Youssef Achnine

Rationale tetraëders.

Bachelorscriptie, 1 juni 2009

Scriptiebegeleider: Dr. R.M. van Luijk

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

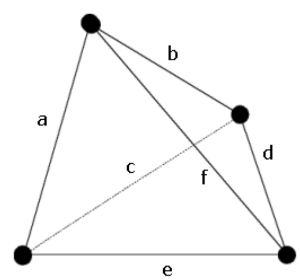
Inhoudsopgave

Introductie 2
1. Topologische begrippen en stellingen 4
2. Parametrisatie 9
2.1. De affiene ruimte 9
2.2. De projectieve ruimte 10
2.3. Morfismen 11
2.4. Parametriseren 14
3. De rationale punten bij het geval VI 18
3.1. Het geval VI 18
3.2. Het affiene deel 19
3.3. Oneindig veel rationale punten en kegelsneden 20
3.4. Samenvatting en conclusie 21
Referenties 22

Introductie

Deze scriptie gaat over tetraëders waarvan alle zes de zijden en de inhoud rationale getallen zijn. Deze tetraëders heten rationale tetraëders. Laat V de inhoud zijn van de tetraëder met lengtes van de zijden a, b, c, d, e en f met de eigenschap dat de zijden in ieder paar $(a, d), (b, c)$ en (c, f) tegenover elkaar liggen en dat de zijden a, b en c een driehoek vormen. Dan geldt de volgende vergelijking voor de inhoud [2, p. 2] :

$$\begin{aligned}(12V)^2 \quad = \quad & (a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2c^2+c^2f^2)+ \\ & (b^2+e^2)(a^2d^2-b^2c^2+c^2f^2)+ \\ & (c^2+f^2)(a^2d^2+b^2c^2-c^2f^2)- \\ & a^2b^2c^2-a^2c^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2.\end{aligned}$$



Een tetraëder.

Andersom, als de rationale oplossingen van deze vergelijking aan een aantal ongelijkheden voldoen dan corresponderen deze oplossingen ook met de zijden van rationale tetraëders. Deze vergelijking bepaalt een algebraïsch oppervlak in de gewogen projectieve ruimte $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}(1,1,1,1,1,1,3)$ met coördinaten a, b, c, d, e, f en V en als we $a = 1$ nemen dan bepaalt de vergelijking een algebraïsch oppervlak in de gewone 6-dimensionale ruimte. De rationale oplossingen worden dan geschaald en opnieuw corresponderen de rationale tetraëders (op schaling na) met punten op dit oppervlak waarvan alle coördinaten rationaal zijn en aan bepaalde ongelijkheden voldoen.

Gezien het grote aantal variabelen in de vergelijking van V is het lastig om rationale tetraëders te bestuderen. Buchholz [2, 3, p. 3] heeft een classificatie gemaakt van rationale tetraëders waarbij in iedere klasse bepaalde zijden even lang zijn. Een groot deel van deze klassen is bestudeerd door Catherine Chisholm in haar master scriptie [3]. Het simplste voorbeeld is het geval $a = b = c = d = e = f$. Uit de vergelijking boven volgt dat $(12V)^2 = 2a^6$ en dus $\left(\frac{12V}{a^3}\right)^2 = 2$ als $a \neq 0$. Maar 2 is geen kwadraat van een rationaal getal dus er zijn geen rationale tetraëders waarvan alle zijden even groot zijn en ongelijk zijn aan 0. Door rationale tetraëders op deze manier te klassificeren kunnen we spreken van n-parameter tetraëders: de familie tetraëders waarin iedere tetraëder hoogstens n zijden heeft die verschillende lengtes hebben. Het voorbeeld met $a = b = c = d = e = f$ is een 1-parameter geval. Bekijk de tabel [1, Introduction, p. 3] op de volgende pagina:

Tabel 1. aantal rationale oplossingen bij 3-parameter tetraëders

Geval	Beschrijving	Aantal rationale oplossingen
1	$a = b = c = d$	0
2	$a = c = d = f$	∞
3	$a = b = c, d = e$	0
4	$a = d = f, b = c$	0
5	$a = d = f, b = e$	∞
6	$a = d, b = e, c = f$	∞
7	$a = e, b = f, c = d$	0
8	$a = b, d = e = f$	∞
9	$a = d, b = f, c = e$	∞
10	$a = e, b = c, d = f$	0

Hierop de verschillende gevallen zijn te zien behorende bij de 3-parameter tetraëders. We gaan in deze scriptie geval VI met $a = d$, $b = f$ en $c = e$ verder onderzoeken. Voor dit geval heeft Buchholz [2, p. 7] bewezen dat er oneindig veel rationale oplossingen zijn maar er is niet bewezen of de rationale punten Zariski dicht liggen op het bijbehorende algebraïsch oppervlak. Wij gaan in deze scriptie dit bewijzen.

Deze scriptie bevat drie hoofdstukken. Hoofdstuk I staan de topologische definities en stellingen (met bewijzen) die we nodig hebben. De definities en stellingen hier zijn in het algemeen geformuleerd en wij hebben bijna elk lemma en elke stelling voorzien van een bewijs. In Hoofdstuk II komt de benodigde algebraïsche meetkunde kennis aanbod. Anders dan in Hoofdstuk I hebben we vooral naar bronnen verwezen. We hebben ook voorbeelden uitgebreid uitgewerkt om de lezer een vertrouwd gevoel met de materie van dit hoofdstuk te geven. In hoofdstuk III monden de eerste twee hoofdstukken uit. We formuleren en bewijzen een stelling die zegt dat de rationale punten Zariski dicht liggen op het algebraïsche oppervlak behorend bij geval VI.

Ik ben heel veel dank verschuldigd aan mijn begeleider Dr. Ronald van Luijk voor zijn intensieve begeleiding en zijn heldere uitleg. Ik wil hem ook bedanken voor zijn zeer opbouwende commentaren en verbeteringen met betrekking tot mijn scriptie en mijn voordrachten.

1. Topologische begrippen en stellingen

In dit hoofdstuk gaan we topologische begrippen definieren die we later in deze scriptie expliciet of impliciet gaan gebruiken.

Definitie 1. *Een topologische ruimte X heet irreducibel als X niet leeg is en niet te schrijven is als vereniging $X = X_1 \cup X_2$ van echte gesloten deelverzamelingen van X.*

Definitie 2. *Zij X een topologische ruimte. De (Krull) dimensie van X (notatie: $\dim X$) is het supremum van de lengtes van ketens ($X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_n \subset X$, n geheel) van lengte n van irreducibele gesloten deelverzamelingen van X. Dit supremum kan oneindig zijn en we definieren* $\dim \emptyset := -\infty$.

Opmerking De dimensie van een gesloten deelverzameling $\tilde{X}$ van X is de dimensie van $\tilde{X}$ als topologische ruimte met de geïnduceerde topologie.

Lemma 3. *Een topologische ruimte X is irreducibel dan en slechts dan als voor iedere twee open deelverzamelingen $U, V \subset X$ geldt $U \cap V \neq \emptyset$.*

Bewijs Als X geen echte open deelverzamelingen bevat dan bevat X ook geen echte gesloten deelverzamelingen en en de beweringen zijn equivalent.
Stel X is irreducibel en $U \cap V = \emptyset$ door complementen te nemen krijgen we $U^c \cup V^c = X$. Voor U en V echte deelverzamelingen van X met $U^c \cup V^c = X$ volgt dat X niet irreducibel is . Dit is in tegespraak met onze veronderstelling.
Stel nu dat $U \cap V \neq \emptyset$ dan geldt $U^c \cup V^c \neq X$ ook voor echte gesloten deelverzamelingen U^c en V^c van X en dus is X irreducibel. □

.

Definitie 4. *Zij X een topologische ruimte. Een deelverzameling Y van X heet een irreducibele component van X als:*

1. *Y irreducibel en gesloten is, én*
2. *Als $Z \subset X$ irreducibel en gesloten is en $Y \subset Z$ dan geldt $Z = Y$.*

Lemma 5. *Zij X een topologische ruimte. Laat $A \subset X$ een niet-lege deelruimte zijn. Dan zijn de volgende beweringen equivalent:*

1. *A is irreducibel.*
2. *Laten $U, V \subset X$ twee open verzamelingen zijn met $U \cap A \neq \emptyset$ en $V \cap A \neq \emptyset$. Dan geldt $U \cap V \cap A \neq \emptyset$.*

Bewijs ($\Rightarrow$) : Stel dat A irreducibel is en $U \cap V \cap A = \emptyset$. Dan geldt $U^c \cup V^c \cup A^c = X$. Dus $A = A \cap X = A \cap (U^c \cup V^c \cup A^c) = (A \cap U^c) \cup (A \cap V^c) \cup (A \cap A^c) = (A \cap U^c) \cup (A \cap V^c) \cup \emptyset = A \cap U^c) \cup (A \cap V^c)$. De verzamelingen V^c en U^c zijn gesloten in X dus $(A \cap U^c)$ en $(A \cap V^c)$ zijn twee gesloten deelverzamelingen van A die A als vereninig hebben. Dit is in tegespraak met de aanname dat A irreducibel is. Dus inderdaad geldt $U \cap V \cap A \neq \emptyset$.
($\Leftarrow$) : Stel voor iedere twee open verzamelingen met $U \cap A \neq \emptyset$ en $V \cap A \neq \emptyset$ geldt $U \cap V \cap A \neq \emptyset$. Dan geldt $(U \cap A) \cap (V \cap A) = U \cap V \cap A \neq \emptyset$. De verzamelingen $U \cap A$ en $V \cap A$ zijn open en hun doorsnijding is niet leeg. Volgens lemma 3 is A irreducibel. □

Uit deze stelling kan men direct het volgende bewijzen:

Lemma 6. *Zij X een irreducibele topologische ruimte. Zij $Y \subset X$ een niet-lege open verzameling. Dan geldt $\overline{Y} = X$.*

Lemma 7. *Zij X een topologische ruimte. Dan geldt:*

(1) *Iedere irrudcibele deelverzameling van X is bevat in een irreducibele component.*
(2) *X is de vereniging van zijn irreducibele componenten.*

Bewijs Zij $(A_i)_{i\in I}$ een familie irreducibele deelverzamelingen van X. Dan is $(A_i)_{i\in I}$ totaal geordend m.b.v de inclusie ordening. Definieer $A := \bigcup_{i\in I} A_i$. Laat $U, V \subset X$ twee open verzamelingen in X zijn met $A \cap U \neq \emptyset$ en $A \cap V \neq \emptyset$. De familie $(A_i)_{i\in I}$ is totaal geordend dus er is een $k \in I$ met $U \cap A_k \neq \emptyset$ en $V \cap A_k \neq \emptyset$. Omdat A_k irreducibel is, volgt uit lemma 5 dat $U \cap V \cap A_k \neq \emptyset$. Nu volgt (1) uit het lemma van Zorn. De bewering (2) volgt uit het feit dat iedere $\{x\} \subset X$ met $x \in X$ irreducibel is. □

Definitie 8. *Een topologische ruimte X heet noethers indien voor iedere dalende keten $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq ...$ van gesloten deelverzamelingen van X een geheel getal r bestaat met $Y_j = Y_r$ voor $j \geq r$.*

Propositie 9. *Zij X een noetherse topologische ruimte. Dan is iedere niet-lege gesloten deelverzameling Y van X te schrijven als een eindige vereniging $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup ... \cup Y_r$ van irreducibele gesloten deelverzamelingen $Y_1, Y_2, ..., Y_r$. Als we bovendien eisen dat $Y_i \nsubseteq Y_j$ voor $i \neq j$ $(i, j \in \{1, ..., r\})$ dan zijn $Y_1, ..., Y_r$ uniek bepaald en iedere Y_i (voor $i = 1, ..., r$) is een irreducibele component van Y.*

Bewijs Voor de bewijzen van de existentie en de uniciteit hebben we [5, I.1, Propositie 5] geraadpleegd.

Zij Γ de verzameling van niet lege gesloten deelverzamelingen van X die niet geschreven kunnen worden als een eindige vereniging van irreducibele gesloten deelverzamelingen van X. Neem aan dat Γ niet leeg is. Omdat X noethers is, heeft Γ een minimaal element Y. Er volgt dan dat Y niet irreducibel is en dus $Y = Y_1 \cup Y_2$ met Y_i een gesloten deelverzameling van Y en $Y_i \neq Y$ voor $i = 1, 2$. Omdat Y minimaal gekozen was, geldt nu dat Y_1 en Y_2 beide geschreven kunnen worden als een eindige vereniging van irreducibele gesloten deelverzamelingen van X dus Y is ook te schrijven als een eindige vereniging van irreducibele gesloten deelverzamelingen van X. Dit is in tegenspraak met onze aanname. We concluderen dat iedere niet lege gesloten deelverzameling Y van X geschreven kan worden als $Y = \bigcup_{i=1,...r} Y_i$ met $Y_1, ..., Y_r$ irreducibel en gesloten en $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Door een aantal van deze deelverzamelingen weg te laten (indien mogelijk) kunnen we aannemen dat $Y_i \supsetneq Y_j$ als $i \neq j$.
Zij $Y \subset X$ een gesloten deelverzameling. Schrijf $Y = \bigcup_{i=1,...,r} Y_i$ met $Y_1, ..., Y_r$ irreducibel en gesloten en $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Stel $Z = \bigcup_{j=1,...,s} Z_j$ met $Z_1, ..., Z_s$ irreducibel gesloten en $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. We laten zien dat de representatie uniek is (op volgorde van de deelverzamelingen na).
Er geldt $Y_1 = Y_1 \cap Y = Y_1 \cap \bigcup_{j=1,...,s} Z_j = \bigcup_{j=1,...,s}(Y_1 \cap Z_j)$. Aangezien Y_1 irreducibel is, geldt nu $Y_1 \subset Z_j$ voor zekere j in $\{1, 2, ..., s\}$. Neem aan z.d.v.a dat $j = 1$. Er geldt op dezelfde manier dat $Z_1 \subset Y_i$ voor zeker i in $\{1, 2, ..., r\}$. Maar dan volgt dat $Y_1 \subset Z_1 \subset Y_j$ en dus $j = 1$. We concluderen dat $Y_1 = Z_1$. Definieer $M := \overline{Y \backslash Y_1}$ dan geldt $M = \bigcup_{i=2,...,r} Y_i = \bigcup_{j=2,...,s} Z_j$. Door hetzelfde proces te herhalen concluderen we dat Y_i uniek zijn.
We laten zien dat voor alle $i \in \{1, ..., r\}$ geldt dat Y_i een irreducibele component is van X. Volgens definitie 4 hoeven we nu alleen de tweede eis na te gaan. Het is

voldoende om dit te bewijzen voor $i = 1$ (voor andere i gaat het bewijs op dezelfde manier).
Zij $Z \subset Y$ gesloten en irreducibel. Stel dat $Y_1 \subset Z$. Er geldt $Z = Y \cap Z = (Y_1 \cup Y_2 \cup .. \cup Y_r) \cap Z = (Y_1 \cap Z) \cup (Y_2 \cap Z) \cup ... \cup (Y_r \cap Z)$. Maar Z was irreducibel dus er is een $i \in \{1, 2, ..., r\}$ met $Z \subset Y_i$. Dit geeft $Y_1 \subset Z \subset Y_i$. We hebben geeist dat $Y_i \not\supseteq Y_j$ als $i \neq j$ dus er moet gelden $i = 1$ en dus $Z = Y_1$. Dus Y_1 is een irreducibele gesloten component. $\square$

Lemma 10. *Zij X een topologische ruimte. Stel dat Y een irreducibele deelruimte is van X. Dan is $\overline{Y}$ irreducibel.*

Bewijs Laat $Y \subset X$ een irreducibele deelruimte zijn. Stel dat $\overline{Y} = V \cup W$ met V en W twee gesloten deelverzamelingen van $\overline{Y}$. Dan geldt $Y = Y \cap \overline{Y} = (V \cap Y) \cup (W \cap Y)$. Omdat Y irreducibel is, geldt $V \cap Y = Y$ of $W \cap Y = Y$. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aan nemen dat $V \cap Y = Y$. Dus $Y \subset V$ en dus $\overline{Y} \subset V$. We concluderen dat $\overline{Y}$ irreducibel is. $\square$

Lemma 11. *Zij X een topologische ruimte. Zij Y een deelruimte van X. Stel dat Z een deelverzameling van Y is. Dan geldt $\overline{Z}^Y = Y \cap \overline{Z}^X$.*

Bewijs Neem X, Y en Z zoals in het lemma.
"$\subset$": Merk op dat $\overline{Z}^X$ gesloten is in X. Dus $Y \cap \overline{Z}^X$ is gesloten in Y. Omdat $\overline{Z}^Y$ de kleinste gesloten verzameling in Y is die Z bevat, geldt nu dat $\overline{Z}^Y \subset Y \cap \overline{Z}^X$.
"$\supset$": De verzameling $\overline{Z}^Y$ is gesloten in Y. Dus $\overline{Z}^Y = Y \cap W$ met W een gesloten deelverzameling van X. Er geldt $\overline{Z}^X \subset W$ dus $\overline{Z}^X \cap Y \subset Y \cap W = \overline{Z}^Y$.
We concluderen dat $\overline{Z}^Y = Y \cap \overline{Z}^X$. $\square$

Gevolg 12. *Zij X een topologische ruimte. Zij Y gesloten deelruimte van X. Stel dat Z een deelverzameling van Y is. Dan geldt $\overline{Z}^Y = \overline{Z}^X$.*

Bewijs Uit lemma 11 volgt dat $\overline{Z}^Y = Y \cap \overline{Z}^X$. Het is dus voldoende om te bewijzen dat $Y \cap \overline{Z}^X = \overline{Z}^X$.:
"$\subset$": Triviaal.
"$\supset$": Er geldt $Z \subset Y$ en Y is gesloten dus $\overline{Z}^X \subset Y$ en dus $\overline{Z}^X \subset \overline{Z}^X \cap Y$.
Hieruit volgt dat $Y \cap \overline{Z}^X = \overline{Z}^X$ en volgens lemma 11 geldt nu $\overline{Z}^Y = \overline{Z}^X$. $\square$

Om een verband te kunnen leggen tussen de dimensie van X en zijn irreducibele componenten (deze zijn maximaal t.o.v van de inclusie ordening van verzamelingen) hebben we het keuzeaxioma nodig. Uit dit axioma volgt het lemma van Zorn:

Lemma 13. *Zij een A partieel geordende verzameling. Als iedere keten in A een bovengrens heeft, heeft A een maximaal element in A.*

Bewijs Zie [6, I.1, Stelling 8.1]. $\square$

Lemma 14. *Zij X een topologische ruimte en laat $Y \subset X$ een deelruimte zijn. Dan geldt:*

(1) $\dim Y \leq \dim X$.
(2) $\dim X$ *is het supremum van de dimensies van de irreducibele componenten van X.*

Bewijs
Indien $X = \emptyset$ dan zijn de beweringen waar. We nemen aan in de rest van het bewijs dat $X \neq \emptyset$.
(1) We laten zien dat voor iedere keten $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq ... \subsetneq Y_n$ (met $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) van irreducibele gesloten deelverzamelingen in Y dat $\overline{Y_0}^X \subsetneq \overline{Y_1}^X \subsetneq \overline{Y_2}^X \subsetneq ... \subsetneq \overline{Y_n}^X$ een keten is van irreducibele gesloten deelverzamelingen in X.
Stel we hebben $Y_1 \subsetneq Y_2$ twee irreducibele gesloten deelverzamelingen in Y. Dan is $\overline{Y_1}^X \subsetneq \overline{Y_2}^X$ een keten van gesloten deelverzamelingen in X. Merk op dat de inclusie inderdaad strikt is: Indien $\overline{Y_1}^X = \overline{Y_2}^X$ dan geldt volgens het gevolg 12 $Y_1 = \overline{Y_1}^Y = Y \cap \overline{Y_1}^X = Y \cap \overline{Y_2}^X = \overline{Y_2}^Y = Y_2$. Tegenspraak. Uit lemma 2.3 volgt dat $\overline{Y_1}^X$ en $\overline{Y_2}^X$ irreducibel zijn.
Indien $n = 0$ dan is $\overline{Y_0}^X$ irreducibel en gesloten in X.
Indien $n \geq 2$ dan kunnen we bij iedere schakel $Y_i \subsetneq Y_{i+1}$ in de keten $Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq ... \subsetneq Y_n$ een schakel $\overline{Y_i}^X \subsetneq \overline{Y_{i+1}}^X$ maken en we krijgen dus een keten $\overline{Y_1}^X \subsetneq \overline{Y_2}^X \subsetneq ... \subsetneq \overline{Y_n}^X$ van irreducibele gesloten deelverzamelingen in X van lengte minstens n.

(2) Zij W de collectie van irreducibele componenten van X. Uit lemma 14.1 volgt dat voor alle $V \in W$ geldt $\dim V \leq \dim X$. De ongelijkheid geldt voor de dimensie van iedere irreducibele component en dus ook voor het supremum van de dimensies. Nu laten we zien dat $\dim X \leq \sup_{V \in W} \dim V$. Uit lemma 7 volgt uit dat W niet leeg is. Iedere eindige keten van irreducibele gesloten deelverzamelingen in X is bevat in een element van W. Dus het supremum van de lengtes van zulke ketens in X is ten hoogste het supremum dimensies van de irreducibele componenten van X dus $\dim X \leq \sup_{V \in W} \dim V$. $\square$

Lemma 15. *Zij X een irreducibele topologische ruimte met $\dim X < \infty$. Stel dat $Y \subset X$ een gesloten verzameling is met $\dim Y = \dim X$. Dan geldt $Y = X$.*

Bewijs Volgens propositie 9 kunnen we schrijven $Y = Y_1 \cup Y_2 ... \cup Y_n$ met $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ het aantal irreducibele componenten Y_i van Y. Volgens lemma 14.2 geldt dat $\dim X = \dim Y = \max_{i \in \{1,...,n\}} \dim Y_i$. Er is dus een $j \in \{1, ..., n\}$ met $\dim X = \dim Y_j$.
Uit gevolg 12 volgt dat $\overline{Y_j}^Z = \overline{Y_j}^Y = Y_j$ (want Y is gesloten in X). Dus Y_j is gesloten en irreducibel in X. Merk op dat Y_j een irreducibele component van X is. Als dit niet het geval was dan zou er een irreducibele en gesloten $Z \subset X$ bestaan met $Y_j \subsetneq Z \subset X$. Omdat $\# \dim X < \infty$ zou dan gelden dat $\dim Y_j < \dim X$. Omdat X irreducibel is, moet nu gelden $Y_j = X$. Uit $X = Y_j \subset Y \subset X$ volgt dat $Y = X$. $\square$

Lemma 16. *Zij X een noetherse topologische ruimte met $\dim X < \infty$. Stel dat $Y \subset X$ een irreducibele gesloten verzameling is met $\dim Y = \dim X$. Dan is Y een irreducibele component van X.*

Bewijs Uit propositie 9 volgt $X = X_1 \cup X_2 ... \cup X_m$ met m het aantal irreducibele componenten X_i van X. Dus $Y = X \cap Y = \cup(X_i \cap Y)$. Omdat Y irreducibel en gesloten is, is er een $j \in \{1, ..., m\}$ met $Y \subseteq X_j \subset X$. Dit geeft samen met lemma 14.1 dat $\dim Y \leq \dim X_j \leq \dim X$ dus $\dim Y = \dim\, X_j$. Aangezien Y gesloten is in X_j en X_j irreducibel is, volgt nu uit lemma 15 dat $Y = X_j$. $\square$

Lemma 17. *Zij X een noetherse topologische ruimte met $\dim X = 0$. Dan is iedere gesloten verzameling $\{x\}$ met $x \in X$ een irreducibele component van X.*

Bewijs Laat x een gesloten punt in X zijn. We weten dat x irreducibel is en dat $\dim\{x\} = 0$. We moeten laten zien dat voor iedere irreducibele gesloten deelverzameling A met $\{x\} \subset A \subset X$ dat $\{x\} = A$. Stel dat $\{x\} \subsetneq A \subset X$. Dan geldt $\dim\{x\} < \dim A \leq \dim X$. Dus $\dim X \geq 1$. Tegenspraak. Dus $\{x\} = A$ en hieruit volgt dat $\{x\}$ een irreducibel component is van X. $\square$

Propositie 18. *Stel C is een irreducibele noetherse topologische ruimte met $\dim C = 1$. Laat $T \subset C$ een verzameling zijn van gesloten punten in X met $\#T = \infty$. Dan geldt $\overline{T} = C$.*

Bewijs Er geldt $\overline{T} \subset C$ dus volgens lemma 14.1 geldt $\dim \overline{T} \leq \dim C$. Aangezien $\overline{T} \neq \emptyset$ geldt nu dat $\dim \overline{T} = 0$ of $\dim \overline{T} = 1$. Stel dat $\dim \overline{T} = 0$. Volgens lemma 17 zijn de punten irreducibele componenten van $\overline{T}$. Dus $\overline{T}$ bevat oneindig veel irreducibele componenten. Maar C is noethers dus dit is in tegenspraak met propositie 9. Dus $\dim \overline{T} = 1$. Volgens lemma 15 geldt nu dat $\overline{T} = C$. $\square$

Nu zijn we in staat om de volgende stelling te bewijzen.

Stelling 19. *Zij X een irreducibele noetherse topologische ruimte van dimensie 2. Zij $S \subset X$ een deelverzameling van gesloten punten. Stel $\mathcal{C} \subset X$ is een oneindige verzameling van irreducibele gesloten deelverzamelingen van X van dimensie 1 zodanig dat voor iedere $C \in \mathcal{C}$ geldt $\#(C \cap S) = \infty$. Dan ligt S dicht in X.*

Bewijs Zij $C \in \mathcal{C}$ een irreducibele gesloten deelverzameling van X. Beschouw de volgende gesloten verzameling $A := \overline{C \cap S}$. Uit propositie 18 met $T = C \cap S$ volgt dat $A = C$.
Er geldt voor alle $C \in \mathcal{C}$ dat $C = \overline{C \cap S} \subset \overline{S}$. Dus voor de verzameling $Y := \cup_{C \in \mathcal{C}} \overline{C \cap S}$ geldt $\cup_{C \in \mathcal{C}} C = Y \subset \overline{S}$. Voor $\dim \overline{Y}$ zijn er twee mogelijkheden: $\dim \overline{Y} = 1$ of $\dim \overline{Y} = 2$.
Stel dat $\dim \overline{Y} = 1$: Ieder element $C \in \mathcal{C}$ is een irreducibele gesloten deelverzamelingen van $\overline{Y}$ met $\dim C = \dim \overline{Y}$. Uit lemma 16 volgt dat ieder element in $\mathcal{C}$ een irreducibele component is van $\overline{Y}$. Dus $\mathcal{C}$ bevat oneindig veel irreducibele componenten van $\overline{Y}$. Maar $\overline{Y}$ is een gesloten deelverzameling van de noetherse en eindig dimensionale topologische ruimte X. Dit is in tegenspraak met stelling 9.
We concluderen dat $\dim \overline{Y} = 2$. Uit lemma 15 volgt nu dat $\overline{Y} = X$. We laten zien dat $\overline{Y} = X$ dus $X = \overline{Y} \subset \overline{\overline{S}} = \overline{S} \subset X$ dus $\overline{S} = X$ en dus S ligt dicht in X. $\square$

Stelling 20. *Zij X een topologische ruimte. Stel $A \subset X$ is een deelruimte met $\overline{A} = X$. Stel $B \subset A$ met $\overline{B}^A = A$. Dan geldt $\overline{B}^X = X$.*

Bewijs Volgens lemma 11 geldt $\overline{B}^A = \overline{B}^X \cap A$. Dus $A = \overline{B}^X \cap A$. Ofwel $A \subset \overline{B}^X$. Dus $X = \overline{A} \subset \overline{\overline{B}^X}^X = \overline{B}^X \subset X$. Dus $\overline{B}^X = X$. $\square$

2. Parametrisatie

Notaties en afspraken:
Deze notaties zijn geldig voor de rest van de scriptie.

K: een perfect lichaam (iedere algebraïsche uitbreiding over K is separabel).
$\overline{K}$: een vaste algebraïsche afsluiting van K.
$\mathbb{A}^n_{\overline{K}}$: de affiene n-dimensionale ruimte over $\overline{K}$ (notatie $\mathbb{A}^n$).
$\mathbb{P}^n_{\overline{K}}$: de projectieve n-dimensionale ruimte over $\overline{K}$ (notatie $\mathbb{P}^n$).

2.1. De affiene ruimte.

Definitie 21. *Een deelverzameling Y van $\mathbb{A}^n$ heet een algebraïsche verzameling indien er een verzameling $T \subset \overline{K}[x_1, ..., x_n]$ bestaat met $Y = \{P \in \mathbb{A}^n |$ voor alle f in $T : f(P) = 0\}$(we schrijven dan $Y = Z(T)$). We zeggen dat een algebraïsche verzameling Y gedefinieerd is over K als er een verzameling $T \subset K[x_1, ..., x_n]$ bestaat met $Y = \{P \in \mathbb{A}^n |$ voor alle f in $T : f(P) = 0\}$.*

Opmerking

(1) De algebraïsche verzamelingen zijn de gesloten verzamelingen in de Zariski topologie [5, I.1, p. 2]. In dit artikel wordt $\mathbb{A}^n$ voorzien van de Zariski topologie.
(2) Er geldt $Y = Z(T)$ dan en slechts dan als $Y = Z((T))$ met (T) het ideaal in $\overline{K}[x_1, ..., x_n]$ voortgebracht door de elementen in T. Merk op dat $\overline{K}[x_1, ..., x_n]$ een commutatieve ring die noethers is (een commutatieve ring R is noethers als voor ieder ideaal $I \subset R$ er eindig veel elementen $f_1, ..., f_n \in R$ bestaan met $I = (f_1, ..., f_m)$). Dus we kunnen schrijven $Y = Z(T) = Z((T)) = Z((f_1, ..., f_m)) = Z(f_1, ..., f_m)$ voor zekere $f_1, ..., f_m \in \overline{K}[x_1, ..., x_n]$.

In de rest van de scriptie nemen we iedere keer een eindige verzameling voor T.

Definitie 22. *Een affiene variëteit is een irreducibele algebraïsche verzameling in $\mathbb{A}^n$ met daarop de geïnduceerde topologie. Een open deelverzameling van een affiene variëteit heet een quasi-affiene variëteit.*

Definitie 23. *Een affiene kromme C over K is een affiene variëteit over K van dimensie* 1*.*

Lemma 24. *Een affiene variëteit Y in $\mathbb{A}^n$ heeft dimensie $n - 1$ dan en slechts dan als er een niet constant irreducibel polynoom $f \in \overline{K}[x_1, ..., x_n]$ bestaat met $Y = \{P \in \mathbb{A}^n | f(P) = 0\}$.*

Bewijs Zie [5, I.1 Propositie 13]. □

Dankzij dit lemma kunnen we spreken van de graad van een affiene kromme over K in $\mathbb{A}^2$. Deze is gelijk aan de graad van het polynoom dat de affiene kromme definieert.

Definitie 25. *Een affiene kegelsnede C over K in $\mathbb{A}^2$ is een affiene kromme over K van graad* 2*.*

Definitie 26. *Een affiene variëteit $Y \subset \mathbb{A}^n$ over K gedefinieerd door polynomen $f_1, ..., f_t \in K[x_1, ..., x_n]$ heet Y glad in een punt $P = (a_1, ..., a_n) \in Y$ als de rank van* *de matrix* $\| (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})((a_1, ..., a_n))_{i=1,...,t; j=1,...,n} \|$ *gelijk is aan* $n-r$ *met* r *de dimensie van* Y*. Een affiene variëteit* Y *over* K *heet glad indien* Y *glad is in ieder punt* P *in* Y*.*

Opmerking Zie [4, 8, opmerkingen 3.2]:

(1) Zij g een polynoom in x_i met $i \in \{1, ..., n\}$. Men kan $\frac{dg}{dx_i}$ abstract definieren en de gebruikelijke differentieregels voor polynomen gebruiken, bijvoorbeeld $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$. Merk op dat in het geval van karateristiek p geldt $\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1} = 0$.

(2) De definitie van een gladde kromme in $\mathbb{A}^2$ hangt niet af van de eindige verzameling voortbrengers van (T).

2.2. **De projectieve ruimte.**

Analoog aan de affiene n-dimensionale ruimte kunnen we de begrippen algebraïsche verzamelingen en kromme ook voor de projectieve n-dimensionale ruimte introduceren.

Definitie 27. *Een deelverzameling* Y *van* $\mathbb{P}^n$ *heet een algebraïsche verzameling indien er een verzameling* T *van homogene elementen van* $\overline{K}[x_0, ..., x_n]$ *bestaat met* $Y = \{P \in \mathbb{P}^n |$ *voor alle* f *in* $T : f(P) = 0\}$*. We zeggen dat een algebraïsche verzameling* Y *gedefinieerd is over* K *als er een verzameling* T *van homogene elementen van* $K[x_0, ..., x_n]$ *bestaat met* $Y = \{P \in \mathbb{P}^n |$ *voor alle* f *in* $T : f(P) = 0\}$*.*

Opmerking

(1) Ook hier zijn de algebraïsche verzamelingen de gesloten verzamelingen in de Zariski topologie [5, I.2, p. 10]. In de rest van de scriptie wordt $\mathbb{P}^n$ voorzien van de Zariski topologie.

(2) Analoog aan de affiene ruimte $\mathbb{A}^n$ kunnen we voor iedere algebraïsche verzameling $Y = Z(T) \subset \mathbb{P}^n$ aannemen dat de verzameling T eindig is.

Definitie 28. *Een projectieve variëteit is een irreducibele algebraïsche verzameling in* $\mathbb{P}^n$ *met daarop de geïnduceerde topologie. Een open deelverzameling van een projectieve variëteit heet een quasi-projectieve variëteit.*

Zonder bewijs geven we dit lemma:

Lemma 29. [5, I.2 Probleem 8] *Een projectieve variëteit* Y *in* $\mathbb{P}^n$ *heeft dimensie* $n-1$ *dan en slechts dan als er een niet constant irreducibel homogeen polynoom* $f \in \overline{K}[x_0, ..., x_n]$ *bestaat met* $Y = \{P \in \mathbb{P}^n | f(P) = 0\}$*.*

Definitie 30. *Een projectieve kromme* C *over* K *is een projectieve variëteit over* K *van dimensie* 1*.*

Met behulp van lemma 29 kunnen we definieren wat de graad is van een projectieve kromme C over K. Deze is de graad van het homogene polynoom in het lemma dat C definieert.

Definitie 31. *Een projectieve kegelsnede* C *over* K *is een projectieve kromme in* $\mathbb{P}^2$ *over* K *van graad* 2*.*

Definitie 32. *Een projectieve variëteit* $Y \subset \mathbb{P}^n$ *over* K *gedefinieerd door homogene polynomen* $f_1, ..., f_t \in K[x_0, ..., x_n]$ *heet* Y *glad in een punt* $P = (a_0 : ... : a_n) \in Y$ *als de rang van de matrix* $\| (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})((a_0, ..., a_n))_{i=1,...,t; j=1,...,n} \|$ *gelijk is aan* $n-r$

met r de dimensie van Y. Een projectieve variëteit Y over K heet glad indien Y glad is in ieder punt P in Y.

Opmerking

(1) Zie opmerking 2.1.
(2) De definitie van een gladde kromme hangt niet af van de gekozen homogene coördinaten van P en de gekozen eindige verzameling voortbrengers van (T).

Schrijf $H_0 := \{P \in \mathbb{P}^n | x_0 = 0\}$ en $U_0 := \mathbb{P}^n - H_0$. Dan is U_0 open. We kunnen $\mathbb{A}^n$ identificeren met U_0 via het volgende homeomorfisme [5, I.2, Propositie 2]

$$\phi_0 : U_0 \to \mathbb{A}^n$$
$$(a_0 : a_1 : ... : a_n) \mapsto \left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, ..., \frac{a_n}{a_0}\right).$$

Merk op dat ϕ_0 welgedefinieerd is.

Definitie 33. *Zij $Y \subset \mathbb{A}^n$ een affiene variëteit over K. We noemen $\overline{\phi_0^{-1}(Y)} \subset \mathbb{P}^n$ de projectieve afsluiting van Y in $\mathbb{P}^n$ (notatie $\overline{Y}$).*

Opmerking Indien C een affiene kromme is over K gegeven door een polynoom $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$ dan wordt de projectieve afsluiting van C gegeven door een homogeen polynoom $F(X_0, X_1, ..., X_n)$ verkregen door $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ homogeen te maken: er geldt $F(X_0, X_1, ..., X_n) = X_0^e f\left(\frac{X_1}{X_0}, ..., \frac{X_n}{X_0}\right)$ met e de graad van f. Merk op dat de afsluiting van een irreducibele varïeteit ook irreducibel is en dus is $F(x, y, z)$ ook irreducibel.

2.3. **Morfismen.**

Definitie 34. *Zij $Y \subset \mathbb{A}^n$ een quasi-affiene variëteit. Een functie $f : Y \to \overline{K}$ heet regulier in een punt $P \in Y$ als aan de twee voorwaarden is voldaan:*

(1) *Er bestaat een open omgeving U met $P \in U \subset Y$.*
(2) *Er bestaan twee polynomen $g, h \in \overline{K}[x_1, ..., x_n]$ zodanig dat $h(u) \neq 0$ voor alle $u \in U$ en $f = \frac{g}{h}$ op U.*

We zeggen dat f regulier is op Y indien f regulier is in ieder punt in Y.

Analoog is er een definitie voor reguliere functies voor quasi-projectieve variëteiten.

Definitie 35. *Zij $Y \subset \mathbb{P}^n$ een quasi-projectieve variëteit. Een functie $f : Y \to \overline{K}$ heet regulier in een punt $P \in Y$ als aan de twee voorwaarden is voldaan:*

(1) *Er bestaat een open omgeving U met $P \in U \subset Y$.*
(2) *Er bestaan twee homogene polynomen $g, h \in \overline{K}[x_0, ..., x_n]$ van dezelfde graad zodanig dat $h(u) \neq 0$ voor alle $u \in U$ en $f = \frac{g}{h}$ op U [1].*

We zeggen dat f regulier is op Y indien f regulier is in ieder punt in Y.

Lemma 36. *Indien we $\mathbb{A}^1_{\overline{K}}$ voorzien van de Zariski topologie en $\overline{K}$ identificeren met $\mathbb{A}^1_{\overline{K}}$ dan is iedere reguliere functie continu.*

Bewijs Zie [5, I.3, Lemma 1]. □

Definitie 37. *Een variëteit over $\overline{K}$ is een affiene, quasi-affiene, projectieve of quasi-projectieve variëteit.*

[1] Merk op dat $\frac{g}{h}$ welgedefinieerd zolang $h \neq 0$.

Definitie 38. *Zijn X en Y twee variëteiten. Een morfisme $\phi: X \to Y$ is een continue afbeelding zodanig dat voor iedere open deelverzameling $V \subset Y$ en voor iedere reguliere functie $f: V \to \overline{K}$ de functie $f \circ \phi: \phi^{-1}(V) \to \overline{K}$ regulier is.*

Definitie 39. *Een morfisme $\phi: X \to Y$ is een isomorfisme als er een morfisme $\psi: Y \to X$ bestaat met $\psi \circ \phi = id_X$ en $\phi \circ \psi = id_Y$. Indien er een isomorfisme bestaat tussen twee variëteiten X en Y dan heten X en Y isomorf.*

Met het volgende lemma kunnen we met gemak nagaan of een afbeelding tussen twee variëteiten een morfisme is.

Lemma 40. *Zij X een variëteit en laat $Y \subset \mathbb{A}^n$ een affiene variëteit zijn. Een afbeelding $\psi: X \to Y$ is een morfisme dan en slechts dan als $x_i \circ \psi$ een reguliere afbeelding op X is voor iedere $i \in \{1, ..., n\}$ waarbij $x_1, ..., x_n$ de coördinatenfuncties zijn op $\mathbb{A}^n$.*

Bewijs Zie [5, I.3, Lemma 6]. □

Lemma 41. *Zijn X en Y twee variëteiten. Laat ϕ en ψ twee morfismen zijn van X naar Y. Stel dat er een niet lege open verzameling $U \subset X$ bestaat met $\phi_{|U} = \psi_{|U}$. Dan geldt $\phi = \psi$.*

Bewijs Zie [5, I.4, Lemma 1]. □

Definitie 42. *Zijn X en Y twee variëteiten. Een rationale afbeelding $\phi: X \dashrightarrow Y$ is een equivalentierelatieklasse van paren $\langle U, \phi_U \rangle$ waarbij U een niet lege open deelverzameling van X en ϕ_U een morfisme is van U naar Y. Twee paren $\langle U, \phi_U \rangle$ en $\langle V, \psi_V \rangle$ zijn equivalent als $\phi_U = \psi_V$ op $U \cap V$.*

Opmerking Uit lemma 41 volgt dat de genoemde relatie in de definitie inderdaad een equivalentierelatie is.

Definitie 43. *Een birationale afbeelding $\phi: X \dashrightarrow Y$ is een rationale afbeelding waarvoor een rationale afbeelding $\psi: Y \dashrightarrow X$ bestaat met $\psi \circ \phi = id_X$ en $\phi \circ \psi = id_Y$. Indien er een birationale afbeelding bestaat tussen twee variëteiten X en Y dan heten X en Y birationaal (equivalent).*

Stelling 44. *Zijn X en Y twee variëteiten. Dan zijn de volgende beweringen equivalent*

(1) *X en Y zijn birationaal.*
(2) *Er zijn open deelverzamelingen $U \subset X$ en $V \subset Y$ die isomorf zijn.*

Bewijs Zie [5, I.4, Corollary 5]. □

Definitie 45. *Laat $M_n(K)$ de verzameling van de $n \times n$-matrices met coëfficiënten in K zijn. We noemen twee $n \times n$-matrices $A, B \in M_n(K)$ gelijkvormig indien er een inverteerbare matrix $P \in M_n(K)$ bestaat met $B = P^T AP$.*

Lemma 46. *Zij V een eindige dimensie ruimte over een lichaam K van karakteristiek ongelijk aan 2. Iedere symmetrische matrix $A \in M_n(K)$ is gelijkvormig met een diagonale matrix in $M_n(K)$.*

Bewijs Zie [7, I.8, Theorem 19]. □

Lemma 47. *Zij $C: \; aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eYZ + fXZ = 0$ een projectieve kromme in $\mathbb{P}^2$ over K met karakteristiek K ongelijk aan 2. Dan is C isomorf met een projectieve kromme C^* over K gedefinieerd door de vergelijking $\alpha X_1^2 + \beta Y_1^2 + \gamma Z_1^2 = 0$ voor zekere $\alpha, \beta, \gamma \in K$.*

Bewijs We kunnen de vergelijking van C als volgt schrijven:

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0 \text{ met } M := \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{f}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{f}{2} & \frac{e}{2} & c \end{pmatrix}.$$

De matrix $M \in M_3(K)$ is symmetrisch en K heeft karakterisitek ongelijk aan 2. Volgens lemma 45 zijn er een diagonale matrix $D \in M_3(K)$ en een matrix $P \in M_3(K)$ met $M = P^T DP$. We schrijven:

$$\text{met } D := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \text{ voor zekere } \alpha,\ \beta \text{ en } \gamma \text{ in } K.$$

en

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Dan geldt

$$0 = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \alpha X_1^2 + \beta Y_1^2 + \gamma Z_1^2$$

Noteer voor een element $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3 \setminus (0,0,0)$ de equivalentieklasse $(a_0 : a_1 : a_2)$ met $[(a_0, a_1, a_2)]$. De afbeelding

$$\phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$$
$$[(a_0, a_1, a_2)] \to [P(a_0, a_1, a_2)^T]$$

is welgedefinieerd en inverteerbaar (lineaire transformatie en P is inverteerbaar) en definieert dus een isomorfisme. $\square$

Stelling 48. *Zij $C \subset \mathbb{P}^2$ een projectieve algebraïsche verzameling over een lichaam K van karakteristiek ongelijk aan 2 die gedefinieerd wordt door de vergelijking $aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$ met $a, b, c \in K$ en $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Dan zijn de volgende beweringen equivalent:*

(1) *C is een kegelsnede over K.*
(2) *$a, b, c \neq 0$.*
(3) *C is glad.*

Bewijs
((1) $\Rightarrow$ (2)): Merk op dat C graad 2 heeft. Stel C is een kegelsnede over K en $c = 0$ (de gevallen $a = 0$ of $b = 0$ gaan analoog). Dan wordt C gedefinieerd door $aX^2 + bY^2 = 0$. Het polynoom $aX^2 + bY^2 \in K[X, Y, Z]$ is niet irreducibel in $\overline{K}[X, Y, Z]$. Dit is in tegenspraak met de definitie van een kromme (en dus met de definitie van een kegelsnede) over K . Dus $a, b, c \neq 0$.

((2) $\Rightarrow$ (1)): Stel $a, b, c \neq 0$. Neem het affiene deel C_Z van C door Z op 1 te schalen. Dan wordt C_Z gedefinieerd door de vergelijking $ax^2 + by^2 + c = 0$ met $x = \frac{X}{Z}$ en $y = \frac{Y}{Z}$. Omdat $a \neq 0$ kunnen we $f := x^2 + \frac{b}{a}y^2 + \frac{c}{a}$ als polynoom dat C_Z definieert. We laten zien dat dit polynoom irreducibel is in $\overline{K}[x, y]$. We weten uit algebra dat $\overline{K}[x, y]$ isomorf is met $\overline{K}[y][x]$. In deze laatste polynomenring is f irreducibel alleen als $\frac{b}{a}y^2 + \frac{c}{a}$ een kwadraat is in $\overline{K}[y]$ dus alleen als $\frac{b}{a}y^2 + \frac{c}{a}$ een dubbel nulpunt heeft. Het lichaam K heeft karakteristiek ongelijk aan 2 en f heeft geen gemeenschappelijke nulpunt met $\frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{b}{a}y$. We concluderen dat f irreducibel is in $\overline{K}[y][x]$ en dus ook in $\overline{K}[x,y]$. Dus C_Z is irreducibel. Omdat C de afsluiting is van C_Z, volgt uit lemma dat C ook irreducibel is. Omdat $aX^2+bY^2+cZ^2$ graad 2 heeft is C een kegelsnede over K.

((2) $\Rightarrow$ (3)): Stel $a,b,c \neq 0$. We moeten laten zien het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{\partial(aX^2+bY^2+cZ^2)}{\partial X}(P) &= 0 \\ \frac{\partial(aX^2+bY^2+cZ^2)}{\partial Y}(P) &= 0 \\ \frac{\partial(aX^2+bY^2+cZ^2)}{\partial Z}(P) &= 0 \end{cases}$$

geen oplossingen heeft in C. Dit stelstel vergelijkingen geeft:

$$(2) \begin{cases} 2ax_0 &= 0 \\ 2by_0 &= 0 \\ 2cz_0 &= 0. \end{cases}$$

Omdat karakteristiek van K ongelijk is aan 2 en $a,b,c \neq 0$ heeft dit stelstel als enige oplossing $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Maar $P \in \mathbb{P}^2$ dus $(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$ en dus heeft het stelsel vergelijkingen geen oplossingen. We concluderen dat C glad is.

((3) $\Rightarrow$ (2)): Stel C is glad dan geldt $(2ax_0, 2by_0, 2cz_0) \neq (0,0,0)$ voor alle $(x_0 : y_0 : z_0) \in C$. Stel $b = 0$ (het geval $a = 0$ gaat op dezelfde manier) en neem $y_0 \in \overline{K}\backslash 0$ willekeurig. Dan ligt het punt $(0 : y_0 : 0)$ in C en er geldt $(2\cdot a\cdot 0, 2\cdot 0\cdot y_0, 2\cdot c\cdot 0) = (0,0,0)$ dus C is niet glad in P. Tegenspraak. Dus er moet gelden $a,b,c \neq 0$. □

Gevolg 49. *Iedere affiene kegelsnede $C \subset \mathbb{A}^2$ over een lichaam K van karakteristiek ongelijk aan 2 is birationaal equivalent met een kegelsnede over K gedefinieerd door de vergelijking $ax^2 + by^2 + c = 0$ voor zekere $a,b,c \in K$.*

Bewijs Beschouw de projectieve afsluiting D van C. Omdat D een kegelsnede is, wordt D gedefinieerd door een homogeen polynoom in $K[X,Y,Z]$ van graad 2. Omdat C irreducibel is, is zijn afsluiting D ook irreducibel en dus een kegelsnede. Volgens stelling 47 is D isomorf met een kegelsnede D^* gedefinieerd door de vergelijking $aX^2+bY^2+cZ^2 = 0$ voor zekere $a,b,c \in K$. Neem het affiene deel D^*_Z van D^* door Z op 1 te schalen. Dan krijgen we een affiene kegelsnede over K gedefinieerd door de vergelijking $ax^2 + by^2 + c = 0$. Deze is inderdaad birationaal equivalent met C. □

2.4. **Parametriseren.**

Definitie 50. *Een affiene kromme $C \subset \mathbb{A}^n$ over K heet rationaal (of parametriseerbaar) over K als er rationale functies $\chi_1(t), \chi_2(t), ..., \chi_n(t) \in K(t)$ bestaan zodanig dat het volgende geldt:*

1. *Voor bijna alle (m.a.w. op eindig veel na) $t_0 \in \overline{K}$ is $\chi_i(t_0)$ welgedefinieerd voor alle $i \in \{1,2,...,n\}$ en het punt $(\chi_1(t_0), \chi_2(t_0), ..., \chi_n(t_0))$ ligt op C.*
2. *Voor bijna alle punten $(x_1, x_2, ..., x_n) \in C$ is er een unieke $t_0 \in \overline{K}$ zodanig dat $(x_1, x_2, ..., x_n) = (\chi_1(t_0), \chi_2(t_0), ..., \chi_n(t_0))$.*

In dit geval heet $(\chi_1(t), \chi_2(t), ..., \chi_n(t))$ een affiene (rationale) parametrisatie van C.

Definitie 51. *Een projectieve kromme $C \subset \mathbb{P}^n$ over K heet rationaal (of parametriseerbaar) over K als er polynomen $\chi_0(t), \chi_1(t), ..., \chi_n(t) \in K[t]$ bestaan met ggd$(\chi_0(t), \chi_1(t), ..., \chi_n(t)) = 1$ zodanig dat het volgende geldt:*

(1) *Voor bijna alle $t_0 \in \overline{K}$ ligt het punt $(\chi_0(t_0) : \chi_1(t_0) : ... : \chi_n(t_0))$ op C.*
(2) *Voor bijna alle punten $(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in C$ is er een unieke $t_0 \in \overline{K}$ zodanig dat $(x_0 : x_1 : ... : x_n) = (\chi_0(t_0) : \chi_2(t_0) : ... : \chi_n(t_0))$.*

In dit geval heet $(\chi_0(t) : \chi_1(t) : ... : \chi_n(t))$ een projectieve (rationale) parametrisatie van C.

Opmerking

(1) In beide definities 50 en 51 zijn de krommen parametriseerbaar indien er een birationale afbeelding bestaat van $\mathbb{A}^1$ naar de desbetreffende krommen.
(2) Indien er polynomen $\chi_0(t), \chi_1(t), ..., \chi_n(t) \in K[t]$ bestaan die voldoen aan voorwaarde (1) in definitie 51 dan kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat ze zelfs voor alle $t_0 \in \overline{K}$ aan de eerste eis van definitie 51 voldoen. Zie [5, I.6, Propositie 8].

In de volgende stelling leggen we een verband tussen de parametrisaties van projectieve krommen over K en die van hun affiene delen.

Gevolg 52. *Zij K een lichaam van karakterstiek ongelijk aan 2. Laat $C \in \mathbb{A}^2$ een affiene variëteit over K zijn die gedefinieerd door een polynoom f in $K[x, y]$ van graad 2 . Dan is C glad dan en slechts dan als de projectieve afsluiting C^* glad is.*

Stelling 53. *Zij $C \subset \mathbb{A}^2$ een affiene kromme over K en C^* de bijbehorende projectieve afsluiting. Dan is C rationaal dan en slechts dan als C^* rationaal is.*

Bewijs Laat $(\chi_1(t), \chi_2(t), \chi_3(t))$ een parametrisatie van C^* zijn. Merk op dat C^* niet oneindig veel punten in het oneindige kan hebben dus we kunnen aannemen dat $\chi_3(t) \neq 0$. Aangezien $\chi_3(t) = 0$ eindig veel oplossingen heeft in $\overline{K}$ is $\left(\frac{\chi_1(t)}{\chi_3(t)}, \frac{\chi_2(t)}{\chi_3(t)}\right)$ een parametrisatie van C. Andersom, iedere rationale parametrisatie van C kan uitgebreid worden tot een parametrisatie van C^* door de z-coördinaat op 1 te schalen en de tellers te vermenigvuldigen met het kleinste gemene veelvoud van de noemers zodat de noemers verdwijnen. □

Met behulp van stelling 53 is het mogelijk om te kiezen tussen het parametriseren van een rationale projectieve kromme C of juist een affien deel ervan en daaruit een parametrisatie voor C te vinden. Dit laten we zien aan de hand van het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 54. *We nemen de kegelsnede*

$$C: \; X^2 + Y^2 = Z^2 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \tag{1}$$

gedefinieerd over $\mathbb{Q}$. We schalen Z op 1 en beschouwen het affiene deele C_Z : $x^2 + y^2 = 1$ dat hoort bij $Z \neq 0$. Gegeven het rationale punt $(-1, 0)$ op C_Z bekijken we een familie lijnen $y = t(x + 1)$ door $(-1, 0)$ die geparametriseerd wordt door de richtingscoefficiënt $t \in \mathbb{Q}$. Voor bijna alle $t \in \mathbb{Q}$ snijdt deze lijn C_Z in een ander rationaal punt. We krijgen dus een (oneindige) familie van rationale punten. Subsitueren van $y = t(x + 1)$ in vergelijking C geeft

$$1 = x^2 + t^2(x + 1)^2 = (1 + t^2)x^2 + 2t^2x + t^2.$$

dus

$$x^2 + \frac{2t^2}{t^2+1}x = \frac{-t^2+1}{t^2+1}. \tag{2}$$

Deze vergelijking kunnen we herleiden tot een vergelijking van de vorm

$$x^2 + Ax + B = 0$$

met $A, B \in K$. *In* $\overline{K}[x]$ *kunnen we* $x^2 + Ax + B$ *ontbinden als* $(x-\alpha)(x-\beta)$ *met* $\alpha, \beta \in \overline{K}$. *Er geldt dan* $x^2 + Ax + b = (x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$. *In het bijzonder geldt* $A = -(\alpha+\beta)$. *Deze methode passen we toe op vergelijking 2:*

Omdat $(-1, 0)$ *op* C_z *ligt, is* $x = -1$ *een oplossing van deze vergelijking. dus*

$$-1 + x_1 = -\frac{2t^2}{t^2+1} \tag{3}$$

waarbij x_1 *de* x*-coördinaat van het tweede snijpunt. We krijgen*

$$x_1 = 1 - \frac{2t^2}{t^2+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}.$$

Indien we deze waarde van x_1 *in de vergelijking* $y_1 = t(x_1+1)$ *invullen dan krijgen we*

$$y_1 = \frac{2t}{t^2+1}.$$

Dit is de y*-coördinaat van het tweede snijpunt. Een affiene rationale parametrisatie van* C_Z *kan dus worden gegeven door*

$$(\chi_1(t), \chi_2(t)) = \left(\frac{-t^2+1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right).$$

Een projectieve rationale parametrisatie voor C *is dan*

$$(-t^2+1 : 2t : t^2+1).$$

Merk op dat er geen $t_0 \in \mathbb{Q}$ *bestaat waarvoor geldt* $(\chi_1(t_0), \chi_2(t_0)) = (-1, 0)$. *De kromme* C_Z *heeft in het punt* $(-1, 0)$ *een oneindige richtingscoefficiïent.*

Voorbeeld 55. *Beschouw*

$$C: \; y^2 = -5b^2 + \frac{15}{2}b - \frac{41}{16} \subset \mathbb{A}^2(b, y) \tag{4}$$

de vergelijking van een affiene kegelsnede gedefinieerd over $\mathbb{Q}$. *Gegeven het punt* $(\frac{7}{12}, \frac{1}{3}) \in C$ *willen we een rationale parametrisatie voor* C *vinden. We bekijken de familie van lijnen* $y - \frac{1}{3} = t(b - \frac{7}{12})$ *die door het punt* $(\frac{7}{12}, \frac{1}{3})$ *gaan. Voor bijna alle* $t \in \overline{Q}$ *kunnen we het tweede snijpunt vinden door eerst* b *te vinden en dan* y. *Er geldt* $y = \frac{1}{3} + t(b - \frac{7}{12})$. *Deze subsitueren in vergelijking 4 geeft:*

$$\left(\frac{1}{3} + t(b - \frac{7}{12})\right)^2 = -5b^2 + \frac{15}{2}b - \frac{41}{16}.$$

We lossen deze vergelijking op voor b *(bijvoorbeeld met de hand of met een computerprogramma) en vinden:*

$$b = \frac{7}{12} \text{ of } b = \frac{7t^2 - 8t + 55}{12(t^2+5)}.$$

De tweede waarde van b is wat we zoeken. Deze waarde subsitueren we in vergelijking $y = \frac{1}{3} + t(b - \frac{7}{12})$ en krijgen

$$y = \frac{-t^2 + 5t + 5}{3(t^2 + 5)}.$$

Een affiene rationale parametrisatie voor C is

$$(\chi_1(t), \chi_2(t)) = \left(\frac{7t^2 - 8t + 55}{12(t^2 + 5)}, \frac{-t^2 + 5t + 5}{3(t^2 + 5)} \right). \tag{5}$$

Je kunt nagaan dat er geen $t_0 \in \mathbb{C}$ bestaat waarvoor geldt $(\chi_1(t_0), \chi_2(t_0)) = \left(\frac{7}{12}, \frac{1}{3}\right)$.

De hierboven genoemde voorbeelden laten zien dat parametriseren een goed gereedschap kan zijn bij het vinden van rationale punten op kegelsneden. Bij de kegelsneden van voorbeelden 54 en 55 is het ons gelukt om oneindig veel rationale punten te vinden uitgaand van één rationaal punt. Merk op dat beide kegelsneden een rationaal punt bevatten. De volgende stelling generaliseert dit:

Stelling 56. *Elke kegelsnede $C \subset \mathbb{P}^2$ over een lichaam K van karakteristiek ongelijk aan 2 met een K-rationaal punt is parametriseerbaar.*

Bewijs Volgens lemma 47 mogen we aannemen dat C gedefinieerd wordt door de vergelijking $aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$ voor zekere $a, b, c, \in K$ met $abc \neq 0$. Laat $P = (X_0 : Y_0 : Z_0) \in C$ een K-rationaal punt zijn. We kunnen zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $Z_0 \neq 0$. Bekijk het affiene deel $C_Z \subset \mathbb{A}^2$ verkregen door Z op 1 te schalen. De kromme C_Z heeft de vergelijking $ax^2 + by^2 + c = 0$ met $x = \frac{X}{Z}$ en $y = \frac{Y}{Z}$ als affiene coördinaten. Het punt P correspondeert met een punt $p = (x_0, y_0) \in C_Z$ waarbij $x_0 = \frac{X_0}{Z_0}$ en $y_0 = \frac{Y_0}{Z_0}$. Beschouw de familie lijnen $L:\ y = t(x - x_0) + y_0$ door p. Voor ieder punt $(x, y) \in L \cap C_Z$ geldt:

$$\begin{cases} y - t(x - x_0) - y_0 = 0 \\ ax^2 + b(t(x - x_0) + y_0)^2 + c = 0. \end{cases}$$

Het uitwerken van de tweede vergelijking geeft

$$g_t(x) := A(t)x^2 + B(t)x + C(t) = 0.$$

met $A(t) = a + bt^2$,$B(t) = -2b(x_0t^2 - y_0t)$ en $C(t)$ een polynomiale uitdrukking in t van hoogstens graad 2 . Volgens stelling 48 is a ongelijk aan 0. Dus $A(t)$ is een polynoom van gaad 2 en heeft dus hoogstens twee nulpunten. Voor bijna alle $t \in \overline{K}$ en bijna $x_0 \in \overline{K}$ geldt:

$$g_t(x) = 0 \Leftrightarrow A(t)x^2 + B(t)x + C(t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{B(t)}{A(t)}x + \frac{C(t)}{A(t)} = 0.$$

We weten dat x_0 een oplossing is van $g_t(x) = 0$ dus we kunnen schrijven

$$x^2 + \frac{B(t)}{A(t)}x + \frac{C(t)}{A(t)} = (x - x_0)(x - x_t) \in \overline{K}[x]$$

met $x_t \in \overline{K}$ de tweede oplossing van $g_t(x) = 0$. Er geldt $(x - x_0)(x - x_t) = x^2 - (x_0 + x_t)x + x_0x_t$. Hieruit volgt $-(x_0 + x_t) = \frac{B(t)}{A(t)}$ dus $x_t = -x_0 - \frac{B(t)}{A(t)}$. Er geldt $x_0 \in K$ en als $t_0 \in K$ geen nulpunt is van $A(t)$ dan geldt $\frac{B(t_0)}{A(t_0)} \in K$ en dus $x_{t_0} \in K$. Voor bijna ieder punt $(x_t, y_t) \in L \cap C_Z$ geldt

$$y_t = t(x_t - x_0) + y_0 = t\left(-x_0 - \frac{B(t)}{A(t)} - x_0\right) + y_0 = t\left(-2x_0 - \frac{B(t)}{A(t)}\right) + y_0.$$

We laten zien dat $\frac{B(t)}{A(t)}$ geen constante rationale functie is. Er geldt

$$\frac{B(t)}{A(t)} = \frac{-2b(x_0t^2 - y_0t)}{a + b^2} = \frac{-2b(x_0t - y_0)t}{a + bt^2}.$$

$B(t)$ is constant alleen als $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Maar dan geldt $ax_0^2 + by_0^2 + c = c = 0$ en dit is in tegenspraak met de aanname dat $abc \neq 0$. Dus $x_0 \neq 0$ of $y_0 \neq 0$. In beide gevallen heeft de teller in deze breuk heeft een factor t. Omdat $a \neq 0$ heeft de noemer deze factor niet. Dus $\frac{B(t)}{A(t)}$ is niet consant.

We concluderen dat voor bijna alle punten $(x, y) \in C_Z$ er een $t \in \overline{K}$ bestaat met

$$(x, y) = \left(x_0 - \frac{B(t)}{A(t)}, -2x_0 - \frac{B(t)}{A(t)}\right). \tag{6}$$

Men kan laten zien voor iedere $(x, y) \in C_Z$ dat de bijbehorende t in vergelijking 6 uniek is. We krijgen een parametrisatie

$$\begin{aligned} \chi :\ \mathbb{A}^1 &\dashrightarrow C_Z \\ t &\dashrightarrow \left(x_0 - \frac{B(t)}{A(t)}, -2x_0 - \frac{B(t)}{A(t)}\right). \end{aligned}$$

Volgens stelling 53 is C ook parametriseerbaar. □

Zonder bewijs geven we het volgende gevolg:

Gevolg 57. *Zij C een (projectieve resp. affiene) kegelsnede over een lichaam K van karakteristiek ongelijk aan 2 met een K-rationaal punt. Als D een (projectieve resp. affiene) kegelsnede is over K die isomorf is met C dan is D parametriseerbaar.*

3. De rationale punten bij het geval VI

In dit onderdeel gaan we de kennis uit hoofdstukken 1 en 2 toepassen op een specifiek geval. Het doel van dit onderdeel is te laten zien dat de rationale nulpunten dicht liggen op het algebraïsche oppervlak over $K = \mathbb{Q}$ behorende bij het geval VI.

Definitie 58. *Een rationale tetraëder is een tetraëder waarvan de zijden en de inhoud rationaal zijn.*

Een rationale tetraëder met de resp. inhoud a, b, c, d, e, f en V voldoet vergelijking (1) en een aantal ongelijkheden. We vergeten de ongelijkheden en letten alleen op vergelijking (1). Merk op dat deze vergelijking een algebraïsch oppervlak definieert in de gewogen projectieve ruimte $\mathbb{P}_K(1, 1, 1, 1, 1, 1, 3)$ met coördinaten a, b, c, d, e, f en V. Deze ruimte is gedefinieerd als volgt:

Definitie 59. *De gewogen projectieve ruimte $\mathbb{P}_K(d_0, d_1, ..., d_n)$ met coördinaten $x_0, ..., x_n$ is de quotïent verzameling $\overline{K}^{n+1} \setminus \{(0, ..., 0)\}$ onder de equivalentierelatie gegeven door $(a_0, ..., a_n) \sim (\lambda^{d_0} a_0, ..., \lambda^{d_n} a_n)$ met $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$.*

3.1. Het geval VI.

Indien $a = d, b = e, c = f$ en als we $y := 12V$ schrijven dan krijgen we voor de tetraëder de volgende vergelijking:

$$S :\ y^2 = \ a^2(2a^2(b^2 + c^2 - a^2) - (b - c)^2(b + c)^2) \tag{7}$$

die een algebraïsch oppervlak S definieert in $\mathbb{P}_K(1, 1, 1, 3)$ met a, b, c, y als coördinaten.

3.2. **Het affiene deel.**

Neem de verzameling punten op S met $a \neq 0$. Dit geeft een affien deel S_a van het algebraïsch oppervlak S en na schaling krijgen we de volgende vergelijking:

$$S_a: \ y_1^2 = 2(b_1^2 + c_1^2 - 1) - (b_1 - c_1)^2(b_1 + c_1)^2 \tag{8}$$

met $b_1 = \frac{b}{a}, c_1 = \frac{c}{a}, y_1 = \frac{y}{a^3}$ de affiene coördinaten in $\mathbb{A}^3$.

Stelling 60. *De affiene algebraïsche verzameling gedefinieerd door S_a is een affiene variëteit.*

Bewijs We laten zien dat $f := y_1^2 - 2(b_1^2 + c_1^2 - 1) + (b_1 - c_1)^2(b_1 + c_1)^2$ irreducibel is in $\overline{K}[b_1, c_1, y_1]$. De polynomenringen $\overline{K}[b_1, c_1, y_1] = \overline{K}[b_1, c_1][y_1]$ zijn isomorf dus het is voldoende om te laten zien dat f irreducibel is in $\overline{K}[b_1, c_1][y_1]$. In deze polynomenring is f irreducibel dan en slechts dan als $G(b_1, c_1) := 2(b_1^2 + c_1^2 - 1) - (b_1 - c_1)^2(b_1 + c_1)^2$ een wortel heeft in $\overline{K}[b_1, c_1]$. We laten zien dat dit niet kan. De polynomenringen $\overline{K}[b_1, c_1]$ en $\overline{K}[b_1][c_1]$ zijn isomorf. Het is dus voldoende om te laten zien dat $G(b_1, c_1)$ (gezien als een polynoom met variabele c_1) geen kwadraat is in $\overline{K}[b_1][c_1]$. Stel dat het een kwadraat is in $\overline{K}[b_1][c_1]$ dan is het ook een kwadraat indien we $b_1 = c_1$ kiezen. We krijgen $G(b_1, c_1) = 2(2c_1^2 - 1)$ en dit is geen kwadraat in $\overline{K}[c_1]$. We concluderen dat $G(b_1, c_1)$ geen kwadraat is in $\overline{K}[b_1, c_1]$ en dat f dus irreducibel is. $\square$

Beschouw nu het volgende morfisme:

$$\begin{aligned} \sigma : S_a &\to \mathbb{A}^1 \\ (b_1, c_1, y_1) &\mapsto b_1 + c_1 \end{aligned}$$

We krijgen de volgende stelling:

Stelling 61. *Voor bijna alle $\lambda \in \mathbb{Q}$ is de vezel $\sigma^{-1}(\lambda)$ isomorf met een affiene kegelsnede over $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{A}^2$ gegeven door:*

$$y_1^2 = 4(1-\lambda^2)b_1^2 - 4(1-\lambda^3)b_1 - \lambda^4 + 2\lambda^2 - 2$$

Bewijs Neem $\lambda \in \mathbb{Q}$. Dan geldt $\sigma^{-1}(\lambda) = \{(b_1, c_1, y_1) \in S_a | b_1 + c_1 = \lambda\}$. Dus $\sigma^{-1}(\lambda) = \{(b_1, c_1, y_1) \in \mathbb{A}^3 \, | y_1^2 = 2(b_1^2 + c_1^2 - 1) - (b_1 - c_1)^2(b_1 + c_1)^2, b_1 + c_1 = \lambda\}$. Subsitueren en uitwerken geven:

$$\begin{aligned} y_1^2 &= 2(b_1^2 + (\lambda - b_1)^2 - 1) - (2b_1 - \lambda)^2\lambda^2 \\ &= 2b_1^2 + 2\lambda^2 + 2b_1^2 - 4\lambda b_1 - 2 - 4b_1^2\lambda^2 + 4b_1\lambda^3 - \lambda^4 \\ &= 4(1-\lambda^2)b_1^2 - 4(1-\lambda^3)b_1 - \lambda^4 + 2\lambda^2 - 2. \ \square \end{aligned}$$

Voor bijna alle $\lambda \in \mathbb{Q}$ is de vergelijking $y_1^2 = 4(1-\lambda^2)b_1^2 - 4(1-\lambda^3)b_1 - \lambda^4 + 2\lambda^2 - 2$ een vergelijking van affiene kegelsnede[2] D_λ over $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{A}^2$ gegeven door:

$$\begin{cases} b_1 + c_1 = \lambda \\ 4(1-\lambda^2)b_1^2 - 4(1-\lambda^3)b_1 - \lambda^4 + 2\lambda^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

[2] $y_1^2 - 4(1-\lambda^2)b_1^2 + 4(1-\lambda^3)b_1 + \lambda^4 + 2\lambda^2 + 2$ heeft graad 2 en men kan laten zien dat deze irreducibel is door de vergelijking te herschrijven tot $y^2 + b(\lambda)x^2 + C(\lambda)$ en laten zien dat voor bijna alle $\lambda \in \mathbb{Q}$ irreducibel is.

De afbeelding

$$\pi: \ \sigma^{-1}(\lambda) \to D_\lambda$$

$$(b_1, c_1, y_1) \to (b_1, y_1)$$

definieert een isomorfisme met als inverse:

$$\rho: \ D_\lambda \to \sigma^{-1}(\lambda)$$

$$(b_1, y_1) \to (b_1, \lambda - b_1, y_1)$$

3.3. **Oneindig veel rationale punten en kegelsneden.**
Volgens stelling 60 is S_a irreducibel. We gaan de stelling 19 gebruiken om te laten zien dat de rationale punten Zariski dicht liggen in S_a. Uit stelling 20 volgt dan dat de rationale punten ook dicht liggen op S en dat is precies wat we willen bewijzen.

De wiskundige Buchholz heeft al een punt gevonden op S namelijk het punt met coördinaten $(a, b, c, y) = (12, 7, 11, 576)$. Dit punt correspondeert met het punt $A := (b_1, c_1, y_1) = (\frac{7}{12}, \frac{11}{12}, \frac{1}{3})$ op S_a. Omdat $\sigma(A) = \frac{3}{2}$ geldt volgens stelling 61 dat de vezel

$$C_{\frac{3}{2}} : y_1^2 = -5b_1^2 + \frac{15}{2}b_1 - \frac{41}{16}$$

boven $\lambda = \frac{3}{2}$ isomorf is met de kegelsnede $D_{\frac{3}{2}}$ over $\mathbb{Q}$ gegeven door $y_1^2 = -5b_1^2 + \frac{15}{2}b_1 - \frac{41}{16}$. Deze kegelsnede is parametriseerbaar want dit is precies de kegelsnede uit voorbeeld 55. Als parametrisatie hebben we gevonden:

$$P_1 : \mathbb{A}^1 \dashrightarrow D_{\frac{3}{2}}$$

$$t \dashrightarrow \left(\frac{7t^2 - 8t + 55}{12(t^2+5)}, \frac{t^2 - 5t - 5}{3(t^2+5)} \right).$$

Aangezien deze kegel een rationaal punt bevat en isomorf is met $C_{\frac{3}{2}}$ volgt nu uit gevolg 57 dat $C_{\frac{3}{2}}$ oneindig veel rationale punten bevat.
We definieren nu een ander morfisme:

$$\tau : S_a \to \mathbb{A}^1$$

$$(b_1, c_1, y_1) \to b_1 - c_1$$

en we bekijken de verzameling $M := \tau(C_{\frac{3}{2}}(\mathbb{Q}))$. Voor ieder $t \in \mathbb{Q}$ is $\left(\frac{7t^2-8t+55}{12(t^2+5)}, \frac{t^2-5t-5}{3(t^2+5)} \right)$ een element van $C_{\frac{3}{2}}(\mathbb{Q})$. Definieer

$$\mu_t := \tau\left(\left(\frac{7t^2 - 8t + 55}{12(t^2+5)}, \frac{t^2 - 5t - 5}{3(t^2+5)} \right) \right).$$

Dan geldt

$$\mu_t = \frac{7t^2 - 8t + 55}{12(t^2+5)} - \frac{t^2 - 5t - 5}{3(t^2+5)} = \frac{3t^2 + 12t - 35}{12(t^2+5)}.$$

De verzameling $C_{\frac{3}{2}}(\mathbb{Q})$ van $\mathbb{Q}$-rationale punten op $C_{\frac{3}{2}}$ is oneindig en er zijn hoogstens punten in $C_{\frac{3}{2}}(\mathbb{Q})$ die hetzelfde beeld hebben onder τ. Dus de verzameling M is oneindig. Analoog aan de vezel $\sigma^{-1}(\lambda)$ is voor bijna alle $\mu \in M$ de vezel $\tau^{-1}(\mu)$ isomorf met een kegelsnede over $\mathbb{Q}$.

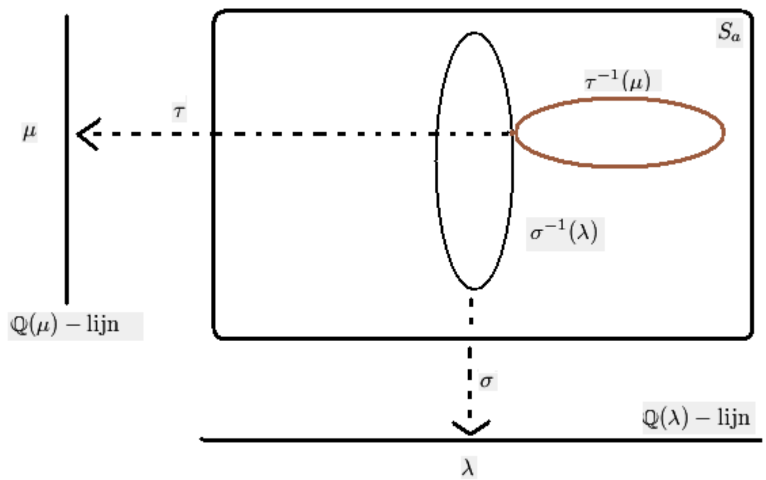
Voor $\mu_t = b_1 - c_1$ gelden $c_1 = b_1 - \mu_t$ en $b_1 + c_1 = 2b_1 - \mu_t$. Subsitueren van deze uitdrukkingen in de vergelijking van S_a geeft ons de vergelijking[3] van een kegelsnede $E_{\mu_t} \subset \mathbb{A}^2$ over $\mathbb{Q}$ met een rationaal punt erop en waarmee $\tau^{-1}(\mu_t)$ isomorf is. Namelijk:

$$y_1^2 = 4(1-\mu_t^2)b_1^2 - 4(1-\mu_t^3)b_1 - \mu_t^4 + 2\mu_t^2 - 2.$$

Volgens gevolg 57 is deze kegelsnede parametriseerbaar.

3.4. **Samenvatting en conclusie.**

We hebben laten zien dat de vezel $C_{\frac{3}{2}}$ isomorf is met een kegelsnede $D_{\frac{3}{2}}$ over $\mathbb{Q}$ die een rationaal punt bevat. Deze kegelsnede is volgens gevolg 57 parametriseerbaar en bevat in het bijzonder oneindig veel rationale punten. Met ieder punt in $C_{\frac{3}{2}}(\mathbb{Q})$ hebben we een kegelsnede over $\mathbb{Q}$ geassocieerd door de de afbeelding τ te beperken tot $C_{\frac{3}{2}}(\mathbb{Q})$ en dan de vezels boven ieder element in $M = \tau(C_{\frac{3}{2}}(\mathbb{Q}))$ te beschouwen. Voor bijna alle $\mu \in M = \tau(C_{\frac{3}{2}}(\mathbb{Q}))$ zijn deze (oneindig veel verschillende) vezels isomorf met kegelsneden E_{μ_t} over $\mathbb{Q}$ met een rationaal punt op ieder van deze vezels. Volgens gevolg 57 zijn deze vezels ook parametriseerbaar. In het bijzonder bevatten E_{μ_t} oneindig veel rationale punten. Zie figuur:



We voldoen nu aan alle voorwaarden van de topologische stelling 19 met:
X: Het affiene deel S_a van S met de geïnduceerde topologie. Deze is irreducibel volgens 60.
S: de verzameling $\mathbb{Q}$-rationale punten op S_a.
$\mathcal{C}$: een oneindige deelverzameling vezels van $\tau^{-1}(M) := \{\tau^{-1}(\mu)|,\ \mu \in M\}$. Merk op dat voor slechts eindig veel $\mu \in M$ de vezel $\tau^{-1}(\mu)$ niet irreducibel is.

We concluderen dat de $\mathbb{Q}$-rationale punten dicht liggen op S_a. Het affiene deel S_a is een open deel van S en omdat S irreducibel is, ligt volgens lemma 6 S_a dicht in S. Er volgt uit stelling 20 dat $C(\mathbb{Q})$ dicht ligt in S.

[3] We krijgen precies dezelfde vergelijking als die van D_λ. Dit volgt uit het feit dat de kwadraten $b_1^2, c_1^2, (b_1+c_1)^2$ en $(b_1-c_1)^2$ in de vergelijking van S_a zorgen voor dezelfde kegelsneden leiden.

Referenties

[1] Enrique Acosta Jaramillo, *Rational Terahedra*, Juli, 2007.
[2] Ralph Heiner Buchholz, *Perfect Pyramids*, June 1992- Bull. Aust. Math. Soc., vol 45, no. 3.
[3] Catherine Chisholm, *Rational and Heron Terahedra*, December 21, 2004.
[4] Bas Edixhoven en Lenny Taelman, *course Mastermath Algebraic Geometry Spring 2009*, 2009.
[5] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, 2000, Graduate texts in mathematics: 52.
[6] Marek Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*,2e editie, 2009.
[7] Michale Stoll, *Linear Algebra II, course No. 100 222*, Spring 2007.