A.D.A. van Binsbergen

‘lights out’-problemen

Bachelorscriptie

Scriptiebegeleider: Dr. F.M. Spieksma

28 augustus 2014

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Inleiding

Menigeen heeft wel eens gehoord van het 'lights out'-probleem. Over dit probleem is een hoop op internet te vinden, met name met verscheidene roosters, zogenaamde 'grids'. Het idee hiervan is dat je een heel rooster, bestaande uit lampjes die ofwel aan ofwel uit staan, vanuit een semi-willekeurige configuratie volledig uit kunt krijgen door goed gekozen lampjes van toestand te laten veranderen, waarbij de volgende eigenschap geldt:

Als lampje X van toestand verandert, oftewel van uit naar aan gaat, of van aan naar uit, dan zullen alle aangrenzende lampjes van X tevens van toestand veranderen.

Oplossingen bepalen van 5x5-grids-problemen

Op de website www.logicgamesonline.com/lightsout/ kun je proberen een willekeurige configuratie van lampjes die aan of uit staan in een 5x5-grid proberen op te lossen door op verschillende vakjes te klikken, zodat het betreffende lampje en de lampjes die eraan grenzen van toestand veranderen. De oplossing is bereikt zodra het hele grid 'uit' staat.

Algoritme om een 5x5-grid-'lights out'-probleem op te lossen

De makkelijkste manier is om de methode te gebruiken die 'light chasing' wordt genoemd. Je begint hierbij met de tweede rij en klikt op elk lampje waarvan het lampje in de rij erboven aan staat. Hierna ga je door met de derde rij en doe je hetzelfde etc. Uiteindelijk zullen er louter nog lampjes aan staan in de onderste rij. Om te weten wat je nu moet doen, is er een tabel gemaakt waarin je op kunt zoeken welke lampjes je in de bovenste rij aan moet klikken om vervolgens op dezelfde manier naar beneden te werken tot het hele grid uit staat. Laat hierbij '1' staan voor 'aan' en '0' voor 'uit'. Zie de tabel hieronder:

Onderste rij	Bovenste rij
00111	00010
01010	01001
01101	10000
10001	00011
11011	00100

Als de onderste rij bijvoorbeeld '00111' is na eenmaal van boven naar beneden te hebben gewerkt, dan moet je dus op het vierde lampje van de bovenste rij klikken om vervolgens weer naar beneden te werken om het hele grid 'uit' te krijgen.

Uiteraard werken spiegelingen hiervan ook. Nu is dit niet de effectiefste oplossing die je hiermee krijgt, want het kan gebeuren dat je lampjes meer dan eens van toestand doet veranderen. Dat is natuurlijk nergens voor nodig, gezien twee keer een lampje van toestand doen veranderen neerkomt op niets doen. Om te bepalen wat een effectievere oplossing is, kun je dit algoritme doorlopen en tevens bijhouden welke lampjes je van toestand verandert. Neem het voorbeeld hieronder:

Voorbeeld

Begintoestand:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

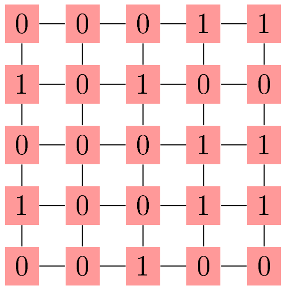
Bij de eerste keer 'light chasing' hebben we op de volgende lampjes geklikt:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

De laatste rij ziet er nu als volgt uit: 10001, wat betekent dat we volgens de tabel van de bovenste rij op de rechter twee lampjes moeten klikken om vervolgens weer 'light chasing' toe te passen. Wanneer we dit doen hebben we op de volgende lampjes geklikt:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Als we nu de beide grids bij elkaar optellen in $\mathbb{Z}_2$, krijgen we een oplossing om het volledige grid vanuit deze begintoestand uit te zetten:



Probleemstelling

Er zijn genoeg websites waar je dit door middel van trial and error kunt proberen. Tevens bestaan er algoritmes om oplossingen te vinden, danwel niet de optimale oplossing (oftewel niet per se de oplossing waarbij het aantal lampjes waarop je moet klikken minimaal is). Om te kijken of het oplossen hiervan niet op een makkelijkere en effectievere manier kan, zullen we dit probleem wiskundig gaan benaderen. Hierbij kun je een rooster zien als een samenhangende graaf waarbij de knooppunten toestand 0 (uit) of 1 (aan) kunnen hebben. In deze scriptie gaan we in op de volgende hoofdvraagstellingen:

- Is het mogelijk om elke willekeurige graaf waarvan alle knooppunten als begintoestand 0 hebben te veranderen in een graaf waarvan alle knooppunten in toestand 1 verkeren, met bovenstaande eigenschap in achting genomen?
- Is het mogelijk om elke willekeurige graaf waarvan alle knooppunten beginnen in een willekeurige toestand te veranderen in een graaf waarvan de knooppunten in een willekeurige andere gegeven toestand verkeren, met bovenstaande eigenschap in achting genomen?
- Is het mogelijk om elke willekeurige *gerichte* graaf waarvan alle knooppunten beginnen in een willekeurige toestand te veranderen in een graaf waarvan de knooppunten in een willekeurige andere gegeven toestand verkeren, met bovenstaande eigenschap in achting genomen?

In het artikel "*Turning lights out with linear algebra*" [Anderson & Feil, 1998] staat een korte schets van hoe we het probleem kunnen benaderen, namelijk via lineaire algebra met als scalairen lichaam $\mathbb{Z}_2$. We gebruiken in deze scriptie dit artikel als leidraad, maar we zullen het probleem veel uitgebreider behandelen. In dit artikel worden namelijk stappen genomen zonder dat ergens bewezen wordt waarom dit kan. In deze scriptie zullen we deze bewijzen. Tevens richt dit artikel zich louter op ongerichte grafen, waar in deze scriptie ook niet-gerichte grafen aan bod komen.

Om antwoord te kunnen geven op bovenstaande vragen, zullen we eerst een aantal stappen moeten doorlopen, namelijk:

1. Het probleem vertalen in een wiskundig probleem: we zullen een matrix-representatie van de toestandsverandering ('A') van een graaf maken en hiermee rekenen in $\mathbb{Z}_2$.
2. Het bepalen van de kolomruimte van A: deze bepaalt alle realiseerbare toestanden van de lampjes.
3. Het karakteriseren van de nulruimte van A via de zogenaamde kolomruimte van A.

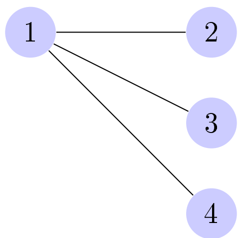
O.a. met behulp van voorbeelden zullen de antwoorden op bovenstaande vragen hopelijk duidelijk worden.

Wiskundige benadering 'lights out'-probleem

Laat $G = (V, E)$ een willekeurige graaf, waarbij V de verzameling knooppunten is en E de verzameling takken. We kunnen een $|V|\text{x}|V|-$toestandsveranderingsmatrix A opstellen, die bestaat uit de identiteitsmatrix I plus de incidentiematrix T, waarbij we stellen dat wanneer op knoop (vanaf nu 'lampje') X wordt geklikt, X zelf en alle aangrenzende lampjes van toestand veranderen. We gaan allereerst laten zien hoe je bepaalt op welke lampjes we moeten klikken om de hele graaf van toestand 0 'uit' naar toestand 1 'aan' te krijgen. Omdat we slechts te maken hebben met twee toestanden van de lampjes, rekenen we in $\mathbb{Z}_2$.

<u>Voorbeeld 1</u>

We bekijken de volgende graaf:



Dan is $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dus $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hierbij corresponderen de rijen van A met lampjes $1, 2, ...$ en de 1'en corresponderen met de aangrenzende lampjes van de gegeven rij, inclusief het lampje dat bij de rij hoort.

Wat we willen is dat de volledige graaf van toestand verandert, oftewel, we moeten een vector $x_{\mathbb{Z}_2} \in \mathbb{Z}_2^4$ bepalen waarvoor geldt: $Ax_{\mathbb{Z}_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Als $det_{\mathbb{R}}(A) \neq 0$ (en A dus inverteerbaar is) kunnen we $x_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}^4$ als volgt vinden: $x_{\mathbb{R}} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, omdat $x_{\mathbb{R}}$ dan een unieke oplossing heeft. Om van $x_{\mathbb{R}}$ naar $x_{\mathbb{Z}_2}$ te gaan is het slechts nodig om $x_{\mathbb{R}}$ om te schrijven modulo 2.

NB: Vanwege de regel van Cramer zijn de elementen van A^{-1} rationaal. Dit betekent dat er altijd een geheeltallige oplossing is.

In ons voorbeeld geldt: $det_{\mathbb{R}}A = 0$. We lossen dus $Ax_{\mathbb{Z}_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ op door de volgende vergelijkingsmatrix op te lossen in $\mathbb{Z}_2$, met hierbij de opmerking dat het rekenen in $\mathbb{Z}_2$ bij matrixvegen toegestaan is:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Na het vegen van de matrix volgt hieruit:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Oftewel, er moet gelden:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_1 &= 1 \end{aligned}$$

Dus zowel $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zijn oplossingen, wat correspondeert met het aanzetten van louter lampje 1 of van lampjes 2, 3 en 4, zoals intuïtief ook wel duidelijk was.

Nu is een logische vraag om te stellen of het altijd mogelijk is om een willekeurige graaf volledig van toestand 0 ‘uit’ naar toestand 1 ‘aan’ te krijgen. Om antwoord te kunnen geven op deze vraag, zullen we ons wat meer verdiepen in de lineaire algebra m.b.t. het lichaam $\mathbb{Z}_2$. Allereerst zullen we de nulvectoren van A (zie volgende hoofdstuk) behorende bij willekeurige grafen bestuderen, waarna we dit later zullen combineren met het ‘vegen’ van deze grafen.

Nulvectoren van A

Op de manier zoals beschreven in het vorige hoofdstuk hebben we ontzettend veel grafen bekeken, bestaande uit 4, 5 en 6 lampjes. Bij de grafen die niet inverteerbaar waren bleek iets interessants, namelijk dat een nulvector van A behorende bij de bekeken grafen altijd een even aantal 1'en bevat. Om dit beter te begrijpen zullen we eerst een nulvector als volgt definiëren:

Definitie

Een nulvector x van A is een eigenvector bij de eigenwaarde 0, in dit geval over $\mathbb{Z}_2$, met als eigenschap dat geldt: $Ax \equiv 0 \mod 2$.

We gaan nu het volgende vermoeden bewijzen:

Lemma 1

Elke nulvector van de toestandsveranderingsmatrix A van een willekeurige graaf heeft een even aantal 1'en.

Hiervoor gebruiken we de volgende eigenschap:

Eigenschap 1

1. *Elke nulvector heeft een even aantal 1'en gemeen met elke rij van de toestandsveranderingsmatrix A.*
2. *Elke nulvector heeft een oneven aantal 1'en gemeen met elke rij van de incidentiematrix T.*

Bewijs (uit het ongerijmde)

Zij x een nulvector van de toestandsveranderingsmatrix A van een willekeurige graaf $G = (V, E)$ en $r = \sum x_i$ (oftewel het aantal 1'en dat x bevat), $r \equiv 1 \text{ mod } 2$. Laat $n = |V|$ en $m = |E|$. Laat T de incidentiematrix van G. Stel x heeft een oneven aantal 1'en. Er zijn nu twee mogelijkheden:

1. $n = r$ Omdat eigenschap 1.1 geldt, moet gelden dat alle knooppunten een oneven graad hebben, omdat ze met een oneven aantal knooppunten verbonden zijn. Omdat elke tak dubbel wordt geteld, geldt voor T: $2m = \sum \delta(v)$, $v \in V$ met $\delta(v) =$ de graad van knooppunt v. Hierbij geldt dat $\delta(v)$ oneven is voor elk knooppunt v en omdat er over een oneven aantal knooppunten wordt gesommeerd (en een oneven aantal maal een oneven aantal altijd oneven is) en $2m$ altijd even is, volgt hieruit dus een tegenspraak. ↯

2. $n > r$ Z.v.v.a. kunnen we stellen dat x de volgende vorm heeft: $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

   Dit correspondeert met de volgende incidentiematrix: $T = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

   Laat T_r de rode rxr-deelmatrix van T, behorende bij de deelgraaf van G bestaande uit de eerste r knooppunten. Dan betekent dit dat $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ met r 1'en een nulvector is van T_r. Hiervoor geldt dus $n_{T_r} = r_{T_r}$ en volgens geval 1. volgt hieruit dat elke nulvector van A een even aantal 1'en bevat.

□

Gevolg

Elke nulvector van de nxn-toestandsveranderingsmatrix A van een willekeurige graaf staat loodrecht op $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ *in* $\mathbb{Z}_2$.

We zullen later zien dat deze eigenschap garandeert dat het 'lights out'-probleem oplosbaar is, dat wil zeggen: het is altijd mogelijk om alle lampjes van toestand te laten veranderen.

Oplossing bepalen voor algemene configuratievector y

Laat A de nxn-toestandsveranderingsmatrix behorende bij de graaf $G = (V, E)$. Laat y een configuratievector zijn, waarbij de configuratievector zo is gedefinieerd dat het een representatie is van de toestandsverandering die je teweeg wilt brengen bij het 'lights out'-probleem. Nu geldt dat het 'lights out'-probleem een oplossing heeft voor y als er een x bestaat voor $Ax = y$ waarbij geldt dat als je oplossing x loslaat op de graaf (oftewel op de lampjes klikt waar in vector x 1'en staan), je toestandsverandering y krijgt.

Laat $K(A)$ de kolomruimte van A zijn, met $K(A)$ ={lineaire combinaties van de kolommen van A}. Er moet nu dus gelden: $y \in K(A)$.

Nu is het over het algemeen niet makkelijk te zien of y in de kolomruimte van A zit, dus we zullen op zoek gaan naar een handige manier om dit te bepalen. Hiervoor mag A een mxn-$(0,1)$-matrix zijn, met $m \leq n$.

Laat $R(A) =$ {lineaire combinaties van de rijen van A}$\subset \mathbb{Z}_2^n$. Als A symmetrisch is, geldt: $K(A) = R(A)$.

Relatie $R(A)$, $R(A)^\perp$, $N(A)$ en $N(A)^\perp$

Neem als vectorruimte $\mathbb{Z}_2^n$.

Laat A een mxn-matrix met $a_{i,j} \in \{0,1\}$ $\forall i,j$ dan geldt: A: $\mathbb{Z}_2^n \longmapsto \mathbb{Z}_2^m$.

Laat $N(A) = \{x \in \mathbb{Z}_2^n | Ax = 0_n\}$, met 0_n de vector waarvan alle componenten 0 zijn in $\mathbb{Z}_2^n$.

Stelling 2

$R(A)^\perp = N(A)$.

Bewijs

We gebruiken Eigenschap 1.1., die zegt dat elke nulvector van A een even aantal 1'en gemeen heeft met elke rij van A. Hieruit volgt: {elke rij van A} $\perp$ {elke nulvector van A}.

Laten r_1, r_2 twee rijvectoren van A zijn en $v_n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ een nulvector van A.

Volgens de eigenschappen van een inproduct geldt:

$$\begin{aligned}(r_1 + r_2) \cdot v_n &= r_1 \cdot v_n + r_2 \cdot v_n \\ &= 0_n + 0_n = 0_n\end{aligned}$$

Oftewel: $R(A) \perp N(A)$.

Nu moeten we nog laten zien dat geldt: $R(A)^\perp \subset N(A)$ en $N(A) \subset R(A)^\perp$.

Laat $x \in R(A)^\perp$, dan geldt $\forall r$, $r \in R(A)$: $x \cdot r = 0$. Er geldt dan dus ook $Ax = 0$, oftewel $x \in N(A)$ en dus $R(A)^\perp \subset N(A)$.

Stel nu $y \in N(A)$, een willekeurige nulvector van A, dan geldt $Ay = 0$. Nu geldt voor alle rijen r van A ook: $y \cdot r = 0$ $\forall r \in R(A)$. Dus $y \in R(A)^\perp$ en dus $N(A) \subset R(A)^\perp$.

$\square$

Lemma 3

Als V een lineaire deelruimte is van $\mathbb{Z}_2^n$, dan geldt dim(V) + dim($V^\perp$) = n.

In $\mathbb{R}$ zou dit bewijs niet zo moeilijk zijn, maar we lopen in $\mathbb{Z}_2^n$ tegen het volgende probleem aan:

Neem bijvoorbeeld de vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Voor deze vector geldt in $\mathbb{Z}_2^n$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Met andere woorden: deze vector staat loodrecht op zichzelf en dus hoeft $V \cap V^\perp = \emptyset$ niet te gelden.

Bewijs

Laat $\dim(V) = p \leq n$. Stel $V = lin(v_1, ..., v_p)$, waarbij $v_1, ..., v_p$ lineair onafhankelijke vectoren zijn.

Laat M een pxn-matrix, als volgt: $M = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{p1} & \dots & v_{pn} \end{pmatrix}$,

$v_1, ...v_p$ zijn rijvectoren van M. Er geldt: rijrang(M)=p. We gaan laten zien dat geldt: kolomrang(M)=p. Je weet al dat geldt: kolomrang(M) $\leq p$, omdat de kolommen van M vectoren in $\mathbb{Z}_2^p$ zijn.

Stel q:= kolomrang(M) $< p$. Dan bevat M q lineair onafhankelijke kolomvectoren, zeg $v_{\cdot 1}, ..., v_{\cdot q}$. Voor $r > q$ zijn er $\lambda_1^r, ..., \lambda_q^r$ z.d.d. $v_{\cdot r} = \lambda_1^r v_{\cdot 1} + ... + \lambda_q^r v_{\cdot q}$.

Bekijk $\hat{v}_i = (v_{i1}, ..., v_{iq}) \in \mathbb{Z}_2$ met $i = 1, ..., p$. Aangezien $p > q$, geldt: $\{\hat{v}_i\}_{i=1}^p$ lineair afhankelijk, dus $\exists \alpha_1, ..., \alpha_p$ zodat $\sum_{i=1}^p \alpha_i \hat{v}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_q$, met 0_q de vector waarvan alle componenten 0 zijn in $\mathbb{Z}_2^q$.

Nu geldt: $\sum_{i=1}^p \alpha_i v_{ij} = 0$, met $j = 1, ..., q$. En: $\sum_{i=1}^p \alpha_i v_{ij} = \sum_{i=1}^p \alpha_i (\lambda_1^j v_{i1} + ... + \lambda_q^j v_{iq}) = 0$, voor $j > q$. Dus er geldt: $\sum_{i=1}^p \alpha_i v_i = 0_n$, maar dit kan niet, want dit is in tegenspraak met het feit dat $v_i, ..., v_p$ lineair onafhankelijke vectoren zijn. ↯

Kies nu p lineair onafhankelijke kolommen van M, zeg $v_{\cdot 1}, ..., v_{\cdot p}$. Dan: $v_{\cdot r} = \lambda_1^r v_{\cdot 1} + ... + \lambda_p^r v_{\cdot p}$ voor zekere $\lambda_1^r, ..., \lambda_p^r \in \mathbb{Z}_2$, $r = p + 1, ..., n$.

Nu: $m^r = \begin{pmatrix} \lambda_1^r \\ \vdots \\ \lambda_p^r \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in N(M)$.

Dit wil zeggen: $(v_i \cdot m^r) = 0$ met $i = 1, .., p$ en $r = p+1, ..., n$, dus $m^r \in V^\perp$. $\{m^r\}_{r=p+1}^n$ zijn lineair onafhankelijk, dus $\dim(V^\perp) \geq n - p$.

Stel $\dim(V^\perp) > n - p$. Laat $x \neq 0 \in V^\perp$ lineair onafhankelijk van $m^{p+1}, ..., m^n \subset V^\perp$. Z.v.v.a. kunnen we aannemen dat $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in V^\perp$. Nu geldt: $x_1 v_1 + ... + x_p v_p = 0_p$, maar $v_1, ..., v_p$ zijn lineair onafhankelijk, dus dit is in tegenspraak met $\dim(V^\perp) > n - p$. Uiteindelijk geldt dus: $\dim(V)$+$\dim(V^\perp) = p + n - p = n$.

$\square$

Stelling 4

$R(A) = N(A)^\perp$.

Bewijs

Uit Lemma 3 volgt dat geldt:

$$\dim(R(A)) + \dim(R(A)^\perp) = n$$
$$\dim(N(A)) + \dim(N(A)^\perp) = n.$$

Volgens Stelling 2 geldt dan ook:

$$\dim(R(A)) + \dim(N(A)) = n$$

Oftewel er geldt:

$$\dim(R(A)) = \dim(N(A)^\perp)$$

Nu moeten we nog laten zien dat geldt: $R(A) \subset N(A)^\perp$.

Laat $x \in R(A)$ een willekeurige vector en $y \in N(A)$ een willekeurige nulvector. Nu geldt: $x \cdot y = 0$ en dus geldt: $x \in N(A)^\perp$.

$\square$

Algoritme voor het bepalen van oplossingen

We hebben laten zien dat we m.b.v. de nulruimte van A (nxn-matrix) de oplossingen voor configuratie y kunnen bepalen. Nu moeten we dus nog een makkelijke manier vinden om de nulruimte van A te bepalen. Dat zullen we hieronder laten zien.

Laat A een nxn-matrix met i onafhankelijke kolommen (mod 2), zeg de eerste i. We laten Gauss-Jordaneliminatie los op A door $(A|I)$ te vegen. We krijgen dan de volgende uitkomst:

$$(E|R) = \left(\begin{array}{ccccccc|c}
\color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{\dots} & \color{red}{0} & \color{blue}{X} & \color{blue}{\dots} & \color{blue}{X} & \\
\color{red}{0} & \color{red}{\ddots} & \color{red}{\ddots} & \color{red}{\vdots} & \color{blue}{\vdots} & \color{blue}{\dots} & \color{blue}{\vdots} & \\
\color{red}{\vdots} & \color{red}{\ddots} & \color{red}{\ddots} & \color{red}{0} & \color{blue}{\vdots} & \color{blue}{\dots} & \color{blue}{\vdots} & \\
\color{red}{0} & \color{red}{\dots} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{blue}{X} & \color{blue}{\dots} & \color{blue}{X} & \quad R \quad \\
\color{green}{0} & \color{green}{\dots} & \color{green}{\dots} & \color{green}{\dots} & \color{green}{\dots} & \color{green}{\dots} & \color{green}{0} & \\
\color{green}{\vdots} & \color{green}{\vdots} & \color{green}{\vdots} & \color{green}{\vdots} & \color{green}{\vdots} & \color{green}{\vdots} & \color{green}{\vdots} & \\
\color{green}{0} & \color{green}{\dots} & \color{green}{\dots} & \color{green}{\dots} & \color{green}{\dots} & \color{green}{\dots} & \color{green}{0} &
\end{array}\right)$$

Hierbij geldt:

- $RA = E$.
- De eerste i kolommen zijn eenheidsvectoren (het rode gebied).
- De l'de kolom van A is een lineaire combinatie van de eerste i, zeg $A._l = \lambda_1^l A._1 + ... + \lambda_i^l A._i$ met $l = i+1, ..., n$ (het blauwe gebied).
- Als het groene en blauwe gebied niet bestaan, dan is A inverteerbaar en is er dus maar 1 oplossing, welke dus heel makkelijk te bepalen is, omdat dan geldt: $R = A^{-1}$.

Nu geldt voor de l'de kolom b_l van E, $l = i+1, ..., n$:

$$\begin{aligned}
b_l &= \lambda_1^l e_1 + \dots + \lambda_i^l e_i, \text{ met } l = i+1, ...n \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1^l \\ \vdots \\ \lambda_i^l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

We zullen nu laten zien dat geldt: $\begin{pmatrix} \lambda_1^l \\ \vdots \\ \lambda_i^l \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in N(A)$, $l = i+1, ...n$.

Laat k_l de l'de kolom van A. Je weet dat geldt: $\lambda_1^l k_1 + ... + \lambda_i^l k_i = k_l$. Nu geldt:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^l \\ \vdots \\ \lambda_i^l \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1^l k_1 + \ldots + \lambda_i^l k_i + k_l = 2k_l = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \pmod 2$$

$\square$

Laat nu r_l de l'de rij van R, $l = i+1, ..., n$. Dus $r_l A = (0, ..., 0)$, oftewel de laatste $n-i$ rijen van R vormen de linkernulruimte van A. Vanwege de symmetrie van A geldt nu dat de linkernulruimte van A gelijk is aan $N(A)$.

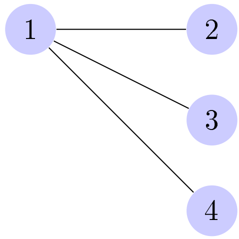
We kunnen nu het volgende algoritme opstellen om de nulruimte van A te bepalen:

Algoritme voor het bepalen van $N(A)$

1. Bepaal E en R door Gauss-Jordaneliminatie toe te passen op A, bij het vegen van $(A|I)$. Laat i het aantal eenheidsvectoren in E, zeg de eerste i kolommen.
2. Je hebt nu twee mogelijkheden om $N(A)$ te bepalen:
   (a) Neem de laatste $n-i$ kolommen van E en verander de 0 in een 1 op de diagonaal doorgetrokken vanaf de eerste i kolommen.
   (b) Neem de laatste $n-i$ rijen van R.

Voorbeeld 2

We bekijken de graaf van voorbeeld 1 en willen wederom van toestand ‘0’ naar toestand ‘1’.



We zullen nu Gauss-Jordaneliminatie op A loslaten en een E en R creëren:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ vegen geeft: } \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Dus: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Omdat E slechts één nulrij bevat, bestaat er dus maar één nulvector van A, welke wordt gegeven door de aangepaste laatste kolom van E en de laatste rij van R. Er geldt nu: $N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Met Gauss-Jordaneliminatie op A kun je dus heel eenvoudig de nulruimte van A bepalen en daarmee dus ook alle oplossingen voor elke y-configuratie met $y \in K(A) = N(A)^{\perp}$; laat x een oplossing voor configuratie y. Dan zijn de oplossingen voor y: $x + N(A)$.

Voorbeeld 2 (vervolg)

Laat $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zoals we eerder hebben gezien geldt $n_1 \in K(A)$ en is één van de oplossingen $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Een andere oplossing voor $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ is dus $x + n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dit zijn alle oplossingen.

We hebben laten zien dat geldt: $R(A) = N(A)^{\perp}$. Tevens weten we dat matrix A symmetrisch is en dus geldt $K(A) = R(A)$ en dus ook $K(A) = N(A)^{\perp}$. We hebben verder laten zien dat y alleen een oplossing heeft als geldt: $y \in K(A)$.

Er geldt dus het volgende:

Het ‘lights out’-probleem heeft alleen een oplossing voor de configuratievector y als geldt: $y \in N(A)^{\perp}$.

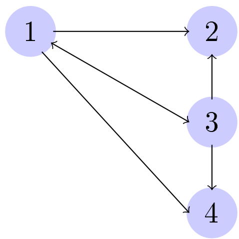
Dit verklaart ook meteen waarom je bij elk 'lights out'-probleem dat uitgaat van een toestand waarbij alles 'uit' staat, altijd naar de toestand waarbij alles 'aan' staat kunt komen. We hebben namelijk geconcludeerd dat elke nulvector van de toestandsveranderingsmatrix van een willekeurige graaf loodrecht staat op $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Dit betekent: $y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in N(A)^{\perp}$.

Extra: oplossingen voor het ‘lights out’-probleem voor gerichte grafen

Laat $G = (V, \overrightarrow{E})$, met V de knooppuntenverzameling en $\overrightarrow{E}$ de verzameling gerichte pijlen. Om een matrix A voor G te construeren, nemen we in iedere rij i van de incidentiematrix T die met knooppunt i correspondeert louter de knooppunten op die een pijl *naar* knooppunt i hebben. Dan correspondeert immers de toestandsverandering ten gevolge van het klikken op lampje 1 met het beeld van de eerste eenheidsvector onder A.

Voorbeeld 3

Neem bijvoorbeeld deze graaf:



Hierbij geldt: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lemma 5

$K(A) = N(A^T)^\perp$. *Het algoritme voor het bepalen van* $N(A)$ *met stap 2b (voor gerichte grafen) geeft* $N(A^T)$.

Bewijs

Voor gerichte grafen is het probleem dat geldt: $R(A) \neq K(A)$, echter geldt nog steeds stelling 4. We weten dat geldt: $R(A^T) = K(A)$, dus geldt ook: $K(A) = N(A^T)^\perp$. Als we dan Gauss-Jordaneliminatie toepassen op A, krijgen we matrices E en R, waarbij de laatste $n - i$ rijen van R de linker-nulruimte van A vormen. Voor deze r_k met $k = i + 1, ..., n$ geldt: $r_k \in N(A^T)$.

$\square$

Voorbeeld 3 (vervolg)

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ vegen geeft: } \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Hierbij is het gedeelte na de streep matrix R en vormt de onderste rij hiervan de linker-nulvector van A, dus $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Er geldt: $K(A) = N(A)^\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in K(A)$.

Het is makkelijk te zien dat één van de oplossingen voor configuratie $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de volgende is: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Een andere oplossing voor dit probleem is dan: $x + n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Het mag duidelijk zijn dat bij gerichte grafen niet meer geldt dat $y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ altijd een oplossing heeft.

Referenties

Artikel

- Anderson, M., Feil, T. (1998). Turning lights out with linear algebra. *Mathematics Magazine*, Vol. 71, No. 4, pp. 300-303.

Website

- www.logicgamesonline.com/lightsout/