**M.A. Oort**

# Irreguliere Singuliere Punten van Differentiaalvergelijkingen

**Bachelorscriptie, 6 november 2014**

**Scriptiebegeleider: dr. R.J. Kooman**

**Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden**

# Inhoudsopgave

# 1 Inleiding

Het onderwerp differentiaalvergelijkingen is een zeer breed gebied van de wiskunde met toepassingen in alle andere wetenschappelijke disciplines, van de kleinste scheikundige reacties tot grote astronomische vergelijkingen. Door het belang van deze toepassingen is het ook niet verbazend dat er al enkele eeuwen onderzoek gedaan wordt naar differentiaalvergelijkingen en er in die jaren ook al veel methodes gevonden zijn deze vergelijkingen op te lossen of de oplossing in ieder geval te benaderen.

In deze scriptie ga ik kijken naar lineaire differentiaalvergelijkingen met polynomiale coëfficiënten, waar we het begrip singuliere punten kunnen introduceren. Deze singuliere punten blijken we vervolgens op te kunnen delen in 2 klassen: de reguliere en de irreguliere singuliere punten.

Ik zal beginnen met enkele definities rond dit onderwerp en enkele voorbeelden die deze definities hopelijk duidelijker zullen maken. Vervolgens geef ik een korte uitleg over vergelijkingen met reguliere singuliere punten, waarna ik dit uitbreid naar een analyse van de irreguliere singuliere punten. Ook in deze laatste paragrafen zal ik voorbeelden geven om de theorie te verduidelijken, of om juist te laten zien wanneer we op problemen stuiten.

## 2 Formulering en definities

We beschouwen differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$\frac{d^m y}{dz^m} + p_{m-1}(z)\frac{d^{m-1}y}{dz^{m-1}} + \cdots + p_1(z)\frac{dy}{dz} + p_0(z)y(z) = 0, \tag{1}$$

waarbij $z \in \mathbb{C}$ en $p_1, p_2, \ldots, p_m$ rationale functies zijn. Om te beginnen geef ik de definities die nodig zijn om het over irreguliere singuliere punten te hebben.

**Definitie 2.1.** Een punt $z = z_0$ heet een *singulier punt* van (1) als $z_0$ een pool is van minstens één van de coëfficiënten $p_j(z)$, anders heet $z_0$ een *gewoon punt* van (1).[1]

Als een punt $z_0$ een singulier punt is van een coëfficiënt $p_j(z)$ kunnen we kijken naar de orde van de pool van $p_j(z)$ en zo definiëren of een singulier punt regulier of irregulier is:

**Definitie 2.2.** Een singulier punt $z = z_0$ heet een *regulier singulier punt* als $z_0$ een pool is van $p_j(z)$ van orde hoogstens $m - j$ voor $j = 0, \ldots, m-1$, anders heet $z_0$ een *irregulier singulier punt*.[1]

Later zullen we zien waar deze bovengrens van de orde van de pool vandaan komt.

Om deze definities te illustreren geef ik nu een voorbeeld van een differentiaalvergelijking met een gewoon punt, een regulier singulier punt en een irregulier singulier punt.

**Voorbeeld 1.** Beschouw de volgende lineaire differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{(z-2)^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{z^2}y(z) = 0.$$

Dit is duidelijk een differentiaalvergelijking van de vorm (1) met $m = 2$, $p_0(z) = z^{-2}$ en $p_1(z) = (z-2)^{-2}$. We kunnen nu 3 gevallen onderscheiden:

1. $z = 0$: $z$ is nu een pool van $p_0(z)$ en dus een singulier punt. De orde van de pool is 2, en we hebben dat $m - j = 2 - 0$ voor $p_0$. De orde van de pool van $p_0$ is dus inderdaad hoogstens $m - j$.
   conclusie: $z = 0$ is een **regulier singulier punt**.
2. $z = 2$: $z$ is nu een pool van $p_1(z)$ en dus een singulier punt. De orde van de pool is 2, en we hebben dat $m - j = 2 - 1$ voor $p_1$. Er is dus een $j$ waarvoor de de orde van de pool van $p_j$ groter is dan $m - j$.
   Conclusie: $z = 2$ is een **irregulier singulier punt**.
3. $z \notin \{0, 2\}$: $z$ is nu geen pool van één van de coëfficiënten $p_j(z)$ en dus zijn deze $z$ **gewone punten**.

# 3 Gewone punten

In dit hoofdstuk zullen we kort kijken naar differentiaalvergelijkingen van de vorm (1) met alleen maar gewone punten. In het algemeen zullen oplossingen van deze vergelijkingen niet uit te drukken zijn in elementaire functies, maar blijken zal dat we wel altijd $m$ lineair onafhankelijke oplossingen kunnen vinden in de vorm van machtreeksen.

We beginnen met een herhaling van enkele begrippen rondom machtreeksen. Omdat ik deze stof als reeds bekend voor de lezer beschouw zal ik enkele theorie formuleren en gebruiken in voorbeelden, maar geen bewijzen geven.

**Definitie 3.1.** De *convergentiestraal* is een getal $\rho$ zodanig dat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ absoluut convergeert voor $|z-z_0| < \rho$ en divergeert voor $|z-z_0| > \rho$.

We berekenen de convergentiestraal met de worteltest[5]:

**Stelling 3.1.** *Gegeven een machtreeks rond een punt $z_0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, en beschouw*

$$C := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|z-z_0|.$$

*Dan convergeert de reeks als $C < 1$ en divergeert de reeks als $C > 1$.*[5]

Met de worteltest kunnen we als volgt de convergentiestraal van een reeks vinden:

**Stelling 3.2.** *Gegeven een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ en laat*

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

*zijn. Dan convergeert de reeks voor $|z-z_0| < \rho$ en divergeert de reeks voor $|z-z_0| > \rho$, dus is deze $\rho$ de convergentiestraal van de reeks.*[5]

*Opmerking.* Als $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ dan geldt dat $\rho = 1/0$. We zeggen dan dat de reeks een oneindige convergentiestraal heeft en dat de reeks convergeert voor elke $z$.

**Definitie 3.2.** Laat $f$ een functie zijn gedefiniëerd op een open schijf $D$ en laat $z_0 \in D$, dan zeggen we dat $f$ *analytisch is in* $z_0$ als $f$ een machtreeks rond $z_0$ heeft met een positieve convergentiestraal.

Een andere definitie van een gewoon punt $z_0$ is dus ook dat alle functies $p_j(z)$ uit (1) analytisch zijn in $z_0$.

Als een functie $f$ analytisch is in $z_0$ dan kunnen we de machtreeks rond dit punt eenvoudig verkrijgen:

**Stelling 3.3.** *Laat $f(z)$ analytisch zijn in $z_0$. Dan kunnen de coëfficiënten $a_n$ verkregen worden met:*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

*waar $f^{(n)}(z_0)$ de $n^{de}$ afgeleide van $f$ is in $z_0$.*[5]

*Opmerking.* Dit kennen we ook wel als de Taylorreeks van $f$.

Tot slot nog een stelling over het gelijk zijn van reeksen aan elkaar, iets wat we veel nodig zullen hebben in de volgende paragrafen:

**Stelling 3.4.** *Als*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n,$$

*voor elk punt $z$ in een zekere open schijf $D$, dan geldt dat $a_n = b_n$ voor alle $n \geq 0$.*
*In het bijzonder geldt dat als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = 0$ voor alle $z$ in een zekere $D$, dan $a_n = 0$ voor alle $n \geq 0$.*

## 3.1 Oplossingen rond een gewoon punt

Beschouw een differentiaalvergelijking van de vorm (1), dan weten we dat een oplossing $y(z)$ van de vergelijking altijd te schrijven is als

$$y(z) = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i(z),$$

waar de $y_i(z)$ $m$ lineair onafhankelijke oplossingen van (1) zijn en de $c_i$ constanten uit $\mathbb{C}$ afhankelijk van de beginvoorwaarden. We gaan nu proberen de oplossingen uit te drukken in een machtreeks rond een gewoon punt $z = z_0$ en stellen dus:

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Omdat $z_0$ een gewoon punt is van de differentiaalvergelijking weten we dat deze oplossingen een positieve convergentiestraal, zeg $\rho$ hebben. Een handige eigenschap van machtreeksen is dat alle afgeleiden van $y$ bestaan binnen de cirkel $|z - z_0| < \rho$, en deze berekend kunnen worden door term voor term te differentiëren. We hebben dus bijvoorbeeld:

$$\tfrac{dy}{dz} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1} \quad \text{en} \quad \tfrac{d^2y}{dz^2} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2}.$$

Als we al deze machtreeksen voor de afgeleiden nu substitueren in (1) dan kunnen we vervolgens door middel van het verschuiven van indices binnen sommaties de uitdrukking omschrijven tot de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = 0$.
Volgens Stelling 3.3 moet gelden dat $b_n = 0$ voor alle $n \geq 0$, en op deze manier kunnen we de $a_n$ bepalen en zo $m$ lineair onafhankelijke oplossingen $y_j(z)$ vinden. We zullen deze oplossingsmethode verduidelijken met een voorbeeld:

**Voorbeeld 2.** Beschouw de volgende tweede-orde differentiaalvergelijking:

$$(1+z^2)\frac{d^2y}{dz^2} + 3z\frac{dy}{dz} + y(z) = 0, \tag{2}$$

en zoek twee lineair onafhankelijke oplossingen rondom het punt $z_0 = 0$.

*Oplossing.* We kunnen vergelijking (2) delen door $(1+z^2)$ om een vergelijking van de vorm (1) te krijgen. We hebben hier $m = 2$, $p_0 = \frac{1}{1+z^2}$ en $p_1 = \frac{3z}{1+z^2}$. Hier zien we dat de singuliere punten van (2) $z_0 = \pm i$ zijn (voor dit voorbeeld is het nog even niet relevant of dit reguliere of irreguliere singuliere punten zijn, al is het eenvoudig te zien dat het hier gaat om reguliere singuliere punten), dus $z_0 = 0$ is een gewoon punt van de vergelijking. Laat nu dus

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

en substitueer deze functie en zijn afgeleiden, zoals eerder gedefiniëerd, in (2). We krijgen:

$$(1+z^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} + 3z\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0.$$

Uitwerken van de haakjes en machten van $z$ bij elkaar nemen geeft ons de vergelijking

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(n(n-1) + 3n + 1)a_n z^n = 0.$$

We kunnen de eerste som nu als volgt omschrijven

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} = \sum_{n=-2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n,$$

waarna we de vergelijking kunnen schrijven als één machtreeks. Dit wordt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)^2 a_n\big)z^n = 0.$$

Volgens Stelling 3.3 moet nu gelden dat $(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+1)^2 a_n = 0$, wat levert dat

$$a_{n+2} = -\frac{n+1}{n+2}a_n.$$

We willen nu 2 lineair onafhankelijke oplossingen van (2) krijgen, en dus kiezen we de volgende 2 gevallen: (i) $a_0 = 1$, $a_1 = 0$; en (ii) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Door deze keuzes van $a_0$ en $a_1$ zullen in het eerste geval alle coëfficiënten met oneven index gelijk zijn aan 0 en in het tweede geval alle coëfficiënten met even index gelijk zijn aan 0. Zo garanderen we dat de 2 gevonden oplossingen lineair onafhankelijk zijn.

Werken we dit uit dan krijgen we als oplossingen

$$y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} z^{2n},$$

$$y_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} z^{2n+1}.$$

**Convergentiestraal** We kunnen nu ook van elk van de oplossingen de convergentiestraal bepalen. Kijken we naar $y_1(z)$ dan hebben we dat

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}|}} = 1,$$

dus convergeert de oplossing voor $|z| < 1$ en divergeert de oplossing voor $|z| > 1$. De oplossing $y_2(z)$ blijkt dezelfde convergentiestraal te hebben.

We hebben nu een voorbeeld gezien waar de coëfficiënten $p_j(z)$ analytisch zijn rond een gewoon punt $z_0$, en we vervolgens $m$ lineair onafhankelijke oplossingen konden vinden van de differentiaalvergelijking rond dit punt. In het algemeen blijkt dit altijd zo te zijn, wat verwoord is in de volgende stelling:

**Stelling 3.5.** *Laat $z_0 \in \mathbb{C}$ en stel dat de coëfficiënten $p_j(z)$ in* (1) *analytisch zijn in $z_0$ (dus $z_0$ is een gewoon punt). Dan zijn alle $p_j(z)$ uit te drukken in een machtreeks rond $z_0$ met positieve convergentiestraal $\rho_j$.*

*Laat $\rho^* \equiv \min_{0\le j\le m-1}\{\rho_j\}$, zodat alle coëfficiënten $p_j(z)$ een machtreeks hebben rond $z_0$ die convergeren op een schijf $\{z \in \mathbb{C} | z - z_0| < \rho^*\}$. Dan bestaan er $m$ lineair onafhankelijke oplossingen $y_i$ van de vorm*

$$y_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{ni}(z - z_0)^n, \tag{3}$$

*die convergeren op de schijf $\{z \in \mathbb{C} | z - z_0| < \rho^*\}$.*[2]

*Opmerking.* Belangrijk resultaat is dus dat de convergentiestraal van een oplossing rond een punt $z = z_0$ minimaal zo groot is als de afstand van $z_0$ tot het dichtstbijzijnd liggende singuliere punt van de vergelijking.

In het volgende hoofdstuk zullen we gaan kijken naar differentiaalvergelijkingen met reguliere singuliere punten en zullen we laten zien waarom de methode van machtreeksen niet werkt bij dit soort vergelijkingen.

# 4 Reguliere singuliere punten

In dit hoofdstuk zullen we op zoek gaan naar oplossingen rondom reguliere singuliere punten van differentiaalvergelijkingen van de vorm (1). Omdat deze singulariteiten zich redelijk 'netjes' gedragen blijken we dit te kunnen doen met een methode die lijkt op de methode van machtreeksen, maar iets uitgebreider is. De methode heet de methode van Frobenius en maakt gebruik van de stelling van Fuchs. Allereerst laat ik zien waarom de methode uit het vorige hoofdstuk niet werkt bij vergelijkingen met reguliere singuliere punten.

## 4.1 Problemen met reguliere singuliere punten

Stel we bekijken een differentiaalvergelijking van de vorm (1) met een singulier punt $z_0$. Door de aard van een singulier punt zullen deze oplossingen vaak heel groot worden of snel oscilleren in de buurt van $z_0$, en dus zijn de oplossingen lang niet altijd continu, laat staan analytisch, in het punt $z_0$. Hierom zal over het algemeen de methode met machtreeksen niet werken. Een eenvoudig voorbeeld hiervan is de volgende vergelijking:

**Voorbeeld 3.** Beschouw de eerste-orde differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dz} + \frac{1}{z}y(z) = 0, \tag{4}$$

en vind een oplossing in de buurt van $z = 0$.

*Oplossing.* Het is duidelijk dat deze vergelijking van de vorm (1) is met $p_0 = z^{-1}$ en dat $z_0 = 0$ een singulier punt is. Voor dit voorbeeld is het niet relevant of dit een regulier of een irregulier singulier punt is, maar we zouden eenvoudig kunnen concluderen dat het hier om een regulier singulier punt gaat. We gaan een oplossing proberen te vinden met behulp van machtreeksen rond $z_0 = 0$ en substitueren dus de machtreeks van $y(z)$ en $y'(z)$ in (4). We krijgen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n z^{n-1} = 0,$$

waardoor Stelling 3.3 ons zegt dat moet gelden $(n+1)a_n = 0$ voor alle $n \geq 0$. Dit levert dat $a_n = 0$ en dus krijgen we uit deze methode slechts de triviale oplossing. We kunnen echter zien dat de niet-triviale oplossing van deze vergelijking de eenvoudige functie $y(z) = cz^{-1}$ is. Deze functie is niet analytisch in $z = 0$ en heeft dus ook geen machtreeks rond dit punt.

## 4.2 De stelling van Fuchs en de methode van Frobenius

Allereerst zullen we voor het gemak in de rest van dit hoofdstuk veronderstellen dat we oplossingen zoeken rond de singulariteit $z = 0$. Deze aanname is gegrond omdat we elke differentiaalvergelijking van de vorm (1) met een singulier punt $z = z_0$ kunnen transformeren tot een vergelijking met een singulariteit in de oorsprong met behulp van de substitutie $z' = z - z_0$.

Ter introductie van de stelling van Fuchs en de methode van Frobenius beschouwen we allereerst de meest eenvoudige vorm van een tweede-orde differentiaalvergelijking met een singulier regulier punt in $z = 0$, de zogenaamde *Euler vergelijking*[3]:

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + az\frac{dy}{dz} + by = 0, \tag{5}$$

met $a, b$ constanten. Doordat in de vergelijking $y'(z)$ en $y''(z)$ met respectievelijk $z$ en $z^2$ vermenigvuldigd worden proberen we als oplossing $y(z) = z^r$, waar $r$ nog bepaald moet worden. Substitueren we dit dan krijgen we

$$(r(r-1) + ar + b)z^r = 0,$$

en dus moeten we $r^2 + (a-1)r + b = 0$ oplossen om niet-triviale oplossingen van (5) te vinden. We noemen de vergelijking $I(r) := r^2 + (a-1)r + b$ de **indexvergelijking** van de differentiaalvergelijking en de getallen $r$ waarvoor geldt $I(r) = 0$ de **wortels** van de indexvergelijking.

We hebben dus dat als $I(r_1) = 0$ voor een zekere $r_1 \in \mathbb{C}$ de vergelijking $y_1(z) = z^{r_1}$ een oplossing is van de Euler vergelijking. Tevens is er een $r_2 \in \mathbb{C}$ zodanig dat $I(r_2) = 0$, waarvoor nu 2 mogelijkheden zijn:

1. Er geldt dat $r_2 \neq r_1$: Dan hebben we als tweede (lineair onafhankelijke) oplossing van (5) de vergelijking $y_2(z) = z^{r_2}$;

2. Er geldt dat $r_2 = r_1$: Door te stellen dat $y_2(z) = v(z)y_1(z)$ kunnen we een tweede lineair onafhankelijke oplossing van (5) vinden. Dit heet de methode van orde-reductie (omdat we de orde van de differentiaalvergelijking met 1 verlagen) en als we dit toepassen op de Euler-vergelijking krijgen we $y_2(z) = z^{r_1}\ln(z)$.

Hierboven hebben we het probleem van het oplossen van een tweede-orde differentiaalvergelijking met reguliere singuliere punten gereduceerd tot het oplossen van een kwadratische vergelijking, door de aanname $y(z) = z^r$. Toen we dit uitwerkten kregen we ten minste 1 oplossing die exact deze vorm had en konden we vervolgens (indien nodig) de orde van de vergelijking reduceren en overige oplossingen vinden.

Ondanks dat de Euler-vergelijking een relatief eenvoudig voorbeeld is van een tweede-orde differentiaalvergelijking met reguliere singuliere punten geeft dit wel een idee hoe we differentiaalvergelijkingen van de vorm (1) met reguliere singuliere punten op kunnen lossen. Hiervoor gebruiken we de stelling van Fuchs:

**Stelling 4.1** (Fuchs)**.** *Laat een differentiaalvergelijking van de vorm* (1) *zijn en stel dat* $z = 0$ *een regulier singulier punt is van de differentiaalvergelijking. Dan is er ten minste één oplossing van de vorm*

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}$$

*met een positieve convergentiestraal, waar* $r \in \mathbb{C}$*. Een reeks van deze vorm noemen we een* ***Frobeniusreeks****.*[6]

*Opmerking.* De convergentiestraal van de Frobeniusreeks zal minimaal zo groot zijn als de afstand van $z = 0$ tot een ander singulier punt $z_0$. Is $z_0$ het enige singuliere punt dan zal de convergentiestraal van de reeks dus gelijk zijn aan $\infty$.

*Opmerking.* Een machtreeks is altijd een Frobeniusreeks maar een Frobeniusreeks is slechts een machtreeks als $r \in \mathbb{N}$.

Laat $y(z)$ nu zo'n Frobeniusreeks zijn, dan hebben we dat

$$\begin{aligned}
\tfrac{dy}{dz} &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n z^{n+r-1} \\
\tfrac{d^2y}{dz^2} &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n z^{n+r-2} \\
\vdots &= \vdots \\
\tfrac{d^ky}{dz^k} &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(n+r)!}{(n+r-k)!} a_n z^{n+r-k},
\end{aligned}$$

wat we vervolgens kunnen substitueren in een differentiaalvergelijking van de vorm (1).

Net als bij de methode van machtreeksen willen we in elke sommatie gelijke macht van $z$ hebben zodat we de vergelijking vervolgens als 1 sommatie kunnen schrijven. Nu hebben we echter ook negatieve machten en we weten niet of Stelling 3.5 toepasbaar is. Dit probleem verhelpen we door alle coëfficiënten als polynoom te schrijven. We illustreren deze oplosmethode, de *methode van Frobenius*, aan de hand van een voorbeeld:

**Voorbeeld 4.** Beschouw de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$2z^2\frac{d^2y}{dz^2} + 3z\frac{dy}{dz} - zy(z) = 0, \tag{6}$$

en vind twee lineair onafhankelijke oplossingen van deze vergelijking.

*Oplossing.* Wanneer we (6) delen door $2z^2$ dan krijgen we een differentiaalvergelijking van de vorm (1) met $m = 2$, $p_0(z) = \frac{3}{2z}$ en $p_1(z) = -\frac{1}{2z}$. Het punt $z = 0$ is in zowel $p_0$ als $p_1$ een pool van orde 1 en dus is het een regulier singulier punt van (6).
Substitueren we nu de reeks $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}$ en zijn afgeleiden in de vergelijking, dan krijgen we

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r-1)(n+r)a_n z^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n z^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r+1} = 0.$$

Omdat we gelijke machten van $z$ willen hebben verschuiven gebruiken we nu dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^{n+r}$$

We kunnen de sommaties nu echter nog niet samennemen omdat ze bij een verschillende waarde beginnen. Dit kunnen we verhelpen door de termen waar $n = 0$ buiten de sommaties te laten. Doen we dit dan wordt de vergelijking

$$\big(2r(r-1)+3r\big)a_0 z^r + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\big(2(n+r-1)(n+r)+3(n+r)\big)a_n - a_{n-1}\Big) z^{n+r} = 0. \quad (7)$$

De vergelijking die we krijgen door $n = 0$ in te vullen bij alle sommaties waar dit kan heet weer de *Indexvergelijking* en is in dit geval dus $2r(r-1)+3r = r(2r+1)$, welke als wortels $r_1 = 0$ en $r_2 = -1/2$ heeft. Nu kunnen we om beurten de waarde van $r_1$ en $r_2$ in (7) invullen om zo tot een recursieve relatie voor $a_n$ te komen, waarna we $y(z)$ volledig gevonden hebben.

Beschouw dus allereerst het geval dat $r = 0$. Nu volgt uit (7) en Stelling 3.3 dat voor een oplossing moet gelden:

$$\big(2(n+0-1)(n+0) + 3(n+0)\big)a_n - a_{n-1} = n(2n+1)a_n - a_{n-1} = 0,$$

dus krijgen we de recursieve vergelijking $a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n+1)}$. Voor een niet-triviale oplossing kiezen we $a_0 = 1$, dan krijgen we $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = a_1 \cdot \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5}$, $a_3 = a_2 \cdot \frac{1}{3 \cdot 7} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$. Werken we dit verder uit dan krijgen we als eerste oplossing van (6):

$$y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(1 \cdot 3 \cdots (2n+1))} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!} z^n.$$

We kunnen nu de convergentiestraal van deze oplossing bepalen. We hebben dat

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{(2n+1)!}\right|}} = \frac{1}{0},$$

en dus convergeert de reeks voor alle $z \in \mathbb{C}$. Na invoeren in Mathematica blijkt deze Frobeniusreeks te convergeren naar de volgende exacte oplossing van vergelijking (7):

$$y_1(z) = \frac{\sinh(\sqrt{2z})}{\sqrt{2z}}.$$

Nu bekijken we het geval dat $r = -1/2$, waarvan de uitwerking analoog aan het bovenstaande gaat en we deze dus niet zullen geven. We krijgen als recurrente relatie $a_n = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}$ en als tweede oplossing van (6):

$$y_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(1 \cdot 3 \cdots (2n-1))} z^{n-\frac{1}{2}}.$$

Ook van deze Frobeniusreeks is de convergentiestraal gelijk aan $\infty$ en met behulp van Mathematica zien we dat de reeks convergeert naar

$$y_2(z) = \frac{\cosh(\sqrt{2z})}{\sqrt{z}}$$

We hebben nu dus 2 lineair onafhankelijke oplossingen gevonden van vergelijking (7) met behulp van de methode van Frobenius.

In bovenstaand voorbeeld konden we twee lineair onafhankelijke Frobeniusreeksen vinden door $r_1$ en $r_2$ in te vullen, maar dit blijkt niet altijd mogelijk te zijn. Stel namelijk dat $r_1 = r_2$ of dat $r_1$ en $r_2$ met een geheel getal verschillen, dan is het mogelijk dat we slechts 1 lineair onafhankelijke oplossing vinden. Dit is waarom de stelling van Fuchs zegt dat we *ten minste* één Frobeniusreeks als oplossing zullen vinden. In de volgende paragraaf zal ik laten zien hoe de algemene oplossing van een differentiaalvergelijking er uitziet rond een regulier singulier punt.

## 4.3 De algemene oplossing rond een regulier punt

Zoals gezien in de vorige paragraaf kan het voorkomen dat we een indexvergelijking vinden waarvan de wortels gelijk zijn of met een geheel getal verschillen, wat betekende dat we niet direct $m$ lineair onafhankelijke Frobeniusreeksen konden vinden. Bij differentiaalvergelijkingen van de tweede orde is een tweede oplossing soms te vinden met behulp van reductie van orde, door $y_2(z) = v(z)y_1(z)$ te stellen en dit uit te werken, maar bij differentiaalvergelijkingen van hogere orde zal dit niet altijd kunnen of zeer veel werk zijn. Hierom zal ik in deze paragraaf een overzicht geven van de algemene oplossingen van differentiaalvergelijkingen met reguliere singuliere punten. Ik zal de correctheid van deze oplossingen niet aantonen, maar wel verwijzen naar bronnen waarin dit wel gedaan wordt.

Beschouw allereerst een tweede-orde differentiaalvergelijking met een regulier singulier punt, en stel dat de indexvergelijking de wortels $r_1$ en $r_2$ heeft, met $\mathrm{Re}(r_1) \geq \mathrm{Re}(r_2)$. Dan kunnen we de volgende drie gevallen onderscheiden[2]:

1. $r_1 \neq r_2$: We kunnen 2 lineair onafhankelijke oplossingen $y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r_1}$ en $y_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+r_2}$ vinden met behulp van de methode van Frobenius, zoals we eerder in dit hoofdstuk gezien hebben.

2. $r_1 = r_2$**:** We kunnen met de methode van Frobenius een oplossing vinden van de vorm $y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r_1}$. Een tweede oplossing heeft de volgende vorm:

$$y_2(z) = y_1(z)\ln(z) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(r_1) z^{n+r_1},$$

   waar $a_n'(r_1)$ de afgeleide is van de functie $a_n$ afhankelijk van $r$, in het punt $r_1$.

3. $r_1 = r_2 + N$ met $N \in \mathbb{N}$**:** We kunnen met de methode van Frobenius een oplossing vinden van de vorm $y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r_1}$. Een tweede oplossing heeft de volgende vorm:

$$y_2(z) = \alpha y_1(z)\ln(z) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(r_2) z^{n+r_2},$$

   met $\alpha$ een constante die gelijk kan zijn aan 0.

*Opmerking.* Merk op dat de laatste 2 gevallen ook als één geschreven kunnen worden: Als $r_1 = r_2 + N$ met $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan kan met de methode van Frobenius een oplossing $y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r_1}$ gevonden worden en is er een tweede oplossing van de volgende vorm:

$$y_2(z) = \alpha y_1(z)\ln(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+r_2},$$

met $\alpha$ een constante die gelijk kan zijn aan 0.

We hebben nu dus een overzicht van hoe de oplossingen van tweede-orde differentiaalvergelijkingen rond een regulier punt eruit zien. Dit kan uitgebreid worden naar een algemeen overzicht van oplossingen van $n^{de}$-orde differentiaalvergelijkingen rond een regulier punt, en dit wordt onder andere gedaan in *Ordinary Differential Equations* van Edward Ince.

Stel bijvoorbeeld dat er een $i$ aantal gelijke wortels van de indexvergelijking zijn, $r_1, \ldots, r_i$, en stel dat we schrijven $y_j(z,r)$ voor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)}(r) z^{n+r}$. Dan zijn

$$\begin{aligned}
Y_1 = &\quad y_0(z,r_1) \\
Y_2 = &\quad y_0(z,r_1)\ln(z) + y_1(z,r_1) \\
Y_3 = &\quad y_0(z,r_1)\ln(z)^2 + 2y_1(z,r_1)\ln(z) + y_2(z,r_1) \\
\vdots = &\quad \vdots \\
Y_i = &\quad y_0(z,r_1)\ln(z)^{i-1} + (i-1)y_1(z,r_1)\ln(z)^{i-2} + \cdots + y_{i-1}(z,r_1)
\end{aligned}$$

$i$ lineair onafhankelijke oplossingen van de differentiaalvergelijking. Op een zelfde manier kunnen oplossingen gevonden worden wanneer de wortels van de indexvergelijking met een geheel getal verschillen, maar hiervoor verwijs ik naar het boek ([4], pagina 401).

Nu weten we hoe de algemene oplossingen van $n^{de}$-orde differentiaalvergelijkingen rond een gewoon punt eruit zien. Merk op dat ondanks dat je weet dat een vergelijking met een regulier singulier punt een Frobeniusreeksoplossing heeft, hiervoor niet altijd een gesloten vorm te vinden is. Meestal zullen we juist geen gesloten vorm voor $a_n$ kunnen vinden, zoals in deze paragraaf wel altijd het geval was. We krijgen echter wel altijd een uitdrukking in de vorm van een recurrente relatie.

In het volgende hoofdstuk zullen zien wat er misgaat wanneer we de methode van Frobenius toepassen op een differentiaalvergelijking met een irregulier singulier punt, en zullen we proberen hiervoor een oplossing te vinden.

# 5 Irreguliere Singuliere Punten

In dit hoofdstuk zullen we op verschillende manieren gaan kijken naar differentiaalvergelijkingen met irreguliere singuliere punten. Eerst geven we een voorbeeld van een differentiaalvergelijking met een irregulier singulier punt en laten we zien dat de methode van Frobenius niet werkt bij deze vergelijking. Vervolgens zullen we enkele begrippen introduceren die een indicatie geven hoe irregulier een singulier punt is en duidelijke verschillen ontdekken tussen reguliere en irreguliere singuliere punten.

## 5.1 Problemen met de methode van Frobenius

Zoals we in het vorige hoofdstuk hebben kunnen zien is de methode van Frobenius een goede manier om oplossingen in de vorm van een reeks te vinden rondom singuliere punten. Bij de uitleg van de methode hebben we vermeld dat deze methode niet werkt voor alle singulariteiten en we dus meestal niet alle oplossingen van de differentiaalvergelijking kunnen vinden met deze methode. We beginnen met een voorbeeld:

**Voorbeeld 5.** Beschouw de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + \alpha \frac{dy}{dz} + by(z) = 0, \tag{8}$$

met $\alpha \neq 0$, $b > 0$, en vind twee lineair onafhankelijke oplossingen van deze vergelijking.

*Oplossing.* Wanneer we (8) delen door $z^2$ dan krijgen we een differentiaalvergelijking van de vorm (1) met $m = 2$, $p_0(z) = \frac{b}{z^2}$ en $p_1(z) = \frac{\alpha}{z^2}$. Het punt $z = 0$ is in zowel $p_0$ als $p_1$ een pool van orde 2 en dus geldt voor $j = 1$ dat de orde van $p_j$ de waarde van $m - j$ overschrijdt. Dus $z = 0$ is een **irregulier singulier punt** van (8).

Substitueren we nu de Frobeniusreeks en zijn afgeleiden in de vergelijking, dan krijgen we

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n z^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}\alpha(n+r)a_n z^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b a_n z^{n+r} = 0. \tag{9}$$

We willen nu opnieuw dit als één grote som schrijven, en een indexvergelijking bepalen. We schrijven (9) dus om tot het volgende:

$$z^{r-1}\left(\alpha r a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\Big((n+r-2)(n+r-1)+b\Big)a_{n-1} + \alpha(n+r)a_n\right)z^n\right) = 0.$$

Dit geeft ons de indexvergelijking $\alpha r a_0 = 0$ en dus dat $r = 0$. Merk op dat in de voorgaande gevallen bij een $m^{de}$ orde differentiaalvergelijking de indexvergelijking steeds $m$ wortels had, zodat we ook $m$ lineair onafhankelijke oplossingen vonden met de methode van Frobenius. Nu hebben we slechts 1 wortel $r$ gevonden, wat zal betekenen dat we slechts 1 oplossing zullen kunnen vinden.

Met $r = 0$ krijgen we de recursieve relatie $a_n = -\frac{b+(n-1)(n-2)}{\alpha n} a_{n-1}$ en met $a_0 = 1$ levert dit de volgende constanten $a_n$:

$$a_n = (-1)^n \frac{\big(b + (1-1)(1-2)\big)\big(b + (2-1)(2-2)\big) \cdots \big(b + (n-1)(n-2)\big)}{n!\alpha^n}.$$

Dit is geen eenvoudige $a_n$ om de worteltest voor convergentie mee te doen, maar we $|a_n|$ als volgt afschatten:

$$|a_n| > \frac{b^2 n!(n-1)!}{n!\alpha^n} = |\frac{b^2(n-1)!}{\alpha^n}|,$$

en als we de nu de worteltest toepassen zien we dat $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b^2(n-1)!\alpha^{-n}|} = \infty$ voor alle $a, b$. Dit betekent dat ook zal gelden $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ voor alle $a, b$ en dus zal de reeks divergeren voor elke $z \neq 0$. We zien dus dat er bij dit voorbeeld 2 problemen optreden: ten eerste vinden we maar 1 waarde van $r$ en kunnen we de methode van Frobenius dus slechts vervolgen met 1 Frobeniusreeks. Ten tweede blijkt de oplossing die we hiermee vinden een divergerende oplossing te zijn.

De problemen die optreden in het bovenstaande voorbeeld blijken in het algemeen ook op te treden bij irreguliere singuliere punten van differentiaalvergelijkingen. We zullen bij het gebruik van de methode van Frobenius niet genoeg waarden voor $r$ vinden en zullen dus minder dan $m$ lineair onafhankelijke oplossingen vinden. Ook zullen de reeksen die we vinden niet altijd convergeren.

Om meer te weten te komen van vergelijkingen met irreguliere singuliere punten introduceren we nu allereerst de *klasse* van een vergelijking.

## 5.2 De klasse van de vergelijking

We hebben gezien dat als we de methode van Frobenius gebruiken bij een irregulier singulier punt, we nooit $m$ lineair onafhankelijke reeksen vinden en dat de reeksen die we vinden niet altijd Frobeniusreeksen zijn (omdat deze reeksen convergentiestraal 0 hebben). De oplossingen van de differentiaalvergelijking die we wel weten te vinden met de methode van Frobenius noemen we *reguliere oplossingen* rond het irreguliere punt, maar deze oplossingen zijn eerder uitzondering dan regel. Voorbeeld hiervan is Voorbeeld 5 uit het vorige hoofdstuk met $a = 1$ en $b = -2$. Na uitwerken van de methode blijken we de oplossing $y_1(z) = 1 + 2z + 2z^2$ te vinden, wat een polynoom is en dus is $y_1$ een reguliere oplossing rond $z = 0$.

We gaan in het eerste deel van dit hoofdstuk kijken naar deze reguliere oplossingen rond een irregulier punt en omdat dit de 'makkelijke' oplossingen van de differentiaalvergelijking zijn, willen we graag weten hoeveel van deze reguliere oplossingen een vergelijking heeft rond een irregulier singulier punt. Hierom definiëren we het begrip **klasse**:

**Definitie 5.1.** Beschouw een differentiaalvergelijking van de vorm (1), laat $z = z_0$ een singulier punt van deze vergelijking zijn en definiëer $\omega_j$ als de orde van de pool van $p_j(z)$ in $z = z_0$ voor $0 \leq j \leq m-1$ en $\omega_m = 0$.

Dan noemen we het grootste gehele getal $k$ waarvoor geldt dat

$$\omega_k + k = \max_{0 \leq j \leq m} \{\omega_j + j\}$$

de *klasse van de vergelijking* rond het punt $z = z_0$.

*Opmerking.* Omdat we meestal 1 vast singulier punt bekijken (namelijk het punt $z = 0$), zullen we het over het algemeen slechts hebben over de *klasse van de vergelijking*, en het 'rond $z = z_0$'-deel weglaten.

**Stelling 5.1.** *Als de klasse van een vergelijking rond een singulier punt $z = z_0$ gelijk is aan de orde van de differentiaalvergelijking ($m$), dan is $z = z_0$ een regulier singulier punt van de vergelijking.*

*Bewijs.* Beschouw een $m^{de}$ orde differentiaalvergelijking met singulier punt $z = z_0$ en stel dat de klasse van de vergelijking gelijk is aan $m$. Dan halen we uit de definitie dat geldt

$$\omega_m + m = \max_{0 \leq j \leq m} \{\omega_j + j\},$$

en omdat $\omega_m = 0$ hebben we dus dat $\max_{0 \leq j \leq m}\{\omega_j + j\} = m$. Dit betekent dat $\omega_j + j \leq m$ voor $0 \leq j \leq m$ wat we ook wel kunnen schrijven als

$$\omega_j \leq m - j$$

voor $0 \leq j \leq m$.

Aangezien $\omega_j$ de orde van de pool van $p_j(z)$ in $z = z_0$ is betekent dit dus dat $z_0$ een pool is van $p_j(z)$ van orde hoogstens $m - j$, wat exact onze definitie was van een regulier singulier punt. Dus $z_0$ is een regulier singulier punt van de differentiaalvergelijking.

We hebben nu gezien dat als de klasse maximaal is rond een singulier punt, dit singuliere punt regulier is. Nu gaan we kijken naar de eigenschappen van een differentiaalvergelijking met klasse kleiner dan $m$.

**Stelling 5.2.** *Beschouw een differentiaalvergelijking van de vorm* (1)*, laat $z = z_0$ een singulier punt van deze vergelijking zijn en laat de klasse van deze vergelijking gelijk zijn aan $l$. Dan heeft de differentiaalvergelijking hoogstens $l$ lineair onafhankelijke Frobeniusreeksen als oplossing.*

*Bewijs.* Laat $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}$, dan geldt dat de $j$-de afgeleide van deze reeks gelijk is aan

$$y^{(j)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)\cdots(n+r-j+1)a_n z^{n+r-j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+r)!}{(n+r-j)!} a_n z^{n+r-j}.$$

Merk op dat $\frac{(n+r)!}{(n+r-j)!} = (n+r)(n+r-1)\cdots(n+r-j+1)$ een polynoom in $r$ is van graad $j$.

Als we nu $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}$ en zijn afgeleides nu substitueren in de differentiaalvergelijking zal deze er dus als volgt uit komen te zien:

$$z^r \left( \sum_{n=0}^{\infty} O(r^m) a_n z^{n-m} + p_{m-1}(z) \sum_{n=0}^{\infty} O(r^{m-1}) a_n z^{n-(m-1)} + \cdots + p_0(z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) = 0,$$

waar we met $O(r^j)$ een polynoom aanduiden waarin $j$ de hoogste macht van $r$ is.

Laten we nu $g_j = \omega_j + j$ voor $0 \leq j \leq m$ (waar $\omega_j$ nog steeds de orde van de pool van $p_j(z)$ is) en delen we de gehele vergelijking door $z^r$ dan krijgen we dat de reeks van $p_j y^{(j)}(z)$ als laagste macht van $z$ het getal $n - j - \omega_j = n - g_j$ heeft. De vergelijking ziet er nu als volgt uit:

$$\sum_{n=0}^{\infty} O(r^m) a_n z^{n-g_m} + \sum_{n=0}^{\infty} O(r^{m-1}) a_n z^{n-g_{m-1}} + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n-g_0} = 0.$$

We hebben gesteld dat de klasse van de vergelijking gelijk is aan $l$ en dus geldt dat $l$ het grootste gehele getal is waarvoor geldt dat $g_l = \max_{1 \leq j \leq m}\{g_j\}$. Dan geldt dat $z^{n-g_l}$ de kleinste macht van $z$ in de vergelijking is.

Als we de methode van Frobenius volgen moeten we nu de indices van de sommen verschuiven zodat elke som $n - g_l$ als kleinste macht van $z$ heeft. De vergelijking komt er als volgt uit te zien:

$$\sum_{n=c_m}^{\infty} O(r^m) a_{n-c_m} z^{n-g_l} + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} O(r^l) a_n z^{n-g_l} + \cdots + \sum_{n=c_0}^{\infty} a_{n-c_0} z^{n-g_l} = 0,$$

voor zekere $c_0, \ldots, c_m \geq 0$.

We kunnen nu de indexvergelijking bepalen en dit is een polynoom in $r$ van graad $l$, omdat $l$ het **grootste** gehele getal is waarvoor $g_l = \max_{1 \leq j \leq m}\{g_j\}$. Stellen we deze indexvergelijking gelijk aan 0 dan vinden we dus $l$ waardes voor $r$, multipliciteit meegeteld, en kunnen we dus hoogstens $l$ lineair onafhankelijke reeksen vinden.

Als deze reeksen allemaal een positieve convergentiestraal hebben dan hebben we dus hoogstens $l$ lineair onafhankelijke Frobeniusreeksen gevonden die de vergelijking oplossen, maar het zou uiteraard kunnen dat één of meerdere reeksen convergeren voor geen enkele $z$.

Dus de differentiaalvergelijking heeft hoogstens $l$ lineair onafhankelijke Frobeniusreeksen als oplossing.

We weten nu dus dat de klasse van een vergelijking ons niet alleen direct kan vertellen of een singulier punt regulier of irregulier is, maar dus ook een manier is om aan te geven of het relevant is de methode van Frobenius toe te gaan passen. Als namelijk blijkt dat de klasse $k = 0$, dan zegt Stelling 5.2 ons dat we met de methode geen enkele reeks kunnen vinden die de vergelijking oplost.

We zien dus dat we bij irreguliere singuliere punten niet altijd een convergerende reeks kunnen vinden die de differentiaalvergelijking oplost en dus zullen we andere technieken moeten gaan gebruiken. In de volgende paragraaf introduceren we dus asymptotische benaderingen. Dit zijn benaderingen die de differentiaalvergelijking niet exact oplossen omdat ze niet convergeren naar een oplossing, maar wel een goede benadering van de oplossing kunnen geven. We zullen definities geven en vervolgens aan de hand van een voorbeeld een methode vinden om deze asymptotische benaderingen te verkrijgen.

## 5.3 Asymptotische Benaderingen: Definities en Voorbeeld

Zoals gezegd gaan we verkennen hoe een oplossing rond een irregulier singulier punt van een differentiaalvergelijking er uitziet en dit gaan we doen met asymptotische benaderingen. Om hiermee te gaan werken hebben we eerst een aantal definities nodig.

We definiëren allereerst wanneer een functie $f(z)$ 'veel kleiner is' dan een functie $g(z)$:

**Definitie 5.2.** We zeggen dat $f(z)$ **veel kleiner is dan** $g(z)$ **als** $z \to z_0$ als geldt dat

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$$

en we noteren dit als $f(z) \ll g(z)$.

Bovenstaande definitie gaan we nodig hebben om af te schatten welke delen van een vergelijking relevanter zijn voor de oplossing dan anderen.

Vervolgens definiëren we wanneer twee functies die 'asymptotisch gelijk' zijn:

**Definitie 5.3.** Twee functies $f(z)$ en $g(z)$ heten **asymptotisch gelijk als** $z \to z_0$ als geldt dat

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1,$$

en dit noteren we met $f(z) \sim g(z)$ als $z \to z_0$. Vaak laten we het deel '$z \to z_0$' weg, tenzij verwarring zou kunnen onstaan.

De hierboven gedefinieerde relatie is een equivalentierelatie omdat geldt:

- $\frac{f(z)}{f(z)} = 1$, dus geldt dat $f(z) \sim f(z)$ en is de relatie reflexief
- Als $f(z) \sim g(z)$ als geldt per definitie dat $\lim_{z\to z_0} f(z)/g(z) = 1$ en dus geldt dat

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{f(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\frac{f(z)}{g(z)}} = \frac{\lim_{z\to z_0} 1}{\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}} = \frac{1}{1} = 1,$$

  dus geldt dat $g(z) \sim f(z)$ en is de relatie symmetrisch.
- Als $f(z) \sim g(z)$ en $g(z) \sim h(z)$ dan geldt:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{h(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = 1,$$

  dus geldt dat $f(z) \sim h(z)$ en is de relatie is ook transitief. Conclusie: de gedefinieerde relatie is een equivalentierelate

*Opmerking.* Het is dus niet mogelijk om te stellen dat een functie $f(z)$ asymptotisch gelijk is aan 0, aangezien dan zou moeten gelden dat $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{0} = 1$. Met behulp van de gedefinieerde equivalentierelatie zullen we steeds een ansatz doen voor een oplossing $y(z)$ en met enkele aannames komen tot een asymptotische benadering van $y(z)$. Deze benadering kunnen we vervolgens met dezelfde methode weer verbeteren tot een nieuwe asymptotische benadering. Zo zouden we stap voor stap door kunnen gaan maar blijken zal dat we een patroon zullen gaan herkennen.

Om te beginnen zullen we kijken naar de meest algemene eerste-orde differentiaalvergelijking, de vergelijking

$$\frac{dy}{dz} + p(z)y(z) = 0$$

Van deze vergelijking is bekend dat de oplossing $y(z) = ce^{-\int p(z)dz}$ is. Omdat we vermoeden dat een hogere-orde differentiaalvergelijking ook een exponentiële functie zal bevatten nemen we als aanname in onze methode dat

$$y(z) = e^{F(z)}, \tag{10}$$

waar de vorm van $F(z)$ nog onbekend is (in het geval hierboven geldt bijvoorbeeld dat $F(z) = -\int p(z)dz$). We zullen de methode nu in eerste instantie aan de hand van een expliciet voorbeeld uitleggen en vervolgens in algemene vorm formuleren. We beschouwen dus de volgende tweede-orde differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{4}{z^4}y(z), \tag{11}$$

en zullen later laten zien wat de relevante stappen zijn voor algemene differentiaalvergelijkingen met irreguliere singuliere punten. Omdat (11) een tweede-orde differentiaalvergelijking is hebben we de eerste en tweede afgeleide van (10) nodig. Deze zijn:

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dz} &= \quad \tfrac{dF}{dz}e^{F(z)} \\ \tfrac{d^2y}{dz^2} &= \quad \tfrac{d^2F}{dz^2}e^{F(z)} + \left(\tfrac{dF}{dz}\right)^2 e^{F(z)} = e^{F(z)}\left(\tfrac{d^2F}{dz^2} + \left(\tfrac{dF}{dz}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Substitueren we nu (10) en deze afgeleides in (11) dan krijgen we na deling door de gemeenschappelijke factor $e^{F(z)}$ de volgende vergelijking:

$$\frac{d^2F}{dz^2} + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2 - \frac{4}{z^4} = 0. \tag{12}$$

Vergelijking (12) is nog steeds een tweede-orde differentiaalvergelijking en lijkt zelfs minder makkelijk op te lossen dan vergelijking (11), maar het idee van deze methode is dat we nu aannemen dat $F''(z) \ll (F'(z))^2$ als $z \to z_0$. Een dergelijke aanname noemen we ook wel een asymptotische aanname en we zullen later gaan controleren of deze aanname gegrond was.

Door de aanname kunnen we de term $F''(z)$ weglaten uit onze vergelijking en krijgen we de volgende asymptotische differentiaalvergelijking:

$$(F'(z))^2 \sim \frac{4}{z^4}$$

als $z \to 0$. Merk op dat we de term $4/z^4$ naar rechts gehaald hebben om te voorkomen dat we beweren dat een functie asymptotisch gelijk is aan 0.

We vinden op deze manier dus een benadering voor $F'(z)$, namelijk dat $F'(z) \sim \pm\frac{2}{z^2}$. Als we deze benadering differentieren krijgen we als benadering voor $F''(z)$ en zien we dat

$$F''(z) \sim \mp\frac{4}{z^3} \ll \frac{4}{z^4},$$

voor $z \to 0$. We kunnen dus concluderen dat onze aanname $F''(z) \ll (F'(z))^2$ als $z \to 0$ correct was.

Door integratie van de gevonden benadering voor $F'(z)$ hebben we nu een eerste benadering gevonden van onze oplossingen $y_1(z)$ en $y_2(z)$:

$$y_\pm(z) \sim e^{\pm\frac{2}{z}}.$$

Dit is een asymptotische benadering en het is mogelijk dat we deze benadering willen verbeteren. Dit zullen we alleen doen voor $y_+$ omdat het geval voor $y_-$ analoog gaat. Om onze benadering voor $y_+$ te verbeteren stellen we nu dat

$$y(z) = e^{\frac{2}{z}+H(z)}, \tag{13}$$

waar we eisen dat $H(z) \ll \frac{2}{z}$ als $z \to 0$. Substitueren we nu (13) en zijn tweede afgeleide in (11) en delen we door $y(z)$ dan houden we over:

$$\frac{d^2H}{dz^2} + \left(\frac{dH}{dz}\right)^2 - \frac{4}{z^2}\frac{dH}{dz} + \frac{4}{z^3} = 0.$$

We gaan nu opnieuw enkele asymptotische aannames doen. We hebben aangenomen dat $H(z) \ll \frac{2}{z}$ als $z \to 0$ en dus nemen we nu als verdere aannames dat:

- $H'(z) \ll \frac{4}{z^2}$ en dus dat $(H'(z))^2 \ll \frac{4}{z^2}H'(z)$ als $z \to 0$;

- $H''(z) \ll \frac{4}{z^3}$ als $z \to 0$.

We zullen deze aannames gebruiken en opnieuw na het toepassen controleren of dit gegronde aannames waren.

Door onze aannames kunnen we de termen $(H'(z))^2$ en $H''(z)$ laten vallen uit onze vergelijking waardoor we de asymptotische differentiaalvergelijkingen

$$\frac{4}{z^2}\frac{dH}{dz} \sim \frac{4}{z^3}$$

overhouden. Nu vinden we dus als asymptotische benadering dat $H'(z) \sim z^{-1}$ als $z \to z_0$ en dus dat $H \sim \ln(z)$ en $H''(z) \sim z^{-2}$ waardoor inderdaad geldt dat $H(z) \ll \frac{2}{z}$. De overige aannames blijken ook te kloppen dus hebben we als verbeterde asymptotische benadering dat

$$y(z) \sim e^{\frac{2}{z}+\ln(z)} = ze^{\frac{2}{z}}.$$

We zouden nu opnieuw kunnen pogen onze benadering te verbeteren maar merk op dat als we als oplossing $y(z) = ze^{\frac{2}{z}}$ substitueren dan blijkt dit al een exacte oplossing te zijn van vergelijking (11) en een verdere benadering is dus niet nodig.

## 5.4 Asymptotische benaderingen voor algemene vergelijkingen

We hebben nu met de methode van asymptotische benaderingen een oplossing gevonden van een differentiaalvergelijking met een irregulier singulier punt. We zullen nu de methode formuleren voor alle tweede-orde differentiaalvergelijkingen en hopen de lezer ervan te overtuigen dat de methode ook voor hogere ordes te gebruiken is, maar dat dit wat meer werk kost.

Beschouw dus de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p_1(z)\frac{dy}{dz} + p_0(z) = 0, \tag{14}$$

met $p_1(z), p_0(z)$ rationale functies. We veronderstellen dat $z = 0$ een irregulier singulier punt is van (14) en substitueren opnieuw de functie

$$y(z) = e^{F(z)}$$

in (14). Dit resulteert in de volgende vergelijking:

$$\left(\frac{d^2F}{dz^2} + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2 + p_1(z)\frac{dF}{dz} + p_0(z)\right)e^{F(z)} = 0.$$

Net als in ons voorbeeld doen we nu de aanname dat $F''(z) \ll (F'(z))^2$ en kunnen we de term $F''(z)$ opnieuw laten valen uit de vergelijking. We houden nu de volgende asymptotische differentiaalvergelijking over:

$$(F'(z))^2 \;\; - p(z)F'(z) - q(z)$$

als $z \to 0$. Op deze manier kunnen we nu een asymptotische benadering vinden van $F'(z)$ en kunnen we controleren of onze asymptotische aanname correct was. Dit zal niet altijd het geval zijn maar stel bijvoorbeeld dat de benadering van $F(z)$ van de volgende vorm is:

$$F(z) \sim \frac{c}{z^r},$$

met $r > 0$. Dan geldt dat $(F'(z))^2 \sim (cr)^2 z^{-(2r+2)}$ en $F''(z) \sim cr(r+1)z^{-(r+2)}$ en dus, omdat $r > 0$, geldt dat $F''(z) \ll F'(z)$.

Als we een geschikte benadering van $F(z)$ gevonden hebben kunnen we vervolgens stellen dat

$$y(z) = e^{F(z)+H(z)},$$

met de eis dat $H(z) \ll F(z)$ en kunnen we de methode opnieuw toepassen. Op deze manier kunnen we stap voor stap onze benadering van de oplossing $y(z)$ van de differentiaalvergelijking verbeteren maar dit proces kost veel tijd en moeite. Ook moeten we voortdurend aannames maken die al dan niet gegrond zijn. In het volgende hoofdstuk gaan we deze methode nog algemener maken door niet meer stap voor stap de oplossing te verbeteren maar door direct een reeks te substitueren en zo tot de gehele asymptotische vergelijking komen. Hiervoor moeten we echter eerst een nieuw begrip definiëren, het begrip ’rang’.

## 5.5 Rang van de differentiaalvergelijking

We kijken opnieuw naar de eerste-orde differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dz} + p(z)y(z) = 0, \tag{15}$$

waarvan de oplossing $y(z) = ce^{-\int p(z)dz}$ is. Stel nu dat $p(z)$ een pool van de orde $\omega$ in $z = 0$ heeft, dan heeft $p(z)$ een Laurentreeks (een machtreeks met ook negatieve machten van $z$) van de vorm $p(z) = -\sum_{n=-\omega}^{\infty} a_n z^n$ rond $z = 0$. Dit betekent dat $P(z) = \int p(z)dz$ de volgende vorm zal hebben:

$$P(z) = \frac{a_{-\omega}}{(\omega-1)z^{\omega-1}} + \cdots + \frac{a_{-2}}{z} - a_{-1}\ln(z) - a_0 z - \frac{1}{2}a_1 z^2 + \cdots$$

rond het punt $z = 0$. Dus zal de oplossing de volgende vorm hebben:

$$y(z) = e^{\frac{a_{-\omega}}{(\omega-1)z^{\omega-1}} + \cdots + \frac{a_{-2}}{z}} \cdot z^{-a_{-1}} \cdot Y(z),$$

waar $Y(z)$ de Taylorexpansie van $e^{a_0 z + a_1 z^2/2 + \cdots}$ rond $z = 0$ is. Merk op dat $z^{-a_{-1}} \cdot Y(z)$ een Frobeniusreeks is als $Y(z)$ een convergerende reeks is.

Op deze manier vinden we dus een oplossing van een algemene eerste-orde differentiaalvergelijking, en we gaan dit gebruiken voor de differentiaalvergelijkingen van de vorm (1). Hiervoor definiëren we allereerst de *rang* van de vergelijking, die we gaan gebruiken om het startpunt van de Laurentreeks te bepalen:

**Definitie 5.4.** Laat een differentiaalvergelijking van de vorm (1) zijn en laat $r_j = \frac{g_j - m}{m-j}$ voor $0 \leq j \leq m-1$, dan noemen we $r = \max_j\{r_j\}$ de **rang** van de vergelijking.

*Opmerking.* Omdat $g_j = \omega_j + j$ kunnen we ook schrijven $r_j = \frac{\omega_j}{m-j} - 1$.

**Stelling 5.3.** *De rang van de vergelijking is groter dan 0 dan en slechts dan als de vergelijking een irregulier singulier punt heeft.*

*Bewijs.* Per definitie geldt voor een irregulier singulier punt $z = z_0$ dat er een $j$ is zodanig dat $\omega_j > m - j$ dus $g_j = \omega_j + j > m$, waardoor geldt dat $r_j > 0$ en $r > 0$.

Merk op dat het mogelijk is dat de rang van een vergelijking een breuk $p/q$ is, maar dan kunnen we met de transformatie $z \mapsto z^q$ de vergelijking transformeren naar een nieuwe vergelijking, welke rang $p$ heeft. We nemen dus vanaf nu aan dat de rang van een vergelijking een geheel getal is.

De volgende stelling blijkt handig te zijn voor het vinden van de volledige asymptotische benadering, wat we in de volgende paragraaf zullen doen:

**Stelling 5.4.** *Beschouw een differentiaalvergelijking en laat $r$ de rang van de vergelijking zijn. Dan geldt voor alle $0 \leq i \leq m-1$ dat $m(r+1) \geq i(r_i+1) + \omega_i$ en gelijkheid alleen geldt als $r_i = r$.*

*Bewijs.* We hebben voor $0 \leq i \leq m-1$ dat

$$\begin{aligned} i(r_i+1)+\omega_i &= i(r_i+1)+(m-i)\tfrac{\omega_i}{m-i} = i(r_i+1)+(m-i)(r_i+1) \\ &= m(r_i+1) \leq m(r+1), \end{aligned}$$

omdat $r = \max_j\{r_j\}$. Dus $m(r+1) \geq i(r_i+1)+\omega_i$ en gelijkheid alleen als $r_i = r$.

## 5.6 Volledige Asymptotische Benadering

De rang van een differentiaalvergelijking is dus, net als de klasse, een manier om aan te geven hoe irregulier de vergelijking is. De coëfficiënt(en) $p_j(z)$ waarvoor geldt dat $r_j = r$ noemen we ook wel de meest divergerende coëfficiënt(en) van de vergelijking. In deze paragraaf zullen we net als in het geval van de eerste-orde differentiaalvergelijking (15) een oplossing proberen te vinden van de vorm

$$y(z) = e^{F(z)}Y(z), \tag{16}$$

waar $Y(z)$ een Frobeniusreeks is en $F(z)$ de volgende vorm heeft:

$$F(z) = \sum_{i=1}^{l} \frac{A_i}{z^i},$$

waar $l$ een nader te bepalen getal is.

We kunnen nu de afgeleiden van (16) bepalen en substitueren in de differentiaalvergelijking. We hebben bijvoorbeeld voor de eerste afgeleide

$$\frac{dy}{dz} = e^{F(z)}\left(\frac{dY}{dz} + Y(z)\frac{dF}{dz}\right).$$

Door de term $\frac{dF}{dz}$ in de eerste afgeleide komt er een term $-\frac{A_i}{z^{l+1}}$ voor, en dit is de term met de meest negatieve macht van $z$ die voorkomt in deze eerste afgeleide. Voor hogere afgeleiden geldt het volgende:

**Stelling 5.5.** *Laat $y(z) = e^{F(z)}Y(z)$ zijn met $F(z)$ zoals hierboven. Dan is de meest negatieve macht van $z$ in $\frac{d^iy}{dz^i}$ gelijk aan $i(l+1)$.*

Deze stelling kan bewezen worden door middel van inductie, maar dat laten we voor deze scriptie achterwege.

Na het uitvoeren van deze substitutie van (16) en afgeleiden (en het delen door de gemeenschappelijke term $e^{F(z)}$) eisen we dat de term met de meest negatieve macht van $z$ in de coëfficiënt van $Y(z)$ verdwijnt, en dit doen we met een geschikte keuze voor $A_l$. Vervolgens kunnen we met keuzes van $A_{l-1}$ tot $A_1$ eisen dat de $l$ meest divergerende termen (termen met de meest negatieve macht van $z$) verdwijnen uit de vergelijking. Om deze methode toe te passen moeten we echter wel weten welke waarde we voor $l$ moeten kiezen.

Met de hierboven beschreven methode eisen we dat de term met de meest negatieve macht van $z$ in de coëfficiënt van $Y(z)$ verdwijnt, en we zouden willen dat hiermee ook de meest divergerende coëfficiënt van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking verdwijnt. De meest divergerende coëfficiënt van de differentiaalvergelijking is de $p_j(z)$ waarvoor $r_j = r$, en deze coëfficiënt heeft als meest negatieve macht van $z$ $\omega_j$.

Uit Stelling 5.5 volgt dat na substitutie van (7) in de oorspronkelijke differentiaalvergelijking, er een term met als macht van $z$ $\omega_j + j(l+1)$ voorkomt, en dit is de meest negatieve macht van $z$ van de vergelijking. De meest negatieve macht van $z$ in $\frac{d^m y}{dz^m}$ is gelijk aan $m(l+1)$ en als geldt dat $m(l+1) = \omega_j + j(l+1)$ dan kunnen we $A_l$ zo kiezen dat de meest negatieve macht van de vergelijking verdwijnt. Uit Stelling 5.4 volgt dat dit geldt als $l = r$, dus wanneer:

$$F(z) = \sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{z^i},$$

waar $r$ de rang van de vergelijking is.

We zullen deze methode illustreren aan de hand van 2 voorbeelden:

**Voorbeeld 6.** Beschouw de eerste-orde differentiaalvergelijking

$$z^3 \frac{dy}{dz} + 2y(z) = 0, \tag{17}$$

en vind een oplossing van de vergelijking.

*Oplossing.* We hebben een differentiaalvergelijking van de vorm (1) met $m = 1$ en $p_0 = 2/z^3$ waardoor de klasse van de vergelijking gelijk is aan 0. We zullen dus geen reguliere oplossing vinden van de vergelijking. We kunnen ook zien dat de rang van de vergelijking gelijk is aan $(3-1)/(1-0) = 2$, dus we gaan op zoek naar een oplossing van de vorm

$$y(z) = e^{\frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2}} Y(z),$$

met $Y(z)$ een Frobeniusreeks. We krijgen voor de afgeleide van $y(z)$ dat

$$\frac{dy}{dz} = e^{F(z)} \left( \frac{dY}{dz} + Y(z) \frac{dF}{dz} \right) = e^{\frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2}} \left( \frac{dY}{dz} - Y(z) \left( \frac{A_1}{z^2} + \frac{2A_2}{z^3} \right) \right)$$

en als we dit in (17) substitueren dan krijgen we (na herschikken en delen door $e^{F(z)}$):

$$\frac{dY}{dz} - Y(z) \left( \frac{A_1}{z^2} + \frac{2A_2 - 2}{z^3} \right) = 0$$

We eisen nu dat de 2 meest divergerende termen in de coëfficiënt van $Y(z)$ verdwijnen en laten dus $A_2 = 1$ en $A_1 = 0$, waarna we de vergelijking $\frac{dY}{dz} = 0$ overhouden. Dit betekent dat $Y(z)$ een constante is en dat $F(z) = 1/z^2$ en

$$y(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$$

een oplossing van (17) is.

**Voorbeeld 7.** Beschouw de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{4}{z^4}y(z) = 0, \tag{18}$$

en vind twee lineair onafhankelijke oplossingen van de vergelijking.

*Oplossing.* We hebben hier een differentiaalvergelijking van de vorm (1) met $m = 2$, $p_0 = -4/z^4$ en $p_1 = 0$ en kunnen direct zien dat de klasse van de differentiaalvergelijking gelijk is aan 0, dus zullen we geen reguliere oplossingen vinden. We zien tevens dat de rang van de vergelijking gelijk is aan 1, en dus verwachten we een oplossing van de volgende vorm:

$$y(z) = e^{\frac{A}{z}}Y(z).$$

We bepalen allereerst de tweede afgeleide van deze $y(z)$:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = e^{\frac{A}{z}}\left(\frac{d^2Y}{dz^2} - \frac{2A}{z^2}\frac{dY}{dz} + \left(\frac{2A}{z^3} + \frac{A^2}{z^4}\right)Y(z)\right),$$

en als we dit nu substitueren in (18) dan krijgen we de vergelijking:

$$\frac{d^2Y}{dz^2} - \frac{2A}{z^2}\frac{dY}{dz} + \left(\frac{2A}{z^3} + \frac{A^2-4}{z^4}\right)Y(z) = 0.$$

We willen nu $A$ kiezen zodat de meest divergente term van de voorgaande vergelijking verdwijnt en aangezien er een pool van orde 4 in de vergelijking voorkomt laten we $A = \pm 2$ zodat deze verdwijnt. Laten we allereerst $A = 2$ dan krijgen we de vergelijking

$$\frac{d^2Y}{dz^2} - \frac{4}{z^2}\frac{dY}{dz} + \frac{4}{z^3}Y(z) = 0,$$

en merk op dat de klasse van deze vergelijking nu gelijk is aan 1, waardoor er mogelijk een reguliere oplossing bestaat. We voeren nu dus de methode van Frobenius uit zoals we in de vorige paragrafen al gedaan hebben met een Frobeniusreeks $Y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n+r}$.

Dit levert de indexvergelijking $(-4r+4)a_0 = 0$ waardoor we krijgen dat $r = 1$. Hieruit volgt de recursieve relatie $a_n = \frac{n-1}{4}a_{n-1}$, wat met $a_0 = 1$ geeft dat $a_1 = a_2 = \cdots = 0$, dus dat $Y(z) = z$. We hebben nu dus de eerste oplossing gevonden. Gebruiken we vervolgens dezelfde methode voor $A = -2$ dan krijgen we een tweede oplossing, lineair onafhankelijk van de eerste, wat resulteert in de volgende algmene oplossing van (18):

$$y(z) = c_1 z e^{\frac{2}{z}} + c_2 z e^{\frac{-2}{z}}.$$

Met deze methode proberen we allereerst een expressie vinden voor $F(z)$, en zo de vergelijking transformeren naar een nieuwe vergelijking afhankelijk van $Y(z)$ en afgeleiden hiervan. Deze nieuwe vergelijking heeft een hogere klasse dan de oorspronkelijke en dus kan het mogelijk zijn dat we de methode van Frobenius kunnen gebruiken, en zo een expressie voor $Y(z)$ kunnen vinden.

We kunnen nu echter niet garanderen dat de reeksen die we vinden met de methode van Frobenius zullen convergeren. Beter gezegd, we kunnen niet weten of deze reeksen Frobeniusreeksen zullen zijn. Als voorbeeld hiervan bekijken we de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{z^3}y(z) = 0, \tag{19}$$

een vergelijking met $z = 0$ als irregulier singulier punt en rang $r = \frac{1}{2}$.

Ondanks dat deze differentiaalvergelijking er niet bijzonder ingewikkeld uitziet blijkt het uitwerken van dit probleem een zeer intensief proces en we laten dit dan ook achterwege in deze tekst. De uitwerking wordt echter wel gedaan in *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* door Carl Bender en Steven Orszag (1978)[1] en de totale asymptotische benadering van één van de oplossingen $y(z)$ blijkt

$$y(z) \sim -c_1 z^{\frac{3}{4}} e^{2z^{-1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\pi 4^n n!} z^{\frac{n}{2}}$$

te zijn, waar $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. De reeks in deze benadering blijkt een convergentiestraal $\rho = 0$ te hebben wat betekent dat de reeks divergeert voor alle waardes van $z$. Dit is dus geen Frobeniusreeks en dus hebben we geen oplossing van vergelijking (19) gevonden maar slechts een asymptotische benadering.

# 6 Conclusie en Reflectie

Het is niet mogelijk te schrijven over irreguliere singuliere punten van differentiaalvergelijkingen zonder het ook over reguliere singuliere punten te hebben, en dus is het ook nooit mijn doel geweest dat mijn scriptie volledig en exclusief over irreguliere singuliere punten zou gaan. In plaats hiervan heb ik geprobeerd de lezer te introduceren met enkele methoden die worden gebruikt om $m^{de}$-orde differentiaalvergelijkingen met rationale coëfficiënten op te lossen, en laten zien op welke soort vergelijkingen deze methoden kunnen werken. Ook heb ik proberen te laten zien waarom sommige van de methodes niet werkten bij bepaalde vergelijkingen, zoals de methode van machtreeksen bij vergelijkingen met reguliere singuliere punten.

De methode van asymptotische benaderingen die geïntroduceerd werden in het laatste hoofdstuk van deze scriptie is een methode die pas sinds een paar decennia gebruikt wordt voor vergelijkingen met irreguliere singuliere punten en heeft gezorgd voor nieuwe inzichten in oplossingen van deze vergelijkingen. Ondanks dat de methode een hoop rekenwerk vergt, zou dit wellicht numeriek met een computer te doen zijn en kan het zo makkelijker worden asymptotische benaderingen te vinden. Ook geven deze benaderingen soms betere inzichten dan exacte benaderingen. Is het bijvoorbeeld interessanter om er achter te komen dat een functie $f(z)$ bij benadering gelijk is aan 0 of dat de functie $f(z)\ e^{2/z}$ als $z \to 0$?

Ik hoop dat ik met deze scriptie mensen heb kunnen interesseren en enigszins kunnen onderwijzen in het gebied van differentiaalvergelijkingen met rationale coëfficiënten. Ook heb ik laten zien wat reguliere en irreguliere punten van dit soort vergelijkingen zijn en proberen te illustreren waar deze termen vandaan komen. Tot slot heb ik gepoogd inzicht te geven in hoe deze vergelijkingen vervolgens opgelost zouden kunnen worden.

# Referenties


[1] Bender, C.M., & Orszag, S.A. (1978). *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers.* McGraw-Hill, Inc.

[2] Braun, M. (1941). *Differential Equations and their applications: an introduction to applied mathematics.* New York: Springer-Verlag.

[3] Coddington, E.A. (1961). *An Introduction to Ordinary Differential Equations.* New York: Dover Publications, Inc.

[4] Ince, E.L. (1926). *Ordinary Differential Equations.*

[5] Taylor, J.L. (1941). *Foundation of Analysis.* Providence: American Mathematical Society

[6] Yosida, K. (1991). *Lectures on Differential and Integral Equations.* New York: Interscience Publishers.