{a} wordt gegeven door de tweede afgeleide van de plaatsvectoren: $\ddot{\mathbf{r}}_i$.

Dus de tweede wet van Newton geeft:

- $\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1$

- $\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2$

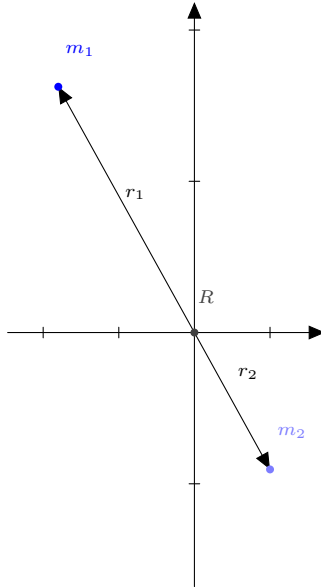
Als we nu naar \mathbf{r} gaan kijken krijgen we:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1}{m_1} - \frac{m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2}{m_2} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \mathbf{F}_{12} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{12}$$

Deze uitdrukking mag niet van \mathbf{R} afhangen, immers de krachten kunnen niet beïnvloed worden door de locatie van het zwaartepunt. We gaan er namelijk van uit dat er geen externe krachten op het systeem werken.

We krijgen daarmee de vergelijking: $\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$

Omdat er geen externe krachten op het systeem werken, kunnen we door middel van een coördinaat transformatie het zwaartepunt in de oorsprong zetten. (Zie onderstaand figuur)



Hier gaat de hefboomwet op. Er geldt $m_1 r_1 = m_2 r_2$.

2.2

2.2.1 Lagrangiaan

Een andere manier is om de bewegingsvergelijkingen op te stellen met behulp van de Lagrangiaan en de Lagrange vergelijkingen³. Door dit te doen zal blijken dat de bewegingsvergelijkingen in poolcoördinaten kunnen worden opgesteld. Bij de vorige methode zou dat achteraf nog moeten. Daardoor kan veel makkelijker uitgevonden worden wat stationaire oplossingen zijn.

Allereerst kijken we naar hoe een systeem bepaald wordt, of hoe het beschreven wordt. Allereerst bekijken we de massa's in een coördinaatsysteem, en de tijdsafgeleiden van de coördinaten. Traditioneel kijkt men eerst naar carthesische coördinaten. Elke van de twee massa's heeft een x -coördinaat en een y -coördinaat die de plaats aangeeft ten opzichte van de oorsprong op een tijd t . Dus de plaats van m_1 is $\mathbf{r}_1(t) = (x(t), y(t))$ en van m_2 is $\mathbf{r}_2(t) = (x(t), y(t))$. De snelheden van de massa's zijn de tijdsafgeleiden van de coördinaten x en y . Omdat het systeem bepaald wordt door de plaats en snelheid van de massa's moeten we kijken naar de coördinaten van de massa's en hun tijdsafgeleiden om de bewegingsvergelijkingen op te stellen. We gebruiken hiervoor de Lagrangiaan.

De Lagrangiaan is gedefinieerd als $L = T(\dot{R}, \dot{r}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dots)$. Waarbij $T = \frac{1}{2} m v^2$ de kinetische energie is en $V = -\frac{G m_1 m_2}{r}$ de potentiële energie.⁴ De potentiële energie is de gradient van de krachten.

Met behulp van de Lagrangiaan kunnen de bewegingsvergelijkingen of Lagrange vergelijkingen worden opgesteld.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

2.2.2 oplossing probleem

We kunnen T schrijven als: $T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + T'$. Dit is de kinetische energie van het zwaartepunt T plus de kinetische energie ten opzichte van het zwaartepunt T' ⁵, met $T' = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2$.

De Lagrangiaan wordt dan nu $L = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - V(r)$.

³Meer informatie over de Lagrangiaan kan bijvoorbeeld worden gevonden in: Classical Mechanics - Goldstein, hst 2.

⁴Er zijn ook andere vormen van energie (zoals bijvoorbeeld magnetische), maar deze worden in dit model niet meegenomen.

⁵Dit betekend hier 'een andere T en niet de afgeleide.

We stellen nu de bewegingsvergelijkingen op met behulp van bovenstaande Lagrange vergelijkingen:

- We zien: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}_j} = 0 \Leftrightarrow M \ddot{\mathbf{R}}_j = 0$. Hieruit volgt dat $\dot{\mathbf{R}}$ constant is. Aangezien $\dot{\mathbf{R}}$ de snelheid v is van het systeem in zijn geheel en de massa m sowieso constant is, blijkt dat hierdoor mv als geheel ook constant is. De waarde $p = mv$ heet het impuls van het systeem. Hier zien we de wet van behoud van impuls.
Doordat de impuls is behouden zien we dat we het zwaartepunt op (bijvoorbeeld) de oorsprong kunnen vastleggen door een zogenaamde Galilei-transformatie.⁶
- Verder zien we: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_j} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\mu \dot{\mathbf{r}}_j) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_j}$, dus $\frac{d}{dt} (\mu \dot{\mathbf{r}}) = -\nabla V$

We gaan kijken naar de afgeleide van de impulsmomentvector, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Dit is: $\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \frac{d}{dt} \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mu \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r} \times \nabla V = \mathbf{0}$
De impulsmomentvector is het uitproduct tussen de impuls en de plaats, en staat daarom altijd loodrecht op deze twee. Aangezien deze vector constant is (afgeleide is nul), bewegen de massa's zich dus in een constant vlak.

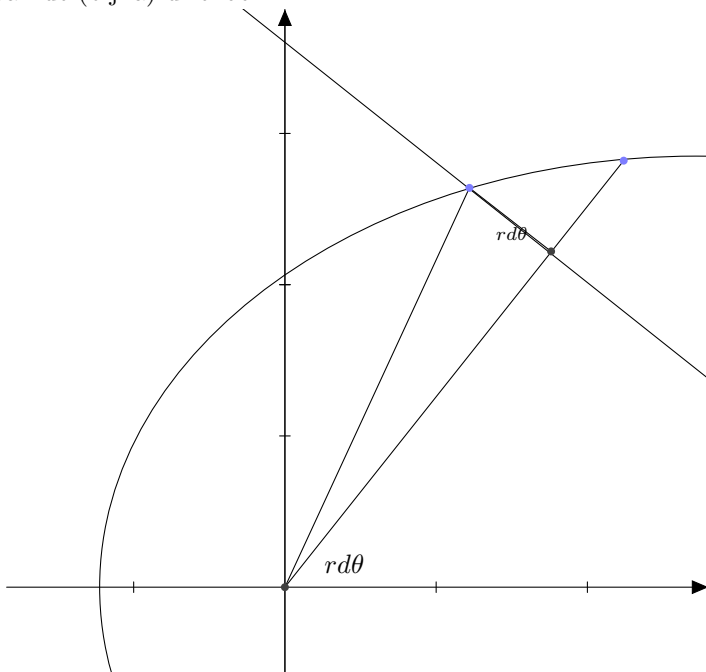
Hierdoor kunnen we het probleem in, bijvoorbeeld, poolcoördinaten uitdrukken: $L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$
Hier is r de afstand tot de oorsprong en θ de hoekcoördinaat. Ik zou ook kunnen zeggen dat we het probleem omzetten in cylindercoördinaten, waar z de laatste coördinaat, ik zou dan kijken naar het vlak met $z = 0$.

We gaan nu nog een keer de bewegingsvergelijkingen opstellen en krijgen dan:

- $\frac{d}{dt} (\mu \dot{r}) - \mu r \dot{\theta}^2 + V'(r) = 0 = 0$
- $\frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\theta}) = 0$

Uit de tweede volgt dat $\mu r^2 \dot{\theta} = l$ voor een constante l . Deze constante l is de z -component van het impulsmoment.

Verder geldt ook dat $\frac{d}{dt} (\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}) = 0$. We kunnen immers de constante μ vervangen voor een constante $\frac{1}{2}$. Dit komt overeen met de 2e wet van Kepler, de oppervlakte van datgene wat de lijn 'bestrijkt', $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ gelijk is voor gelijke verandering van θ . Zie onderstaand plaatje voor de visualisatie hiervan. Bedenk dat $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ de oppervlakte is van de (bijna) driehoek.



De eerste vergelijking kunnen we herschrijven als: $m \ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = 0$, wat uiteindelijk weer te schrijven is als: $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} + V(r) \right) = 0$ Hieruit blijkt dan dat $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} + V(r) = E$, de totale energie, constant is.

Hieruit herleiden we dat $t = \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V - \frac{l^2}{2mr^2})}} dr$.

Hieruit volgt dan weer $d\theta = \frac{l}{mr^2} dt$, of $\theta = l \int_0^t \frac{1}{mr^2(t)} dt + \theta_0$.

We schrijven $\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V - \frac{l^2}{2mr^2})}} \cdot \frac{l}{mr^2} = \frac{l}{\sqrt{m r^3}}$, of $d\theta = \int \frac{l dr}{\sqrt{m r^3}}$. Dit geeft de ellipsbaan van Kepler.

⁶zie Goldstein p. 276

2.2.3 Samenvatting

We hebben gezien dat de vergelijkingen uiteindelijk uitkomt op een ellipsbaan, de eerste wet van Kepler. We hebben de tweede wet van Kepler ook gezien. (Zie bovenstaande tekening.) De derde wet van Kepler geeft de hoeksnelheid die ik later gebruik bij het 3-lichamenprobleem. De kwadraten van de perioden ω^2 verhouden zich tot de derde machten van de lange as $G(m_1 + m_2)\frac{1}{r^3}$.

Verder hebben we het behoud van impuls, impulsmoment en de totale energie (E) gezien.

3 Gereduceerd drie-lichamenprobleem

Het drie lichamenprobleem (zoals de naam zegt) bevat een massa meer. Men kan denken aan de zon, de aarde en de maan.⁷

We bekijken de drie massas m_1, m_2, m_3 met respectievelijke plaatsvectoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$.

We definiëren de volgende drie vectoren:

- $\mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$
- $\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$
- $\mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$

We hebben nu $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 = \mathbf{0}$.

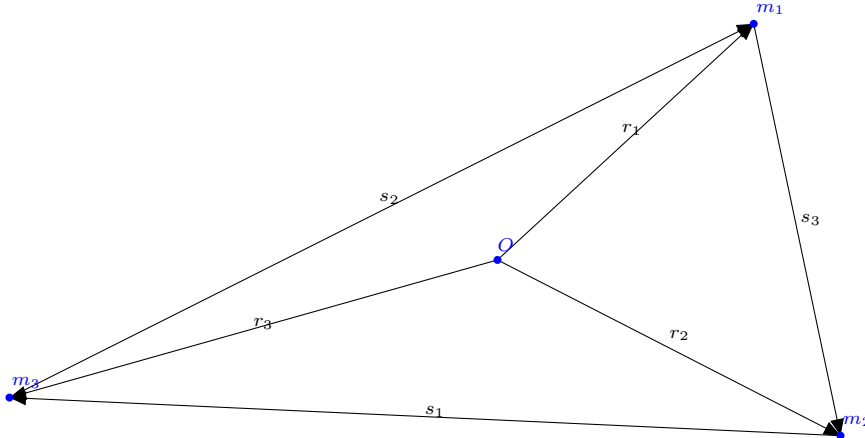
Later zal ik specifiek de afstanden tussen m_3 en de andere twee gebruiken. Door bovenstaande definities is het zo de afstand die (vanuit m_3) hoort bij m_1 s_2 heet, en de afstand die hoort bij m_2 juist s_1 .

We definiëren/ gebruiken:

- $m = m_3$
- $M = m_1 + m_2$
- $s_i = |\mathbf{s}_i|$
- $\mathbf{G} = G \left(\frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} + \frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} + \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} \right)$

Verder geldt:

- $\ddot{\mathbf{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3}$ (en analoog voor de andere 2)
- $\ddot{\mathbf{s}}_i = -mG \frac{\mathbf{s}_i}{s_i^3} + m_i \mathbf{G}$



We gaan, zoals gezegd, er in dit model vanuit dat de derde massa licht genoeg is om geen invloed uit te oefenen op de overige twee. Dit betekent in de praktijk dat we de twee zware lichamen kunnen beschouwen als twee lichamen in een tweelichamen probleem. Doordat dit systeem van 2 lichamen in evenwicht is gaat de hefboomweg ($r_1 m_1 = r_2 m_2$) op, zoals eerder aangegeven op blz. 5.

We hoeven nu alleen nog maar te kijken naar hoe het zwaartekrachtveld van de twee massas zich gedraagt. Dat gaat namelijk bepalen hoe de derde massa zich gedraagt.

We kijken naar de totale Lagrangiaan $L = T - V$. We zien weer dat $T = T + T'_2$ waarbij T de kinetische energie van het zwaartepunt is, en T'_2 de kinetische energieën van de massa's ten opzichte van het zwaartepunt. We weten dat M_3 dusdanig klein is dat hij geen invloed op het zwaartepunt uitoefent, dus T is hetzelfde als bij het twee lichamenprobleem. T'_2 is de som van de kinetische energieën van alle drie de massa's, dus de som van de T' in het vorige hoofdstuk, en de kinetische energie van m_3 . Dus we zien dat $T = T + T' + \frac{1}{2} m_3 v^2$. Voor V

⁷Al is dit natuurlijk niet reëel aangezien er meer planeten in het systeem zitten waar we rekening mee moeten houden.

geldt ongeveer hetzelfde. V is de som van de potentiële energiën die de massas op elkaar uitoefenen. Aangezien de derde massa geen invloed uitoefent op de eerste twee is V de som van de potentiële energie uit het vorige hoofdstuk en de potentiële energie van m_3 .

De algemene Lagrangiaan die hoort bij de derde massa is: $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}'^2) - V(r, \theta', t)$ ⁸

Om het probleem nog een stap verder te versimpelen gaan we uit van cirkelvormige banen van de twee eerste lichamen. Dan is het zo dat de afstand tussen de twee lichamen constant is, en kunnen we een tranformatie ($\theta = \theta' + \omega t$, $\omega = G \frac{m_1+m_2}{(r_1+r_2)^3}$) toepassen zodat de we de twee lichamen 'vastleggen'. De potentiële energie van de eerste twee massa's 'vallen weg' waardoor we nu alleen de kinetische en potentiële energie van de derde massa overhouden. We kunnen dus kijken enkel en alleen naar bovenstaande Lagrangiaan met de substitutie van de hoeksnelheid.

We krijgen dan voor de derde massa (in cylinder coördinaten): $\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2(\dot{\theta} - \omega)^2) - V = L$ of $L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - (m\omega\rho^2\dot{\theta} - \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + V(\rho, \theta, z))$.

We gebruiken cylinder coördinaten omdat er geen enkele reden is om de z -coördinaat niet mee te nemen.

Hierbij is m de derde massa $m_3 = m$, en is $m\omega\rho^2\dot{\theta}$ de Coriolis 'kracht' en $\frac{1}{2}m\rho^2\omega^2$ de middelpunt vliedende 'kracht'. Het gaat bij deze twee termen niet om echte krachten, maar om schijnkrachten, deze 'krachten' compenseren voor het feit dat we een roterend systeem 'stil' hebben gelegd.

Deze krachten spelen ook bijvoorbeeld een rol bij luchtstromen op de aarde. Deze gaan niet direct van hoog naar laag, maar draaien er naar toe. Dit komt door de draaiing van de aarde. Eigenlijk gaan de luchtstromen wel rechtaan, maar omdat onze kaart 'stil staat' net als het systeem wat boven beschreven wordt, maar eigenlijk om de aardas draait, lijkt het alsof juist de luchtstromen draaien.

Bewegingsvergelijkingen

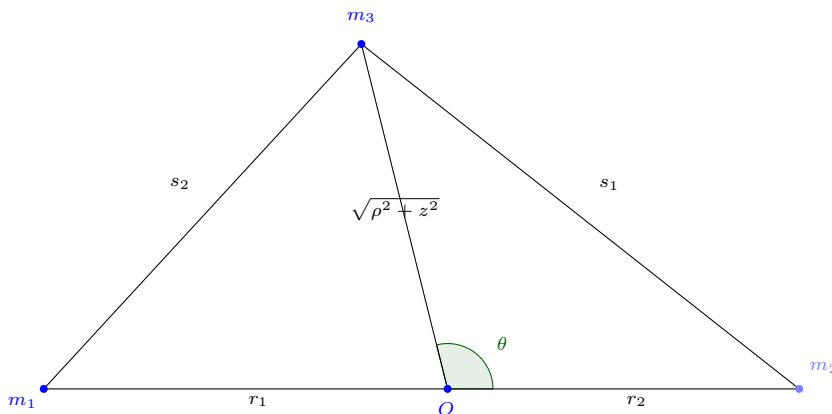
We gaan weer kijken naar de Lagrange-vergelijkingen. We hebben drie coördinaten, dus ook drie vergelijkingen.

1. $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = \frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - (m\rho\dot{\theta}^2 - 2m\omega\rho\dot{\theta} + m\rho\omega^2 - m\frac{\partial V}{\partial \rho}) = 0$
2. $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta} - m\omega\rho^2) + (m\frac{\partial V}{\partial \theta}) = 0$
3. $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}) - \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt}(m\dot{z}) + m\frac{\partial V}{\partial z}$

Potentiaal

Het is handiger om in plaats van te kijken naar de potentiële energie, te kijken naar de potentiaal die een factor m verschilt. Vanaf nu heet de potentiaal V en de potentiële energie heet mV . Later gaan we ook de effectieve potentiaal gebruiken waarvoor geldt: $V_{eff} = V - \frac{1}{2}\rho\omega^2$.

We weten: $V = V_1 + V_2 = -\frac{Gm_1}{s_2} - \frac{Gm_2}{s_1} = -G(\frac{m_1}{s_2} + \frac{m_2}{s_1})$ ⁹De vraag wordt dan, wat zijn s_2 en s_1 . Ik ga die bepalen met behulp van het onderstaand plaatje en de cosinusregel.



We hebben:

- $s_2^2 = r_1^2 + \rho^2 + 2r_1\rho \cos(\theta) + z^2$
- $s_1^2 = r_2^2 + \rho^2 - 2r_2\rho \cos(\theta) + z^2$

⁸De accentjes slaan op het feit dat deze waarden anders zijn dan die later gebruikt.

⁹Merk op dat hier een indexverwisseling lijkt voor te komen, zie mijn opmerking bij de definities van s_i .

Hieruit volgt: $V = -G \left(\frac{m_1}{\sqrt{r_1^2 + \rho^2 + 2r_1\rho \cos(\theta) + z^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{r_2^2 + \rho^2 - 2r_2\rho \cos(\theta) + z^2}} \right)$.

3.1 Stationaire Oplossingen

We zijn benieuwd of er punten zijn ten opzichte van de twee lichamen zodanig dat de derde massa daar stil staat, een zogenaamd stationair punt. We gaan daarom kijken naar de situatie waarin $\dot{\rho} = \dot{\theta} = \dot{z} = 0$. Als m_3 namelijk niet beweegt en dus alle plaatsafgeleiden 0 zijn, bevindt de massa zich in een stationair punt. Ten opzichte van het draaiende stelsel zal de massa zich niet bewegen, of, de massa beweegt zich met de andere twee massa's mee.

We krijgen dan:

1. $\frac{\partial V}{\partial \rho} = \rho\omega^2$
2. $-\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(-m\omega\rho^2) = 0$
3. $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$

De eerste stap wordt dan de afgeleiden vinden van de potentiële energie, $V(\rho, \theta, z)$.

We krijgen nu:

- $\frac{\partial V}{\partial \rho} = -G \left(m_1 \cdot \frac{\partial s_2^2}{\partial \rho} \cdot -\frac{1}{2} \frac{1}{s_2^2 \sqrt{s_2^2}} + m_2 \cdot \frac{\partial s_1^2}{\partial \rho} \cdot -\frac{1}{2} \frac{1}{s_1^2 \sqrt{s_1^2}} \right)$
 $= -G \left(-\frac{m_1(2\rho + 2r_1 \cos(\theta))}{2s_2^2 \sqrt{s_2^2}} - \frac{m_2(2\rho - 2r_2 \cos(\theta))}{2s_1^2 \sqrt{s_1^2}} \right)$
 $= G \left(\frac{m_1(\rho + r_1 \cos(\theta))}{s_2^2 \sqrt{s_2^2}} + \frac{m_2(\rho - r_2 \cos(\theta))}{s_1^2 \sqrt{s_1^2}} \right)$
 $= G \left(\frac{m_1(\rho + r_1 \cos(\theta))}{(r_1^2 + \rho^2 + 2r_1\rho \cos(\theta) + z^2)\sqrt{r_1^2 + \rho^2 + 2r_1\rho \cos(\theta) + z^2}} + \frac{m_2(\rho - r_2 \cos(\theta))}{(r_2^2 + \rho^2 - 2r_2\rho \cos(\theta) + z^2)\sqrt{r_2^2 + \rho^2 - 2r_2\rho \cos(\theta) + z^2}} \right)$
- $\frac{\partial V}{\partial \theta} = -G \left(m_1 \cdot -\frac{1}{2} \frac{\partial s_2^2}{\partial \theta} \cdot -\frac{1}{2} \frac{1}{s_2^2 \sqrt{s_2^2}} + m_2 \cdot \frac{\partial s_1^2}{\partial \theta} \cdot -\frac{1}{2} \frac{1}{s_1^2 \sqrt{s_1^2}} \right) =$
 $\frac{1}{2} G \left(\frac{m_1 \cdot -2r_1\rho \sin(\theta)}{s_2^2 \sqrt{s_2^2}} + \frac{m_2 \cdot 2r_2\rho \sin(\theta)}{s_1^2 \sqrt{s_1^2}} \right) =$
 $\frac{1}{2} G \left(\frac{m_1 \cdot -2r_1\rho \sin(\theta)}{(r_1^2 + \rho^2 + 2r_1\rho \cos(\theta) + z^2)\sqrt{r_1^2 + \rho^2 + 2r_1\rho \cos(\theta) + z^2}} + \frac{m_2 \cdot 2r_2\rho \sin(\theta)}{(r_2^2 + \rho^2 - 2r_2\rho \cos(\theta) + z^2)\sqrt{r_2^2 + \rho^2 - 2r_2\rho \cos(\theta) + z^2}} \right)$
- $\frac{\partial V}{\partial z} = -G \left(m_1 \cdot \frac{\partial s_2^2}{\partial z} \cdot -\frac{1}{2} \frac{1}{s_2^2 \sqrt{s_2^2}} + m_2 \cdot \frac{\partial s_1^2}{\partial z} \cdot -\frac{1}{2} \frac{1}{s_1^2 \sqrt{s_1^2}} \right) =$
 $G \left(\frac{m_1 z}{s_2^2 \sqrt{s_2^2}} + \frac{m_2 z}{s_1^2 \sqrt{s_1^2}} \right) =$
 $G \left(\frac{m_1 z}{(r_1^2 + \rho^2 + 2r_1\rho \cos(\theta) + z^2)\sqrt{r_1^2 + \rho^2 + 2r_1\rho \cos(\theta) + z^2}} + \frac{m_2 z}{(r_2^2 + \rho^2 - 2r_2\rho \cos(\theta) + z^2)\sqrt{r_2^2 + \rho^2 - 2r_2\rho \cos(\theta) + z^2}} \right)$

3.1.1 oplossingen

Nu we de afgeleiden van de potentiaal hebben, kunnen we bovenstaande vergelijkingen oplossen. De oplossingen heten de Lagrange punten en zijn genummerd L_1 - L_5 .

1. 3. Uit $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ blijkt $\frac{m_1 z}{s_2^2 \sqrt{s_2^2}} = -\frac{m_2 z}{s_1^2 \sqrt{s_1^2}}$, dit is waar als $\frac{m_1}{s_2^2 \sqrt{s_2^2}} = -\frac{m_2}{s_1^2 \sqrt{s_1^2}}$ of $z = 0$.
 Omdat zowel $\frac{m_1}{s_2^2 \sqrt{s_2^2}} > 0$ als $\frac{m_2}{s_1^2 \sqrt{s_1^2}} > 0$ kan de eerste optie niet, dus we weten $z = 0$
2. 2. Uit $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ blijkt $\frac{2m_1 r_1 \rho \sin(\theta)}{s_2^2 \sqrt{s_2^2}} = \frac{2m_2 r_2 \rho \sin(\theta)}{s_1^2 \sqrt{s_1^2}}$ of $\frac{m_1 r_1}{s_2^2 \sqrt{s_2^2}} = \frac{m_2 r_2}{s_1^2 \sqrt{s_1^2}}$ of $\rho \sin(\theta) = 0$.
3. 1. Ik begin met $\frac{m_1 r_1}{s_2^2} = \frac{m_2 r_2}{s_1^2}$, er geldt $m_1 r_1 = m_2 r_2$, we hebben dan:
 - $\frac{1}{s_2^2} = \frac{1}{s_1^2} \Leftrightarrow s_2 = |s_1|$
 - $\frac{\partial V}{\partial \rho} = \rho\omega^2 \Leftrightarrow G \left(\frac{m_1 \rho + m_1 r_1 \cos \theta}{s_2^3} + \frac{m_2 \rho - m_2 r_2 \cos \theta}{s_1^3} \right) = \rho\omega^2 \Leftrightarrow G \left(\frac{\rho(m_1 + m_2)}{s_2^2 + (m_1 r_1 - m_2 r_2) \cos \theta} \right) = \rho\omega^2 \Leftrightarrow \frac{G(m_1 + m_2)}{s_2^3} = \omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{(r_1 + r_2)^3}$
 $s_2 = s_1 = r_1 + r_2 = r$.

Deze oplossingen vormen dus een gelijkzijdige driehoek samen met de twee massa's. We noemen deze twee oplossingen L_4, L_5 .

Voor $\rho \sin \theta = 0$ hebben we twee opties: $\rho = 0, \theta = 0 \vee \pi$.

Voor $\rho = 0$ krijgen we:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \rho \omega^2 = 0 \Leftrightarrow G \left(\frac{m_1 r_1 \cos \theta}{s_2^3} - \frac{m_2 r_2 \cos \theta}{s_1^3} \right) = 0 \Leftrightarrow s_1 = s_2$$

Dit zijn niet L_4 en L_5 , aangezien $\rho = 0$, en dit is bij L_4, L_5 niet het geval. Ik ga daarom uitgebreider kijken naar s_2 en s_1 . Omdat $\rho = 0$ kan ik s_2 en s_1 vereenvoudigen en krijg ik $r_1 = r_2$. Omdat r_1 en r_2 niet variabel zijn is deze oplossing over het algemeen niet gelden, maar alleen als ook $m_1 = m_2$.

- $\theta = 0$
 $G \left(\frac{m_1 \rho + m_1 r_1}{|r_1 + \rho|^3} + \frac{m_2 \rho - m_2 r_2}{|r_2 - \rho|^3} \right) = \rho \omega^2$
- $\theta = \pi$
 $G \left(\frac{m_1 \rho - m_1 r_1}{|r_1 - \rho|^3} + \frac{m_2 \rho + m_2 r_2}{|r_2 + \rho|^3} \right) = \rho \omega^2$

De vergelijkingen hebben samen 3 oplossingen. Deze noemen we L_1, L_2, L_3 . Ik zal later laten zien dat hier inderdaad drie waarden uitkomen.

3.1.2 $m_1 = m_2$

Ik ga nu kijken naar de situatie $m_1 = m_2$. Dit is de enige situatie waarin het voor kan komen dat $\rho = 0$.

- $-\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee \frac{1}{s_2^3} = -\frac{1}{s_1^3}$
 Het laatste geval kan niet, omdat beide breuken positief zijn. Dus $z = 0$ (Dit komt netjes overeen met het algemenere geval.)
- Door $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ krijgen we $\rho \sin \theta = 0$ of $s_2 = s_1$.
 (Dit krijg ik door in het begin $m_1 r_1$ aan beide kanten weg te delen, waar we eerder de gelijkheid $m_1 r_1 = m_2 r_2$ gebruikten. Ook hier gaat het dus helemaal goed.)
- Voor de situatie $s_2 = s_1$ krijg ik geen andere uitkomst dan eerder. Voor de situatie $\sin \theta = 0$, krijg ik nu twee uitkomsten in totaal. Het laatste punt krijg ik voor $\rho = 0$, wat alleen in deze situatie kan, aangezien hier wel geldt $r_1 = r_2$.

Ik krijg dus uiteindelijk alleen dezelfde 5 Lagrange punten. Één van deze oplossingen is de oplossing $\rho = 0$. Het feit dat er echt 3 Lagrange oplossingen op de lijn met de twee massa's liggen zal hieronder blijken.

3.1.3 Stabiliteit

We kijken naar twee verschillende gevallen, namelijk naar L_1, L_2, L_3 , op de lijn van de twee grote massa's, en naar de overige twee, L_4, L_5 .

De stationaire oplossingen liggen of in een minimum, of in een maximum van de potentiaal. In geval van een maximum is de oplossing instabiel, bij een minimum stabiel.

Ik moet dus uitzoeken of het Lagrange-punt op een minimum van de potentiaal ligt.

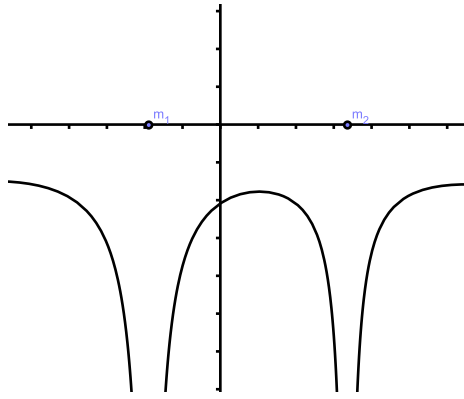
L_1, L_2, L_3 - Ik bekijk dit probleem weer in carthesische coördinaten, het is namelijk niet handig om op één lijn te blijven werken met pool coördinaten. Om te bepalen of er een minimum is ga ik kijken naar de potentiaal met voorwaarden $y = z = 0$. Op deze lijn geldt dat $d(m_1, m) = |-r_1 - x|$, $d(m_2, m) = |r_2 - x|$, waar x de locatie van de 3e massa $m_3 = m$ is.

De potentiaal wordt nu:

$$V_{eff} = -G \left(\frac{m_1}{|-r_1 - x|} + \frac{m_2}{|r_2 - x|} \right) - \frac{1}{2} \omega^2 x^2$$

Ik heb deze grafiek met geogebra¹⁰ geplot, de x-as is de afstand ten opzichte van de oorsprong, de verticale as is de hoogte van de potentiaal. De grafiek is niet op schaal.

¹⁰<http://www.geogebra.org>



De functie heeft asymptoten op $x = -r_1$ en op $x = r_2$. Dit is niet vreemd omdat op die twee punten de oorspronkelijke twee massa's liggen. Narmate het derde object één van de twee massas nadert wordt de potentiaal kleiner, maar de energie op het punt zelf is niet te bepalen aangezien het niet mogelijk is om twee objecten op dezelfde plaats te hebben.

Verder suggereert de grafiek dat de functie geen minima heeft. Dit ga ik controleren door de afgeleiden en de 2e afgeleiden van de grafiek te bekijken. Vanwege de absolute waarden is het handig om de grafiek onder te verdelen in 3 aparte intervallen.

- $x < -r_1$
 - $-r_1 - x > 0$
 - $r_2 - x > 0$
- $V_{eff} = -G \left(\frac{m_1}{(-r_1-x)} + \frac{m_2}{(r_2-x)} \right) - \frac{1}{2}\omega^2 x^2$
 - $V'_{eff} = -G \left(\frac{m_1}{(-r_1-x)^2} + \frac{m_2}{(r_2-x)^2} \right) - \omega^2 x$
 - $V''_{eff} = -G \left(\frac{2m_1}{(-r_1-x)^3} + \frac{2m_2}{(r_2-x)^3} \right) - \omega^2$
- $-r_1 < x < r_2$
 - $-r_1 - x < 0$
 - $r_2 - x > 0$
- $V_{eff} = -G \left(\frac{m_1}{-(-r_1-x)} + \frac{m_2}{(r_2-x)} \right) - \frac{1}{2}\omega^2 x^2$
 - $V'_{eff} = -G \left(-\frac{m_1}{(-r_1-x)^2} + \frac{m_2}{(r_2-x)^2} \right) - \omega^2 x$
 - $V''_{eff} = -G \left(-\frac{2m_1}{(-r_1-x)^3} + \frac{2m_2}{(r_2-x)^3} \right) - \omega^2$
- $r_2 < x$
 - $-r_1 - x < 0$
 - $r_2 - x < 0$
- $V_{eff} = -G \left(\frac{m_1}{-(-r_1-x)} - \frac{m_2}{-(r_2-x)} \right) - \frac{1}{2}\omega^2 x^2$
 - $V'_{eff} = -G \left(-\frac{m_1}{(-r_1-x)^2} - \frac{m_2}{(r_2-x)^2} \right) - \omega^2 x$
 - $V''_{eff} = -G \left(-\frac{2m_1}{(-r_1-x)^3} - \frac{2m_2}{(r_2-x)^3} \right) - \omega^2$

De 2e afgeleide is in elke situatie kleiner dan nul. Stel de functie zou een minimum hebben, dan betekend dat de grafiek na dat minimum zou moeten stijgen, wat niet kan aangezien de afgeleide alleen maar kleiner wordt, of er is een minimum op één van de twee randpunten, maar het interval is open dus dat komt ook niet voor. De functie heeft dus geen minima. Het is na te rekenen dat er x_1, x_2 bestaan waar tussen de functie stijgt. Dit geeft aan dat de afgeleide een nulpunt heeft en (gezien het feit dat de 2e afgeleide negatief is) daar een maximum heeft.

Wel heeft de functie precies 3 maxima en zijn er dus 3 stationaire punten.

L_4, L_5 - Ook hier gaan we zoeken naar de minima van de potentiaal:

$$V = -G \left(\frac{m_1}{\sqrt{r_1^2 + \rho^2 + 2r_1\rho \cos(\theta)} + z^2} + \frac{m_2}{\sqrt{r_2^2 + \rho^2 - 2r_2\rho \cos(\theta)} + z^2} \right) - \frac{1}{2}\rho\omega^2$$

Aangezien de z -coördinaat de noemer van de breuken alleen maar groter maakt (het is een kwadraat en dus altijd groter dan 0) geldt dat de breuken op zich alleen maar kleiner worden. Hierdoor wordt de potentiële energie alleen maar groter. Dat betekent dat de potentiële energie in ieder geval minimaal is op het vlak met $z = 0$. Ik beperk me daarom tot dit vlak.

De volgende stap is bekijken wat de potentiële waarde op het vlak doet als de locatie gaat afwijken van de Lagrange-punten. Ook hier wijken we weer af van de poolcoördinaten, en ga ik in plaats daarvan kijken naar hoe de potentiaal zich gedraagt in s_1 en s_2 .

We doen dit door te kijken naar $m_1s_2^2 + m_2s_1^2$, we krijgen:

$$\begin{aligned} m_1s_2^2 + m_2s_1^2 &= m_1r_1^2 + m_1\rho^2 + 2m_1r_1\rho \cos(\theta) + m_2r_2^2 + m_2\rho^2 - 2m_2r_2\rho \cos(\theta) \\ m_1s_2^2 + m_2s_1^2 &= m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + (m_1 + m_2)\rho^2 \\ m_1s_2^2 + m_2s_1^2 - m_1r_1(r_1 + r_2) &= (m_1 + m_2)\rho^2 \\ \frac{m_1s_2^2 + m_2s_1^2 - m_1r_1r}{m_1 + m_2} &= \rho^2 \end{aligned}$$

Nu kunnen we ρ dus uitrukken in termen van s_1 en s_2 . Gebruikend dat $\omega^2 = G(\frac{m_1+m_2}{r^3})$ is de effectieve potentiaal:

$$V_{eff} = -G \left(\frac{m_1}{s_2} + \frac{m_2}{s_1} + \frac{m_1 + m_2}{2r^3} \rho^2 \right)$$

Ik krijg dan bij het substitueren van ρ :

$$V_{eff} = -G \left(\frac{m_1}{s_2} + \frac{m_2}{s_1} + \frac{m_1s_2^2 + m_2s_1^2 - m_1r_1r}{2r^3} \right)$$

Volgende stap wordt het uitrekenen van de extreme waarden, en bepalen of dit minima, maxima of onbepaalde punten zijn. Beginstap is bepalen waar de extreme waarden liggen. Ik krijg voor s_1 en s_2 :

$$\frac{\partial V}{\partial s_1} = -G \left(-\frac{m_2}{s_1^2} + \frac{m_2s_1}{r^3} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s_1} &= 0 \\ \frac{m_2}{s_1^2} - \frac{m_2s_1}{r^3} &= 0 \\ \frac{m_2r^3 - m_2s_1^3}{r^3s_1^3} &= 0 \\ r^3 - s_1^3 &= 0 \\ s_1 &= r \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s_2} = -G \left(-\frac{m_1}{s_2^2} + \frac{m_1s_2}{r^3} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s_2} &= 0 \\ \frac{m_1}{s_2^2} - \frac{m_1s_2}{r^3} &= 0 \\ \frac{m_1r^3 - m_1s_2^3}{r^3s_2^3} &= 0 \\ r^3 - s_2^3 &= 0 \\ s_2 &= r \end{aligned}$$

De functie neemt dus een extreme waarde aan als $s_1 = s_2 = r$. Dit komt overeen met wat we eerder hebben gevonden, wat een extra bevestiging is van wat we dus al wisten.. Volgende stap is deze extreme waarde classificeren. Hiervoor heb ik de Hesse-matrix nodig.

$$H_V = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial s_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial s_2 \partial s_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial s_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G(2\frac{m_2}{s_1^3} + \frac{m_2}{r^3}) & 0 \\ 0 & -G(2\frac{m_1}{s_2^3} + \frac{m_1}{r^3}) \end{pmatrix}$$

$$H_V(s_1 = s_2 = r) = \begin{pmatrix} -G \cdot 3\frac{m_2}{r^3} & 0 \\ 0 & -G \cdot 3\frac{m_1}{r^3} \end{pmatrix}$$

Beide eigenwaarden zijn negatief dus de extreme waarde is een (lokaal) maximum van de effectieve potentiële energie.

Uit bovenstaande zou blijken dat L_4, L_5 instabiel zijn. We hebben echter geen rekening gehouden met de coriolis kracht. De coriolis kracht zorgt ervoor dat een bewegend object nog een schijnkracht vertoont die niet is meegenomen in bovenstaande berekeningen. Deze schijnkracht kan ervoor zorgen dat alhoewel de massa van het punt af beweegt, hij alsnog op zijn plek 'geduwd' wordt.

Ik ga kijken naar de bewegingsvergelijkingen, maar nu in cartesische coördinaten.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (m\omega(xy - \dot{x}y) - \frac{1}{2}m(x^2 + y^2)\omega^2 + mV(x, y))$$

met

$$V(x, y) = -G \left(\frac{m_1}{\sqrt{(-r_1 - x)^2 + y^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(r_2 - x)^2 + y^2}} \right)$$

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$
 $\frac{d}{dt}(m\dot{x} + m\omega y) - (-m\omega \dot{y} + m\omega^2 x - m\frac{\partial V}{\partial x}) = 0$
 $\ddot{x} = -2\omega \dot{y} + \omega^2 x - \frac{\partial V}{\partial x}$
- $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$
 $\frac{d}{dt}(m\dot{y} - m\omega x) - (m\omega \dot{x} + m\omega^2 y - m\frac{\partial V}{\partial y}) = 0$
 $\ddot{y} = 2\omega \dot{x} + \omega^2 y - \frac{\partial V}{\partial y}$

Omdat $\frac{\partial V}{\partial x}$ en $\frac{\partial V}{\partial y}$ niet linear zijn ga ik ze linear maken door middel van Taylor-polynomen.

$$P_1(x, y) = \sum_{m=0}^1 \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!(m-j)!} (D_1^j D_2^{m-j} f)(a, b) (x-a)^j (y-b)^{m-j}$$

Ofwel:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{\partial V}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(a, b)(y-b) + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a, b)(x-a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} \approx \frac{\partial V}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(a, b)(y-b) + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}(a, b)(x-a)$$

Met:

- $\frac{\partial V}{\partial x} = -G \left(\frac{m_1(-r_1-x)}{\sqrt{((-r_1-x)^2 + y^2)^3}} + \frac{m_2(r_2-x)}{\sqrt{((r_2-x)^2 + y^2)^3}} \right)$
- * $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = -G \left(-\frac{3m_1(-r_1-x)y}{\sqrt{((-r_1-x)^2 + y^2)^5}} - \frac{3m_2(r_2-x)y}{\sqrt{((r_2-x)^2 + y^2)^5}} \right)$
- * $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = G \left(m_1 \frac{((-r_1-x)^2 + y^2) - 3(-r_1-x)^2}{\sqrt{((-r_1-x)^2 + y^2)^5}} + m_2 \frac{((r_2-x)^2 + y^2) - 3(r_2-x)^2}{\sqrt{((r_2-x)^2 + y^2)^5}} \right)$
- $\frac{\partial V}{\partial y} = G \left(\frac{m_1 y}{\sqrt{((-r_1-x)^2 + y^2)^3}} + \frac{m_2 y}{\sqrt{((r_2-x)^2 + y^2)^3}} \right)$
- * $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = G \left(m_1 \frac{((-r_1-x)^2 + y^2) - 3y^2}{\sqrt{((-r_1-x)^2 + y^2)^5}} + m_2 \frac{((r_2-x)^2 + y^2) - 3y^2}{\sqrt{((r_2-x)^2 + y^2)^5}} \right)$
- * $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = G \left(\frac{3m_1 y(-r_1-x)}{\sqrt{((-r_1-x)^2 + y^2)^5}} + \frac{3m_2 y(r_2-x)}{\sqrt{((r_2-x)^2 + y^2)^5}} \right)$

We gaan nu de vergelijkingen bekijken rond de stationaire punten (a, b) . We hernoemen $(x - a) = \xi$, $(y - b) = \eta$, $\dot{\xi} = p$, $\dot{\eta} = q$

We krijgen zo:
$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{\xi} = p \\ \dot{\eta} = q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2\omega & \omega^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a, b) & -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(a, b) \\ 2\omega & 0 & -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(a, b) & \omega^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(a, b) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Het karakteristiek polynoom dat hierbij hoort is:

$$P(\lambda) = -\lambda^4 + ((\omega^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(a, b)) + (\omega^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a, b)) - 4\omega^2)\lambda^2 - (\omega^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2})(\omega^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}) + (\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(a, b))^2$$

of:

$$P(\lambda) = -\lambda^4 + \left(-2G\frac{M}{r^3} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a, b) - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\lambda^2 - \left(G\frac{M}{r^3} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\left(G\frac{M}{r^3} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)^2$$

De vraag is dan voor welke waarden van λ deze 0 wordt. Als deze eigenwaarden geen positief reëel deel hebben, dan is de oplossing (a, b) stabiel.¹¹

Voor L_4, L_5 krijgen we:

- $x = r_2 - \frac{1}{2}r = -r_1 + \frac{1}{2}r$
- $y = \sqrt{\frac{3}{4}r^2}, -\sqrt{\frac{3}{4}r^2}$
- $\sqrt{(-r_1 - x)^2 + y^2} = \sqrt{(r_2 - x)^2 + y^2} = r$

Ik krijg dan:

- $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = GM\frac{1}{r^3}$
- $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = GM\frac{-5}{r^3}$
- $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 3G(-m_1 + m_2)\frac{\sqrt{\frac{3}{16}}}{r^3}$

Hierdoor wordt het karakteristiek polynoom vereenvoudigd tot:

$$P(\lambda) = -\lambda^4 - GM\left(\frac{1}{r^3}\right)\lambda^2 - G^2M^2\frac{5}{r^6} + 9G^2(m_1 - m_2)^2\frac{3}{r^6}$$

Ik wil weten wanneer geldt $P(\lambda) = 0$, of, specifieker, of de λ waarvoor dit geldt wel of geen positief reëel deel hebben. Bovenstaand polynoom kan opgevat worden als een 2e graads polynoom in λ^2 . Dan volgen de nulpunten uit de abc-formule $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. We krijgen:

$b^2 - 4ac = G^2M^2\left(\frac{1}{r^6}\right) + 9G^2(m_1 - m_2)^2\frac{3}{r^6}$, $\frac{-b}{2} < 0$. We zien dat het polynoom voor λ^2 oplossingen heeft met een negatief reëel deel. De vraag is echter hoe dat zit voor λ zelf. Als we de oplossingen voor λ^2 even λ_1^2 en λ_2^2 noemen, dan zijn de oplossingen voor het polynoom als volgt: $\pm\sqrt{\lambda_1^2}, \pm\sqrt{\lambda_2^2}$. Deze hebben geen positief reëel deel als λ_1, λ_2 allebij reëel en negatief zijn. Als ze positief reëel of complex met reëel deel zouden zijn, dan zouden hun wortels ook één uitkomst met positief reëel deel hebben. Voor een positief geheel getal α is één van de wortels $\sqrt{\alpha}$ positief. Complexe getallen hebben wortels in tegenoverliggende kwadranten, en er is dus één wortel met een positief reëel deel.

$\frac{-b}{2}$ is negatief, dus als de wortel reëel maar kleiner is, dan krijgen we negatieve oplossing voor λ^2 . Dit is zo als $b^2 - 4ac = G^2M^2\left(\frac{1}{r^6}\right) + 9G^2(m_1 - m_2)^2\frac{3}{r^6} > 0$. Ik ga daarom kijken wanneer dit gelijk is aan nul.

$$G^2M^2\left(\frac{1}{r^6}\right) + 9G^2(m_1 - m_2)^2\frac{3}{r^6} = 0 \Leftrightarrow -1(m_1 + m_2)^2 + 27(m_1 - m_2)^2 = 0 \Leftrightarrow 26m - 56m_1m_2 + 26m_2^2$$

Ik schrijf nu $m_1 = am_2$ voor zekere a . Na uitschrijven kan ik de volgende vergelijking voor a oplossen.

$26a^2 - 56a + 26 = 0$, de vergelijking oplossen¹² geeft: $a = 0.6772$ en $a = 1.4766$. Afhankelijk van welke van de twee massa's zwaarder is, en dus dichterbij de oorsprong ligt, neem ik de juiste waarde. Vanaf de juiste ratio is $b^2 - 4ac$ dus positief, maar nooit groot genoeg om de gehele oplossing positief te krijgen. Nu we twee negatieve λ_1, λ_2 hebben, worden de vier uiteindelijke eigenwaarden complex, zonder reëel deel, dus ook zonder positief reëel deel. De oplossing is vanaf de juiste verhouding stabiel.

Voor L_1, L_2, L_3 kijken we naar het karakteristiek polynoom in het geval dat:

¹¹Zie bijvoorbeeld §4.2 in Differential Equations and Their Applications - Martin Braun.

¹²Met dank aan de GR.

- $x = x$
- $y = 0$

We krijgen dan:

- $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2G\left(\frac{m_1}{|-r_1-x|^3} + \frac{m_2}{|r_2-x|^3}\right)$
- $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = G\left(\frac{m_1}{|-r_1-x|^3} + \frac{m_2}{|r_2-x|^3}\right)$
- $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0$

Het karakteristiek polynoom wordt dan:

$$P = -\lambda^4 + G\left(-2\frac{M}{r^3} + \left(\frac{m_1}{|-r_1-x|^3} + \frac{m_2}{|r_2-x|^3}\right)\right)\lambda^2 - \left(-2G\left(\frac{m_1}{|-r_1-x|^3} + \frac{m_2}{|r_2-x|^3}\right)\right)\left(G\left(\frac{m_1}{|-r_1-x|^3} + \frac{m_2}{|r_2-x|^3}\right)\right)$$

Ik ga weer kijken naar de oplossingen voor λ^2 en dus naar de abc-formule. Het blijkt dat de wortel reëel is en groter dan $|\frac{b}{2}|$. De oplossingen voor λ^2 bevat dus één positieve reële oplossing. Er is dus één eigenwaarde met positief reëel deel. Deze Lagrange-punten zijn niet stabiel.

3.2 Conclusie

We hebben gezien dat er vijf stationaire punten zijn. Er zijn er drie L_1, L_2, L_3 op dezelfde lijn als de twee massa's. Deze 3 punten zijn niet stabiel. Verder zijn er twee oplossingen die een gelijkzijdige driehoek vormen met m_1 en m_2 . Deze twee oplossingen zijn stabiel als geldt: $\frac{m_1}{m_2} > 0.6772$ als m_1 zwaarder is als m_2 . (Wat je zonder verlies van algemeenheid kan aannemen, is het namelijk niet zo, dan kan de indices van m_1 en m_2 en hun bijbehorende waarden omdraaien en krijg je wel het goede geval.

4 Bronvermelding

4.1 Boeken

- Binas - vijfde druk
- Classical Mechanics - Third Edition - Goldstein, Poole, Safko
- Calculus - Sixth Edition - Adams
- Geschiedenis van de Wiskunde - D.J. Struik

4.2 Internet sites

- <http://www.scholarpedia.org/article/Threebodyproblem>
- <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Poincare.html>

4.2.1 Wikipedia paginas

- Newton's laws of motion
- Momentum
- Center of mass
- Angular momentum
- Two-body problem
- Three-body problem
- Euler's three-body problem