L.A.H. Veenendaal

Complexificatie van geordende vectorruimten

Bachelorscriptie, 30 januari 2015

Scriptiebegeleider: dr. O.W. van Gaans

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Inleiding

In de spectraaltheorie van operatoren speelt disjunctheid een belangrijke rol in complexe Rieszruimten. Het begrip disjunctheid in een Rieszruimte kan worden gegeneraliseerd naar partieel geordende vectorruimten [4]. Dat leidt tot de vraag of disjunctheid gegeneraliseerd kan worden naar complexe partieel geordende vectorruimten en hoe de compatibiliteit met disjunctheid in complexe Rieszruimten is. In deze scriptie wordt een natuurlijk begrip van disjunctheid in complexe partieel geordende vectorruimten gegeven, en wordt aangetoond dat dit begrip compatibel is met disjunctheid in complexe Rieszruimten.

Als eerste wordt in Hoofdstuk 1 de theorie van partieel geordende vectorruimten zorgvuldig opgebouwd. Daarna wordt kort gekeken naar de classificatie van Archimedische en Dedekind volledige partieel geordende vectorruimten.

In Hoofdstuk 2 worden de reële Rieszruimten bestudeerd. Hierbij wordt een absolute waarde geconstrueerd, waaruit het begrip disjunctheid natuurlijk volgt.

Vervolgens wordt in Hoofdstuk 3 de complexificatie van een reële Rieszruimte naar een complexe Rieszruimte geïntroduceerd. Net als in Hoofdstuk 2 kan hierbij een absolute waarde worden geconstrueerd, waarmee het begrip disjunctheid kan worden bestudeerd.

Als laatste wordt in Hoofdstuk 4 de disjunctheid in complexe deelruimten bekeken, waaronder het disjuncte complement. Hierbij wordt gebruik gemaakt van pre-Rieszruimten en het inbedden van orde dichte deelruimten in een overkoepelende Rieszruimte.

1 Geordende vectorruimten

Vectorruimten met een partiële ordening worden partieel geordende vectorruimten genoemd. Verdere classificatie van deze vectorruimten kan met de Archimedische eigenschap en Dedekind volledigheid.

Definitie 1.1. Een tweeplaatsige relatie R op een niet-lege verzameling X heet een *partiële ordening* als deze voor alle $x, y, z \in X$ voldoet aan de voldoende drie eigenschappen:

(i) xRx (reflexief),

(ii) xRy en yRx impliceert $x = y$ (anti-symmetrisch),

(iii) xRy en yRz impliceert xRz (transitief).

Notatie 1.2. De orderelatie R wordt genoteerd als $\leq$.

Definitie 1.3. Een *partieel geordende vectorruimte* is een vectorruimte X over $\mathbb{R}$ met een partiële ordening $\leq$ zodat voor alle $x, y, z \in X$ geldt:

(1) $x \leq y$ impliceert $x + z \leq y + z$,

(2) $x \leq y$ en $\alpha \geq 0$ impliceert $\alpha x \leq \alpha y$.

Notatie 1.4. Een partieel geordende vectorruimte X met de bijbehorende partiële ordening $\leq$ wordt genoteerd als $(X, \leq)$.

Voorbeeld 1.5. Een voorbeeld van een partieel geordende vectorruimte is de vectorruimte $X = \mathbb{R}^2$, met als bijbehorende partiële ordening voor alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \text{ als } x_1 < x_2 \text{ of als } x_1 = x_2 \text{ en } y_1 \leq y_2.$$

De bovenstaande ordening is bekend als de *lexicografische ordening* en de partieel geordende vectorruimte als het *lexicografisch vlak* [2].

Definitie 1.6. Een $(X, \leq)$ heet *Archimedisch* als $nx \leq y$ voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ met $x, y \in X$ impliceert dat $x \leq 0$.

Definitie 1.7. Een $(X, \leq)$ heet *Dedekind volledig* als elke niet-lege naar bovenbegrensde deelverzameling een supremum heeft.

Voorbeeld 1.8. De vectorruimte $X = C_{\mathbb{R}}[0,1]$ is een Archimedische vectorruimte, met als partiële ordening $f \leq g$ als $f(t) \leq g(t)$ voor alle $t \in [0,1]$. Merk op dat X niet Dedekind volledig is, want de deelverzameling

$$\left\{ f \in X : f \leq 0 \text{ voor } t \in [0, \frac{1}{2}), f \leq 1 \text{ voor } t \in [\frac{1}{2}, 1] \right\} \subset C_{\mathbb{R}}[0,1]$$

is naar boven begrensd door 1 maar heeft geen supremum, aangezien deze trapfunctie niet continu is.

Voorbeeld 1.9. Een voorbeeld van een Dedekind volledige vectorruimte is de rijruimte

$$\ell^p = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

voor $1 \leq p < \infty$, met als partiële ordening $x \leq y$ als $x(n) \leq y(n)$ geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Stelling 1.10. Elke Dedekind volledige vectorruimte is Archimedisch.

Bewijs. Vanuit het ongerijmde. Laat $(X, \leq)$ een Dedekind volledige vectorruimte zijn die niet Archimedisch is. Doordat X niet Archimedisch is bestaan er $x, y \in X$ met $x > 0$ zodat $nx \leq y$ geldt voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Dan is de verzameling $\{nx : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ naar boven begrensd. Merk op dat X Dedekind volledig is, dus bestaat $M = \sup \{nx : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ met als gevolg $x \leq M$ voor $n = 1$. Dan geldt:

$$M = \sup \{2nx : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\} = 2 \cdot \sup \{nx : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\} = 2M,$$

dus $M = 0$. Hieruit volgt $x \leq 0$, een tegenspraak. Dus is X Archimedisch. $\blacksquare$

2 Rieszruimten

Een belangrijke deelklasse van de partieel geordende vectorruimten zijn de Rieszruimten. Deze rijke deelklasse laat een absolute waarde toe waarmee het begrip disjunctheid kan worden gedefinieerd.

Definitie 2.1. Een $(X, \leq)$ heet een *Rieszruimte* als voor alle $x, y \in X$ een kleinste bovengrens (supremum) en een grootste ondergrens (infimum) van $\{x, y\}$ bestaat.

Notatie 2.2. Het supremum van twee elementen x en y in een Rieszruimte wordt genoteerd als $\sup\{x, y\} = x \vee y$ en het infimum als $\inf\{x, y\} = x \wedge y$.

In Hoofdstuk 3 worden Rieszruimten over $\mathbb{C}$ bestudeerd. Om het onderscheid tussen Rieszruimten over $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ duidelijk te maken worden Rieszruimten over $\mathbb{R}$, zoals gedefinieerd in Definitie 2.1, reële Rieszruimten genoemd.

2.1 Reële Rieszruimten

Door het bestaan van het supremum van twee elementen x en y kan de volgende absolute waarde voor reële Rieszruimten worden gedefinieerd.

Definitie 2.3. Laat X een reële Rieszruimte zijn. Dan is de absolute waarde $|\cdot| : X \to \mathbb{R}$ voor alle $x \in X$ gedefinieerd door:

$$|x| = x \vee (-x).$$

2.2 Disjuntheid in reële Rieszruimten

De zojuist gedefinieerde absolute waarde laat nu de volgende definitie van disjunctie in een reële Rieszruimte toe.

Definitie 2.4. Laat X een Rieszruimte zijn. Zij $x, y \in X$. Dan heten x en y *disjunct* als $|x| \wedge |y| = 0$.

Notatie 2.5. De disjunctie van twee elementen x en y in een Rieszruimte wordt genoteerd als $x \perp y$.

Voorbeeld 2.6. Laat X de reële Rieszruimte $B_{\mathbb{R}}[0, 1]$ zijn, bestaande uit alle begrensde functies van $[0, 1]$ naar $\mathbb{R}$. Definieer vervolgens de functies $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ als volgt:

$$f(t) = \begin{cases} 4t, & \text{voor } t \in [0, \frac{1}{4}], \\ -4t + 2, & \text{voor } t \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ 0, & \text{anders,} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} -4t+2, & \text{voor } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \\ 4t-4, & \text{voor } t \in [\frac{3}{4}, 1], \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Merk op dat f en g begrensd zijn, want voor alle $t \in [0,1]$ geldt $|f(t)| \leq 1$ en $|g(t)| \leq 1$. Dus $f, g \in X$. Verder geldt $|f| \wedge |g| = 0$, dus $f \perp g$. Oftewel f en g zijn disjunct.

Om bekend te worden met het begrip disjunctheid worden de volgende resultaten geïntroduceerd. In de komende hoofdstukken zal hier veelvuldig gebruik van worden gemaakt.

Stelling 2.7 (Rekenregels)**.** Zij X een Rieszruimte en laat $x, y, z \in X$ zijn. Dan gelden de volgende rekenregels:

(1) $|x-y| = x \vee y - x \wedge y$,

(2) $(x \vee z) \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ en $(x \wedge z) \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,

(3) $(x \vee z) \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$ en $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$,

(4) $x + y = x \vee y + x \wedge y$.

Bewijs. Zie Aliprantis & Tourky [2] voor (1) en (4), en Peressini [7] voor (2) en (3). ■

Lemma 2.8 (Birkhoff's inequality)**.** Zij X een Rieszruimte en laat $x, y, z \in X$ zijn. Dan geldt:

$$|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|.$$

Bewijs. Voor alle $x, y, z \in X$ geldt:

$$\begin{aligned} |x \vee z - y \vee z| + |x \wedge z - y \wedge z| &\overset{(2.7.1)}{=} (x \vee z) \vee (y \vee z) - (x \vee z) \wedge (y \vee z) \\ &\quad +(x \wedge z) \vee (y \wedge z) - (x \wedge z) \wedge (y \wedge z) \\ &\overset{(2.7.2/3)}{=} (x \vee y) \vee z - (x \wedge y) \vee z + (x \vee y) \wedge z \\ &\quad -(x \wedge y) \wedge z \\ &= ((x \vee y) \vee z + (x \vee y) \wedge z) \\ &\quad -((x \wedge y) \vee z + (x \wedge y) \wedge z) \\ &\overset{(2.7.4)}{=} (x \vee y + z) - (x \wedge y + z) \\ &= x \vee y - x \wedge y \\ &\overset{(2.7.1)}{=} |x - y|. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$|x \wedge z - y \wedge z| = |x - y| - |x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|.$$

■

Stelling 2.9. Voor alle elementen x, y en z in een Rieszruimte geldt:

$$(|x| + |y|) \wedge |z| \leq |x| \wedge |z| + |y| \wedge |z|.$$

Bewijs. Uit de ongelijkheid van Birkhoff volgt:

$$|(|x| + |y|) \wedge |z| - |y| \wedge |z|| \overset{(2.8)}{\leq} ||x| + |y| - |y|| = |x|,$$

dus

$$(|x| + |y|) \wedge |z| - |y| \wedge |z| \leq |x|.$$

Verder geldt ook:

$$(|x| + |y|) \wedge |z| - |y| \wedge |z| \leq (|x| + |y|) \wedge |z|, \text{ want } |y| \wedge |z| \geq 0.$$

Hieruit volgt:

$$(|x| + |y|) \wedge |z| - |y| \wedge |z| \leq |x| \wedge |z|,$$

dus

$$(|x| + |y|) \wedge |z| \leq |x| \wedge |z| + |y| \wedge |z|.$$

■

Lemma 2.10. Voor alle elementen x en y in een Rieszruimte en alle $\lambda \in [0, \infty)$ geldt:

$$\lambda(x \wedge y) = (\lambda x) \wedge (\lambda y).$$

Bewijs. Stel dat $\lambda = 0$. Dan geldt:

$$\lambda(x \wedge y) = 0 = (0) \wedge (0) = (\lambda x) \wedge (\lambda y).$$

Stel dat $\lambda > 0$. Dan geldt per definitie $x \wedge y \leq x$ en $x \wedge y \leq y$, dus ook $\lambda(x \wedge y) \leq \lambda x$ en $\lambda(x \wedge y) \leq \lambda y$. Hieruit volgt:

$$\lambda(x \wedge y) \leq (\lambda x) \wedge (\lambda y).$$

Vervolgens geldt:

$$\frac{1}{\lambda}((\lambda x) \wedge (\lambda y)) \leq (\frac{1}{\lambda}\lambda x) \wedge (\frac{1}{\lambda}\lambda y),$$

dus

$$(\lambda x) \wedge (\lambda y) \leq \lambda(x \wedge y).$$

■

Lemma 2.11. Als $x \perp y$, dan geldt $\lambda x \perp \mu y$ voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Laat x en y elementen in een Rieszruimte zijn zodat $x \perp y$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\lambda x| \wedge |\mu y| \\ &\leq (|\lambda||x|) \wedge (|\lambda||y|) \\ &\leq ((|\lambda| + |\mu| + 1)|x|) \wedge ((|\lambda| + |\mu| + 1)|y|) \\ &\overset{(2.10)}{=} (|\lambda| + |\mu| + 1)(|x| \wedge |y|). \end{aligned}$$

Merk op dat $x \perp y$, dus geldt $|x| \wedge |y| = 0$. Hieruit volgt $|\lambda x| \wedge |\mu y| = 0$, dus $\lambda x \perp \mu y$. ■

Lemma 2.12. Als $x \perp z$ en $y \perp z$, dan geldt $(x + y) \perp z$.

Bewijs. Laat x, y en z elementen zijn in een Rieszruimte zodat $x \perp z$ en $y \perp z$. Dan geldt:

$$0 \leq |x + y| \wedge |z| \leq (|x| + |y|) \wedge |z| \overset{(2.9)}{\leq} |x| \wedge |z| + |y| \wedge |z|.$$

Merk op dat $x \perp z$ en $y \perp z$, dus geldt $|x| \wedge |z| = 0$ en $|y| \wedge |z| = 0$. Hieruit volgt $|x + y| \wedge |z| = 0$, dus $(x + y) \perp z$. ■

Stelling 2.13 (Oneindige distributieve eigenschap)**.** Zij X een Rieszruimte en laat $A \subset X$ een niet-lege deelverzameling zijn zodat $\sup A$ bestaat. Dan bestaat $\sup_{a \in A}(a \wedge x)$ voor alle $x \in X$ en geldt de gelijkheid:

$$(\sup A) \wedge x = \sup_{a \in A}(a \wedge x).$$

Bewijs. Laat $M = \sup A$ het supremum zijn van A en laat $x \in X$ vast. Dan geldt per definitie $a \wedge x \leq M \wedge x$ voor alle $a \in A$. Laat $b \in X$ een bovengrens zijn van $a \wedge x \leq b$ voor alle $a \in A$. Dan volgt uit de vierde rekenregel van Stelling 2.7 dat voor alle $a \in A$ geldt:

$$a \wedge x = a + x - a \vee x \leq b.$$

Hieruit volgt dat voor alle $a \in A$ geldt:

$$a \leq b + a \vee x - x \leq b + M \wedge x - x,$$

dus geldt $M \leq b + M \wedge x - x$. Uit het omschrijven van de vorige ongelijkheid volgt $M \wedge x = M + x - M \vee x \leq b$ met b een willekeurig gekozen bovengrens, dus $(\sup A) \wedge x = \sup_{a \in A}(a \wedge x)$. ■

3 Complexificatie

Voor de spectraaltheorie van operatoren is het belangrijk om complexe scalars te hebben. Een mogelijke constructie hiervoor is de complexificatie [1] van een reële Rieszruimte naar een complexe Rieszruimte. Met de De Schipper formule [3] kan een absolute waarde op de complexificatie worden gedefinieerd, waarmee het begrip disjunctheid in het complexe geval kan worden bestudeerd.

3.1 Complexe Rieszruimten

Definitie 3.1. Een *complexe Rieszruimte* is een vectorruimte X over $\mathbb{C}$ zodat X over $\mathbb{R}$ een Rieszruimte is en voor alle $z \in X$ en $\alpha \in \mathbb{C}$ geldt:

$$|\alpha z| = |\alpha||z|.$$

Definitie 3.2. Laat X een reeële vectorruimte zijn. Dan is de *complexificatie* $X_{\mathbb{C}}$ van X de complexe vectorruimte $X_{\mathbb{C}} = X \oplus iX = \{x + iy : x, y \in X\}$, met de vector optelling en scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd door:

$$\begin{array}{ccl} + & : & (x + iy) + (\overline{x} + i\overline{y}) = x + \overline{x} + i(y + \overline{y}), \\ \cdot & : & (\lambda + i\mu)(x + iy) = \lambda x - \mu y + i(\mu x + \lambda y), \end{array}$$

met $x, y, \overline{x}, \overline{y} \in X$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Net als bij de reële Rieszruimten is het mogelijk om bij een complexe Rieszruimte een absolute waarde te definiëren.

Stelling 3.3. Laat X een Dedekind volledige Rieszruimte zijn met de absolute waarde $|\cdot|$. Dan is de uitbereiding van $|\cdot|$ gegeven door

$$|z| = |x + iy| = \sup_{\theta \in [0,2\pi]} |(\cos\theta)x + (\sin\theta)y|$$

een absolute waarde op $X_{\mathbb{C}}$ die voldoet aan $|iz| = |z|$.

Bewijs. Voor alle $z, \overline{z} \in X_{\mathbb{C}}$ en $\alpha \in \mathbb{C}$ gelden de volgende eigenschappen.

(i) $|z| = |x+iy| = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)x+(\sin\theta)y| \geq |(\cos\theta)x+(\sin\theta)y| \geq 0.$

(ii) "$\Rightarrow$": Stel dat $|z| = 0$. Dan geldt:

$$|z| = |x + iy| = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)x + (\sin\theta)y| \geq |(\cos\theta)x + (\sin\theta)y|.$$

Merk op dat $|z| = 0$, dus $|(\cos\theta)x + (\sin\theta)y| = 0$ voor alle $\theta \in [0, 2\pi]$. Het invullen van $\theta = 0$ en $\theta = \pi$ geeft dan respectievelijk $|x| = 0$ en $|y| = 0$, dus $x = 0$ en $y = 0$ want $|\cdot|$ is een norm. Hieruit volgt $z = x + iy = 0$.

"$\Leftarrow$": Stel dat $z = 0$. Dan geldt:

$$|z| = |0| = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)0 + (\sin\theta)0| = 0.$$

(iii) Stel dat $|\alpha| = 1$. Merk op dat α te schrijven is als $\alpha = \lambda + i\mu$. Dan geldt $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ vanwege $|\alpha| = 1$. Neem $\phi \in [0, 2\pi]$ zodat $(\sin\phi) = -\mu$. Dan geldt $(\cos\phi) = \sqrt{1-\mu^2} = \sqrt{\lambda^2} = \lambda$. Hieruit volgt:

$$\begin{array}{rcl}
|\alpha z| & = & |(\lambda + i\mu)(x + iy)| \\
& = & |(\lambda x - \mu y) + i(\mu x + \lambda y)| \\
& = & \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)(\lambda x - \mu y) + (\sin\theta)(\mu x + \lambda y)| \\
& = & \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |((\cos\theta)\lambda + (\sin\theta)\mu)x + ((\sin\theta)\lambda - (\cos\theta)\mu)y| \\
& = & \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi)x + (\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)y| \\
& = & \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos(\theta+\phi))x + (\sin(\theta+\phi))y| \\
& = & \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)x + (\sin\theta)y| \\
& = & |x + iy| \\
& = & |z|.
\end{array}$$

Verder geldt voor alle $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl}
|\gamma z| & = & |(\gamma + i\cdot 0)(x + iy)| \\
& = & |\gamma x + i(\gamma y)| \\
& = & \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)(\gamma x) + (\sin\theta)(\gamma y)| \\
& = & \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |\gamma[(\cos\theta)x + (\sin\theta)y]| \\
& = & \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |\gamma||(\cos\theta)x + (\sin\theta)y| \\
& = & |\gamma| \cdot \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)x + (\sin\theta)y| \\
& = & |\gamma||x + iy| \\
& = & |\gamma||z|.
\end{array}$$

Uit de combinatie van de zojuist bewezen eigenschappen volgt dat voor alle $\alpha \in \mathbb{C}$ geldt:

$$|\alpha z| = |\alpha||z|.$$

(iv) De driehoeksongelijkheid volgt uit:

$$\begin{aligned}
|z+\overline{z}| &= |(x+iy)+(\overline{x}+i\overline{y})| \\
&= |(x+\overline{x})+i(y+\overline{y})| \\
&= \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)(x+\overline{x})+(\sin\theta)(y+\overline{y})| \\
&= \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)x+(\cos\theta)\overline{x}+(\sin\theta)y+(\sin\theta)\overline{y}| \\
&= \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)x+(\sin\theta)y+(\cos\theta)\overline{x}+(\sin\theta)\overline{y}| \\
&\leq \sup_{\theta\in[0,2\pi]} (|(\cos\theta)x+(\sin\theta)y|+|(\cos\theta)\overline{x}+(\sin\theta)\overline{y}|) \\
&\leq \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)x+(\sin\theta)y|+\sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)\overline{x}+(\sin\theta)\overline{y}| \\
&= |x+iy|+|\overline{x}+i\overline{y}| \\
&= |z|+|\overline{z}|.
\end{aligned}$$

Uit de zojuist bewezen eigenschappen volgt dat de gegeven uitbereiding van $|\cdot|$ een absolute waarde op $X_{\mathbb{C}}$ is.

(v) De laatste eigenschap volgt nu uit:

$$\begin{aligned}
|iz| &= |i(x+iy)| \\
&= |(-y)+ix| \\
&= \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)(-y)+(\sin\theta)x| \\
&= \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)x+(-\sin\theta)(-y)| \\
&= \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)x+(\sin\theta)y| \\
&= |x+iy| \\
&= |z|.
\end{aligned}$$

■

De zojuist bewezen absolute waarde staat ook bekend als *De Schipper formule* [3].

De eis dat X Dedekind volledig moet zijn is redelijk zwaar. De volgende definitie biedt voor deze eis een zwakker alternatief.

Definitie 3.4. Een Rieszruimte X heet *complexificeerbaar* als het supremum $\sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)x+(\sin\theta)y|$ voor alle $x, y \in X$ bestaat.

3.2 Disjunctheid in complexe Rieszruimten

De volgende stelling laat een efficiënte methode zien waarmee de disjunctheid van twee elementen in een complexe Rieszruimte kan worden bepaald met behulp van de reële en imaginaire delen.

Stelling 3.5. Zij $a+ib, c+id \in X_{\mathbb{C}}$. Dan zijn $a+ib$ en $c+id$ disjunct in $X_{\mathbb{C}}$ dan en slechts dan als $a \perp c$, $a \perp d$, $b \perp d$, $b \perp c$ in X.

Bewijs. "$\Rightarrow$": Merk op dat $a+ib$ en $c+id$ disjunct zijn in $X_{\mathbb{C}}$, dus $|a+ib| \wedge |c+id| = 0$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |(\cos\theta)a + (\sin\theta)b| \wedge |(\cos\phi)c + (\sin\phi)d| \\ &\leq \left(\sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)a + (\sin\theta)b|\right) \wedge \left(\sup_{\phi\in[0,2\pi]} |(\cos\phi)c + (\sin\phi)d|\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat voor alle $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$ geldt:

$$((\cos\theta)a + (\sin\theta)b) \perp ((\cos\phi)c + (\sin\phi)d).$$

Conclusie:

$$\begin{aligned} &a \perp c \ (\theta = 0, \phi = 0),\ a \perp d \ (\theta = 0, \phi = \pi), \\ &b \perp d \ (\theta = \pi, \phi = \pi),\ b \perp c \ (\theta = \pi, \phi = 0). \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Er geldt:

$$\begin{aligned} |a+ib| \wedge |c+id| &= \left(\sup_{\theta\in[0,2\pi]} |(\cos\theta)a + (\sin\theta)b|\right) \wedge \left(\sup_{\phi\in[0,2\pi]} |(\cos\phi)c + (\sin\phi)d|\right) \\ &\overset{(2.13)}{=} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \left(\sup_{\phi\in[0,2\pi]} (|(\cos\theta)a + (\sin\theta)b| \wedge |(\cos\phi)c + (\sin\phi)d|)\right) \\ &= \sup_{\theta,\phi\in[0,2\pi]} (|(\cos\theta)a + (\sin\theta)b| \wedge |(\cos\phi)c + (\sin\phi)d|). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat voor alle $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$ geldt:

$$\begin{aligned} |(\cos\theta)a + (\sin\theta)b| \wedge |(\cos\phi)c + (\sin\phi)d| &\leq (|(\cos\theta)a| + |(\sin\theta)b|) \wedge (|(\cos\phi)c| + |(\sin\phi)d|) \\ &= (|\cos\theta||a| + |\sin\theta||b|) \wedge (|\cos\phi||c| + |\sin\phi||d|) \\ &\leq (|a| + |b|) \wedge (|c| + |d|) \\ &\overset{(2.9)}{\leq} |a| \wedge (|c| + |d|) + |b| \wedge (|c| + |d|) \\ &\overset{(2.9)}{\leq} |a| \wedge |c| + |a| \wedge |d| + |b| \wedge |c| + |b| \wedge |d| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conclusie:

$$|a+ib| \wedge |c+id| = 0,$$

dus zijn $a+ib$ en $c+id$ disjunct in $X_{\mathbb{C}}$.

■

Voorbeeld 3.6. Laat X de Rieszruimte $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ zijn. Dan wordt de complexificatie van X gegeven door $X_{\mathbb{C}} = C_{\mathbb{C}}[0,1]$, waarbij voor alle $f \in X_{\mathbb{C}}$ de absolute waarde $|f|$ gegeven wordt door $|f|(t) = |f(t)|$. Dus voldoet $X_{\mathbb{C}}$ aan de gewenste eigenschap $|f| \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$.

Aansluitend kan worden bewezen dat het volgende geldt:

$$|f| = \sup_{\theta \in [0,2\pi]} |(\cos\theta)\operatorname{Re} f + (\sin\theta)\operatorname{Im} f|.$$

Uit de *Cauchy-Schwarz ongelijkheid* (C.S.) volgt dat voor alle $t \in [0,1]$ en alle $\theta \in [0,2\pi]$ geldt:

$$\begin{array}{rcl}
|f(t)| & = & |\operatorname{Re} f(t) + \operatorname{Im} f(t)| \\
& = & 1 \cdot |\operatorname{Re} f(t) + \operatorname{Im} f(t)| \\
& = & \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \cdot \sqrt{(\operatorname{Re} f(t))^2 + (\operatorname{Im} f(t))^2} \\
& = & \left\| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(t) \\ \operatorname{Im} f(t) \end{pmatrix} \right\| \\
& \overset{\text{(C.S.)}}{\geq} & \left| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(t) \\ \operatorname{Im} f(t) \end{pmatrix} \right| \\
& = & |(\cos\theta)\operatorname{Re} f(t) + (\sin\theta)\operatorname{Im} f(t)|,
\end{array}$$

dus

$$|f(t)| \geq \sup_{\theta \in [0,2\pi]} |(\cos\theta)\operatorname{Re} f(t) + (\sin\theta)\operatorname{Im} f(t)|.$$

De gelijkheid volgt uit het feit dat er een $\theta \in [0,2\pi]$ bestaat zodat

$$\frac{1}{|f(t)|} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(t) \\ \operatorname{Im} f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

want

$$\frac{1}{|f(t)|} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(t) \\ \operatorname{Im} f(t) \end{pmatrix}$$

ligt op de eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$.

Nu is het mogelijk om te kijken naar de disjunctie van twee elementen in $X_{\mathbb{C}}$. Laat $g, h \in X_{\mathbb{C}}$ zijn zodat $g \perp h$ in $X_{\mathbb{C}}$. Dan geldt per definitie $|g| \wedge |h| = 0$ met $|g|, |h| \in X$. Hieruit volgt dat voor alle $t \in [0,1]$ geldt $|g|(t) = 0$ of $|h|(t) = 0$, dus $\operatorname{Re} g \perp \operatorname{Re} h$, $\operatorname{Re} g \perp \operatorname{Im} h$, $\operatorname{Im} g \perp \operatorname{Re} h$, $\operatorname{Im} g \perp \operatorname{Im} h$ in X.

Andersom kan er ook worden gekeken naar de disjunctie in X. Laat $k, l \in X_{\mathbb{C}}$ zijn zodat $\operatorname{Re} k \perp \operatorname{Re} l$, $\operatorname{Re} k \perp \operatorname{Im} l$, $\operatorname{Im} k \perp \operatorname{Re} l$, $\operatorname{Im} k \perp \operatorname{Im} l$ in X. Dan geldt $|k(t)| \wedge |l(t)| = 0$ voor alle $t \in [0,1]$, dus $k \perp l$ in $X_{\mathbb{C}}$.

4 Pre-Rieszruimten

Voor het bestuderen van disjunctheid in deelruimten wordt in [4] gebruik gemaakt van pre-Rieszruimten [5]. Hierbij wordt bekeken of de disjunctheid in een orde dichte deelruimte compatibel is met een overkoepelende Rieszruimte. Het disjuncte complement is hiervoor een belangrijk hulpmiddel. Met de juiste complexificatie van pre-Rieszruimten kan bestaande theorie vanuit het reële worden vertaald naar het complexe geval.

Definitie 4.1. Een partieel geordende vectorruimte $(X, \leq)$ heet *pre-Riesz* als voor alle $x, y, z \in X$ zodat elke bovengrens van $\{x+y, x+z\}$ een bovengrens is van $\{y, z\}$ geldt $x \geq 0$. (Zie Van Haandel [5]).

4.1 De inbedding van orde dichte deelruimten

Definitie 4.2. Laat $D \subseteq X$ een lineaire deelruimte zijn van een partieel geordende vectorruimte X. Dan heet D *orde dicht* in X als voor alle $x \in X$ geldt:

$$x = \inf\{y \in D : y \geq x\}.$$

Definitie 4.3. Laat X en Y partieel geordende vectorruimten zijn. Dan heet een lineaire afbeelding $j : X \to Y$ *bipositief* als voor alle $x \in X$ geldt $j(x) \geq 0$ dan en slechts dan als $x \geq 0$.

Lemma 4.4. Elke bipositieve afbeelding is injectief.

Bewijs. Laat $j : X \to Y$ een bipositieve afbeelding zijn. Zij $x, y \in X$ gegeven zodat $j(x) = j(y)$. Dan geldt per definitie $j(x) \geq j(y)$ en $j(x) \leq j(y)$. Merk op dat j een lineaire afbeelding is, hieruit volgt $j(x - y) \geq 0$ en $j(x-y) \leq 0$. Doordat j bipositief is volgt $x - y \geq 0$ en $x - y \leq 0$, dus $x \geq y$ en $x \leq y$. Zodoende geldt $x = y$, dus is j injectief. ■

Stelling 4.5 (Van Haandel)**.** Laat X een partieel geordende vectorruimte zijn. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.

(i) X is pre-Riesz.

(ii) Er bestaat een Rieszruimte Y en een bipositieve lineaire afbeelding $j : X \to Y$ zodat $j(X)$ orde dicht is in Y en Y genereert als Rieszruimte. (Zie Van Haandel [5]).

Een belangrijk gevolg van de Stelling van Van Haandel is dat de pre-Rieszruimten precies de partieel geordende vectorruimten zijn die orde dicht zijn in te bedden in een reële Rieszruimte [5].

Voor een equivalente theorie in complexe Rieszruimten is het noodzaak om een goede complexificatie van een pre-Rieszruimte te vinden. Om dit te bewerkstelligen worden de volgende lemma's geïntroduceerd.

Lemma 4.6. Laat V een $\mathbb{R}$-vectorruimte zijn en laat $A, B \subseteq V$ twee lineaire deelruimten zijn met $A \cong B$. Dan geldt $\text{span}_{\mathbb{C}}(A) \cong \text{span}_{\mathbb{C}}(B)$ in $V + iV$.

Bewijs. Het complexe opspansel van de lineaire deelruimten A en B is als volgt gedefinieerd:

$$\text{span}_{\mathbb{C}}(A) = \{a_1 + ia_2 : a_1, a_2 \in A\},$$

$$\text{span}_{\mathbb{C}}(B) = \{b_1 + ib_2 : b_1, b_2 \in B\}.$$

Doordat A en B isomorf zijn bestaat er een isomorfisme tussen A en B. Laat $j : A \to B$ een isomorfisme zijn. Definieer vervolgens de afbeelding $J : \text{span}(A) \to \text{span}(B)$ door:

$$J(a_1 + ia_2) = j(a_1) + ij(a_2).$$

Dan gelden de volgende twee voorwaarden:

(1) Voor alle $a_1 + ia_2, a_3 + ia_4 \in \text{span}_{\mathbb{C}}(A)$ geldt:

$$\begin{aligned} J(a_1 + ia_2 + a_3 + ia_4) &= J((a_1 + a_3) + i(a_2 + a_4)) \\ &= j(a_1 + a_3) + ij(a_2 + a_4) \\ &= j(a_1) + j(a_3) + i(j(a_2) + j(a_4)) \\ &= j(a_1) + ij(a_2) + j(a_3) + ij(a_4) \\ &= J(a_1 + a_2) + J(a_3 + a_4). \end{aligned}$$

(2) Voor alle $a_1 + ia_2 \in \text{span}_{\mathbb{C}}(A)$ en alle $\lambda = \alpha + i\beta$ met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\begin{aligned} J(\lambda(a_1 + ia_2)) &= J((\alpha + i\beta)(a_1 + ia_2)) \\ &= J(\alpha a_1 - \beta a_2 + i(\alpha a_2 + \beta a_1)) \\ &= j(\alpha a_1 - \beta a_2) + ij(\alpha a_2 + \beta a_1) \\ &= \alpha j(a_1) - \beta j(a_2) + i(\beta j(a_1) + \alpha j(a_2)) \\ &= (\alpha + i\beta)(j(a_1) + ij(a_2)) \\ &= \lambda J(a_1 + ia_2). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de afbeelding J $\mathbb{C}$-lineair is.

Laat $a = a_1 + ia_2, a' = a_1' + ia_2' \in \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(A)$ zijn zodat $J(a) = J(a')$. Dan geldt in $V + iV$:

$$j(a_1) - j(a_1') + i(j(a_2) - j(a_2')) = J(a) - J(a') = 0,$$

met $j(a_1) - j(a_1'), j(a_2) - j(a_2') \in V$. Hieruit volgt:

$$j(a_1) - j(a_1') = 0 \quad \text{en} \quad j(a_2) - j(a_2') = 0.$$

Merk op dat j een isomorfisme is, dus in het bijzonder injectief. Hieruit volgt $a_1 = a_1'$ en $a_2 = a_2'$, dus $a = a'$. Dus is J injectief.

Laat $b_1 + ib_2 \in \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(B)$ zijn. Doordat j een isomorfisme is geldt nu:

$$J\left(j^{-1}(b_1) + ij^{-1}(b_2)\right) = b_1 + ib_2,$$

met $j^{-1}(b_1), j^{-1}(b_2) \in A$. Dus is J surjectief.

Uit het bovenstaande volgt dat J een isomorfisme is, dus geldt:

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}}(A) \cong \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(B).$$

■

Definitie 4.7. Laat $j : X \to Y$ een lineaire afbeelding zijn. Dan is de *kern* gedefinieerd als

$$\ker(j) = \{x \in X : j(x) = 0\}.$$

Lemma 4.8. Laat $j : X \to Y$ een lineaire afbeelding zijn. Dan is j injectief dan en slechts dan als $\ker(j) = \{0\}$.

Bewijs. Stel dat j injectief is. Zij $x \in X$ gegeven zodat $j(x) = 0$, dan volgt uit de injectiviteit van j dat x uniek is. Doordat j een lineaire afbeelding is geldt $j(0) = 0$, dus $\ker(j) = \{0\}$.

Stel dat $\ker(j) = \{0\}$. Zij $x, y \in X$ zodat $j(x) = j(y)$. Dan volgt uit de lineariteit van j dat $j(x - y) = j(x) - j(y) = 0$ geldt, dus $x - y \in \ker(j)$. Doordat $\ker(j) = \{0\}$ geldt nu $x - y = 0$, dus $x = y$. Hieruit volgt dat j injectief is. ■

Stelling 4.9. Laat $X \subseteq Y$ pre-Riesz en orde dicht in Y, met Y een Dedekind volledige Rieszruimte. Definieer $X_1 = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} X$ in $Y + iY$ en $X_2 = X + iX$. Dan zijn X_1 en X_2 isomorf.

Bewijs. Merk op dat X pre-Riesz is. Dan volgt uit de Stelling van Van Haandel dat er een bipositieve lineaire afbeelding $j : X \to Y$ bestaat zodat $j(X)$ orde dicht is in Y en Y genereert als Rieszruimte. Uit Lemma 4.4 volgt dat j injectief is, dus is j een inbedding die $\mathbb{R}$-lineair en injectief is.

Laat de afbeelding $j^* : X \to Y + iY$ gegeven zijn door $j^*(x) = j(x) + i0$. Dan volgt uit de constructie dat j^* $\mathbb{R}$-lineair en injectief is. Hieruit volgt dat X en $j^*(X)$ isomorf zijn. Merk op dat $\mathrm{span}_{\mathbb{C}} X$ en $\mathrm{span}_{\mathbb{C}} j^*(X)$ lineaire deelruimten zijn van $Y+iY$, dus volgt uit Lemma 4.6 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}} X \cong \mathrm{span}_{\mathbb{C}} j^*(X)$.

Definieer de afbeelding $J : X + iX \to Y + iY$ door

$$J(a + bi) = j^*(a) + ij^*(b).$$

Dan gelden de volgende twee voorwaarden.

(1) Voor alle $a + ib, c + id \in X + iX$ geldt:

$$\begin{aligned} J(a + ib + c + id) &= J((a + c) + i(b + d)) \\ &= j^*(a + c) + ij^*(b + d) \\ &= j^*(a) + j^*(c) + i(j^*(b) + j^*(d)) \\ &= j^*(a) + ij^*(b) + j^*(c) + ij^*(d) \\ &= J(a + ib) + J(c + id). \end{aligned}$$

(2) Voor alle $a + ib \in X + iX$ en alle $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\begin{aligned} J(\lambda(a + ib)) &= J((\alpha + i\beta)(a + ib)) \\ &= J(\alpha a - \beta b + i(\alpha b + \beta a)) \\ &= j^*(\alpha a - \beta b) + ij^*(\alpha b + \beta a) \\ &= \alpha j^*(a) - \beta j^*(b) + i(\beta j^*(a) + \alpha j^*(b)) \\ &= (\alpha + i\beta)(j^*(a) + ij^*(b)) \\ &= \lambda J(a + ib). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de afbeelding J $\mathbb{C}$-lineair is.

Zij $a + ib \in X + iX$ zodat $J(a + ib) = 0 + i0$. Dan geldt $J(a + ib) = j^*(a) + ij^*(b) = 0 + i0$, dus $j^*(a) = 0$ en $j^*(b) = 0$. Merk op dat j^* injectief is, dus geldt $a = 0$ en $b = 0$. Hieruit volgt $\ker(J) = \{0\}$, dus is J injectief.

Een gevolg hiervan is $J(X + iX) \cong X_2$. Voor $J(X + iX)$ geldt:

$$J(X + iX) = \{j^*(a) + ij^*(b) : a, b \in X\}$$

met $j^*(a) + ij^*(b) \in \mathrm{span}_{\mathbb{C}} j^*(X)$ voor alle $a, b \in X$. Hieruit volgt:

$$J(X + iX) \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{C}} j^*(X).$$

Verder is $J(X + iX)$ een lineaire deelruimte van $Y + iY$ waarvoor geldt $J(X + iX) \supseteq j^*(X)$. Hieruit volgt:

$$J(X + iX) \supseteq \mathrm{span}_{\mathbb{C}} j^*(X).$$

Zodoende kan $\mathrm{span}_{\mathbb{C}} j^*(X) \cong J(X + iX)$ worden geconcludeerd. De te bewijzen uitspraak volgt nu uit:

$$X_1 \cong \mathrm{span}_{\mathbb{C}} j^*(X) \cong J(X + iX) \cong X_2.$$

■

Met het afgelopen resultaat is aangetoond dat de gekozen complexificatie van een pre-Rieszruimte inderdaad voldoet aan de gewenste eigenschappen.

4.2 Disjunctheid in pre-Rieszruimten

Het is nu de vraag of de disjunctheid in een pre-Rieszruimte X compatibel is in een grotere complexe Rieszruimte $Y_{\mathbb{C}}$ die $X_{\mathbb{C}}$ bevat. Voor het beantwoorden van deze vraag moet eerst het begrip disjunctheid in een complexe pre-Rieszruimte worden gedefinieerd.

Definitie 4.10. Zij $X \subseteq Y$ pre-Riesz en orde dicht in Y, met Y een Dedekind volledige Rieszruimte. Laat $a+bi, c+di \in X_{\mathbb{C}}$ zijn. Dan heten $a+bi$ en $c+di$ disjunct in $X_{\mathbb{C}}$ als:

$$a \perp c, a \perp d, b \perp d, b \perp c \text{ in } X.$$

Stelling 4.11 (Van Gaans - Kalauch)**.** Laat $X \subseteq Y$ pre-Riesz en orde dicht in Y, met Y een Dedekind volledige Rieszruimte. Dan geldt voor alle $x, y \in X$: $x \perp y$ in X dan en slechts dan als $x \perp y$ in Y. (Zie Van Gaans - Kalauch [4]).

Gevolg 4.12. Laat $X \subseteq Y$ pre-Riesz en orde dicht zijn in Y, met Y een Dedekind volledige Rieszruimte. Dan geldt voor alle $a, b \in X$:

$$\begin{gathered} a+bi \text{ en } c+di \text{ in } X_{\mathbb{C}} \text{ disjunct} \\ \Leftrightarrow \\ a \perp c, a \perp d, b \perp d, b \perp c \text{ in } X \\ \Leftrightarrow \\ a \perp c, a \perp d, b \perp d, b \perp c \text{ in } Y \\ \Leftrightarrow \\ a+bi \text{ en } c+di \text{ in } Y_{\mathbb{C}} \text{ disjunct.} \end{gathered}$$

Bewijs. Het is voldoende om te laten zien dat aan drie equivalenties wordt voldaan.
(1) De eerste equivalentie volgt uit Definitie 4.10.
(2) De tweede equivalentie volgt uit de stelling van Van Gaans-Kalauch.
(3) De laatste equivalentie volgt uit Stelling 3.5. ■

4.3 Het disjuncte complement

Definitie 4.13. Zij X pre-Riesz en laat $A \subseteq X_{\mathbb{C}}$ zijn. Dan definiëren wij het disjuncte complement A^d als volgt:

$$A^d := \{x \in X_{\mathbb{C}} : x \perp a \text{ voor alle } a \in A\}.$$

Het is bekend dat het disjuncte complement A^d met $A \subseteq L$ een lineaire deelruimte is van een reële Rieszruimte L [6] (zie ook Lemma's 2.11 en 2.12). Uit de volgende stelling volgt dat deze eigenschap ook geldt in een complexe Rieszruimte.

Stelling 4.14. Laat $X \subseteq Y$ pre-Riesz zijn en orde dicht in Y, met Y een dedekind volledige Rieszruimte. Dan is voor alle $A \subseteq X_{\mathbb{C}}$ het disjuncte complement A^d een lineaire deelruimte van $X_{\mathbb{C}}$.

Bewijs. Om na te gaan dat A^d een lineaire deelruimte is van $X_{\mathbb{C}}$ moeten er drie voorwaarden worden gecontroleerd.

(1) Zij $a \in A$. Dan is a per definitie als volgt te schrijven: $a = a_1 + ia_2$, met $a_1, a_2 \in X$. Dan geldt voor $0 \in Y$: $0 \perp a_1$ en $0 \perp a_2$ in Y, dus per definitie $0 + i0 \perp a$ in $Y_{\mathbb{C}}$. Uit de Stelling van Van Gaans - Kalauch volgt nu $0 \perp a$ in $X_{\mathbb{C}}$. Hieruit volgt dat $0 \in A^d$.

(2) Zij $x, y \in A^d$. Dan zijn x, y per definitie als volgt te schrijven: $x = x_1 + ix_2$ en $y = y_1 + iy_2$. Dan geldt voor alle $a \in A$:

$$x_1 + ix_2 \perp a \text{ en } y_1 + iy_2 \perp a \text{ in } X_{\mathbb{C}}.$$

Laat $a \in A$ willekeurig gegeven zijn. Dan is a per definitie te schrijven als $a = a_1 + ia_2$, met $a_1, a_2 \in X$. Per definitie volgt dan:

$$x_1 \perp a_1,\ x_1 \perp a_2,\ x_2 \perp a_1,\ x_2 \perp a_2 \text{ en } y_1 \perp a_1,\ y_1 \perp a_2,\ y_2 \perp a_1,\ y_2 \perp a_2 \text{ in } X.$$

Uit de Stelling van Van Gaans - Kalauch volgt nu dat:

$$x_1 \perp a_1,\ x_1 \perp a_2,\ x_2 \perp a_1,\ x_2 \perp a_2 \text{ en } y_1 \perp a_1,\ y_1 \perp a_2,\ y_2 \perp a_1,\ y_2 \perp a_2 \text{ in } Y.$$

Dan geeft het toepassen van Lemma 2.12:

$$(x_1 + y_1) \perp a_1,\ (x_1 + y_1) \perp a_2,\ (x_2 + y_2) \perp a_1,\ (x_2 + y_2) \perp a_2 \text{ in } Y,$$

dus volgt uit de omkering van de Stelling van Van Gaans - Kalauch:

$$(x_1 + y_1) \perp a_1,\ (x_1 + y_1) \perp a_2,\ (x_2 + y_2) \perp a_1,\ (x_2 + y_2) \perp a_2 \text{ in } X.$$

Hieruit volgt per definitie:

$$x + y = (x_1 + ix_2) + (y_1 + iy_2) = ((x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2)) \perp (a_1 + ia_2) = a.$$

Merk op dat a willekeurig gekozen is, dus geldt $(x + y) \perp a$ voor alle $a \in A$. Zodoende geldt $x + y \in A^d$.

(3) Zij $x \in A^d$ en $\lambda \in \mathbb{C}$. Dan geldt voor alle $a \in A$: $x \perp a$. Merk op dat x en λ per definitie als volgt te schrijven zijn: $x = x_1 + ix_2$ en $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ met $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Laat $a \in A$ willekeurig gegeven zijn. Dan is a per definitie te schrijven als $a = a_1 + ia_2$, met $a_2, a_2 \in X$. Per definitie geldt dan:

$$x_1 \perp a_1,\ x_1 \perp a_2,\ x_2 \perp a_1,\ x_2 \perp a_2 \text{ in } X.$$

Uit de Stelling van Van Gaans - Kalauch volgt nu dat:

$$x_1 \perp a_1,\ x_1 \perp a_2,\ x_2 \perp a_1,\ x_2 \perp a_2 \text{ in } Y.$$

Het toepassen van Lemma 2.11 geeft dan:

$$\lambda_1 x_1 \perp a_1,\ \lambda_1 x_1 \perp a_2, -\lambda_2 x_2 \perp a_1,\ -\lambda_2 x_2 \perp a_2,\ \lambda_2 x_1 \perp a_1,\ \lambda_2 x_1 \perp a_2,\ \lambda_1 x_2 \perp a_1,\\ \lambda_1 x_2 \perp a_2 \text{ in } Y.$$

Waarna uit het toepassen van Lemma 2.12 volgt:

$$(\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) \perp a_1,\ (\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) \perp a_2,\ (\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2) \perp a_1,\ (\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2) \perp a_2\\ \text{in } Y.$$

Dan volgt uit de omkering van de Stelling van Van Gaans - Kalauch:

$$(\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) \perp a_1,\ (\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) \perp a_2,\ (\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2) \perp a_1,\ (\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2) \perp a_2\\ \text{in } X.$$

Hieruit volgt per definitie:

$$\lambda x = (\lambda_1 + i\lambda_2)(x_1 + ix_2) = ((\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) + i(\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2)) \perp (a_1 + ia_2) = a.$$

Merk op dat a willekeurig gekozen is. Hieruit volgt $\lambda x \perp a$ voor alle $a \in A$. Zodoende geldt $\lambda x \in A^d$.

Hiermee is aan de drie voorwaarden voldaan, dus is A^d een lineaire deelruimte van $X_{\mathbb{C}}$. ■

Met de hier opgebouwde begrippen en resultaten kunnen ook andere eigenschappen van disjunctheid en het disjuncte complement worden bewezen. Een voorbeeld hiervan is de volgende propositie.

Propositie 4.15. Het disjuncte complement voldoet aan $A^{ddd} = A^d$.

Bewijs. Merk op dat met A^{ddd} een verkorte notatie is voor $((A^d)^d)^d$. Om de gelijkheid aan te tonen is het voldoende om te laten zien dat de inclusies $A^{ddd} \subseteq A^d$ en $A^{ddd} \supseteq A^d$ gelden.

"$\subseteq$": Zij $x \in A^{ddd}$. Dan geldt voor alle $a_{dd} \in A^{dd}$: $x \perp a_{dd}$. Merk op dat voor alle $a_{dd} \in A^{dd}$ geldt: $a_{dd} \perp a_d$, voor alle $a_d \in A^d$. Verder geldt voor alle $a_d \in A^d$: $a_d \perp a$, voor alle $a \in A$. Hieruit volgt: $x \perp a$ voor alle $a \in A$, dus $x \in A^d$.

"$\supseteq$": Zij $x \in A$ en laat $y \in A^d$ willekeurig gegeven zijn. Dan geldt voor alle $a \in A$: $y \perp a$, dus $y \perp x$. Merk op dat disjunctie symmetrisch is, dus geldt $x \perp y$. Hieruit volgt dat voor alle $a_d \in A^d$ geldt $x \perp a_d$, want y is willekeurig. Dus $x \in A^{dd}$. Hiermee is de inclusie $A \subseteq A^{dd}$ bewezen. De inclusie $A^d \subseteq A^{ddd}$ is het gevolg van $A^d \subseteq (A^d)^{dd} = A^{ddd}$.

Hiermee zijn beide inclusies aangetoond, dus geldt $A^{ddd} = A^d$.

$\blacksquare$

Referenties

[1] Y.A. Abramovich en C.D. Aliprantis, *An Invitation to Operator Theory.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002.

[2] C.D. Aliprantis en R. Tourky, *Cones and Duality.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2007.

[3] Y. Azzouzi, K. Boulabiar en G. Buskes, The de Schipper formula and squares of Riesz spaces, *Indag. Mathem., N.S.*, **17**(4) (2006), 479-496.

[4] O. Van Gaans en A. Kalauch, Disjointness in Partially Ordered Vector Spaces, *Positivity* **10** (2006) no.3, 573-589.

[5] M.B.J.G. van Haandel, *Completions in Riesz Space Theory.* Ph.D. thesis, Universiteit van Nijmegen, 1993.

[6] W.A.J. Luxemburg en A.C. Zaanen, *Riesz Spaces I.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1971.

[7] A.L. Peressini, *Ordered Topological Vector Spaces.* Harper & Row, New York, 1967.