E.P.J.A. Siero

Clifford-algebra's en spinrepresentaties

Bachelorscriptie wiskunde & natuurkunde

augustus 2009

Begeleider wiskunde: Dr. R.J. Kooman
Begeleider natuurkunde: Dr. K.E. Schalm

Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Gegeven een reële vectorruimte van dimensie n met daarop gedefinieerd een kwadratische vorm kunnen we kijken naar de groep van inverteerbare lineaire isomorfismen die de kwadratische vorm respecteren. Als we de kwadratische vorm karakteriseren met een zogenaamde signatuur (p, q), dan geven we deze groep aan met $O_{p,q}(\mathbb{R})$. De ondergroep hiervan die bovendien de oriëntatie invariant laat noteren we met $SO_{p,q}(\mathbb{R})$. Dit zijn Liegroepen. In de appendix worden deze groepen kort behandeld.

Aangezien $SO_{p,q}(\mathbb{R})$ niet in het algemeen samenhangend is zullen we de samenhangscomponent van het eenheidselement in $O_{p,q}(\mathbb{R})$ en $SO_{p,q}(\mathbb{R})$ met $SO^+_{p,q}(\mathbb{R})$ noteren, de fundamentaalgroep $\pi_1(SO^+_{p,q}(\mathbb{R}))$ van deze samenhangscomponent hangt af van de signatuur en wordt gegeven door de volgende tabel[1]:

$_p\backslash^q$	0	1	2	≥ 3
0	$\{1\}$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
2	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
≥ 3	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Een doel van deze scriptie is om binnen een Clifford-algebra $Cl_{p,q}(\mathbb{R})$ een tweevoudige overdekkingsruimte te construeren van $SO^+_{p,q}(\mathbb{R})$. Een trouwe representatie van de Clifford-algebra genereert nu door restrictie een trouwe representatie van de overdekking. In het geval dat de fundamentaalgroep gelijk is aan $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is dit een representatie van de universele overdekkingsruimte.

Op een dergelijke manier zullen we representaties geven van de spingroepen $Spin_{p,q}(\mathbb{R}) \subset Cl_{p,q}(\mathbb{R})$, de zogenaamde spinrepresentaties. De representatieruimte wordt in dit geval ook wel de spinorruimte genoemd en elementen hieruit heten spinoren. In bepaalde gevallen is de representatie reducibel, dit geeft aanleiding tot de zogenaamde half-spinoren. Om de volledige structuur van de orthogonale groepen weer te geven zijn spinoren noodzakelijk.

In het geval van de Minkowski-ruimte kunnen deeltjes met heeltallige spin, bosonen, trouw worden gerepresenteerd door vectoren. Voor deeltjes met halftallige spin, fermionen, is dit niet het geval. Voor elektronen, waarop de Dirac vergelijking van toepassing is, gebruikt men hiervoor de zogenaamde Dirac spinoren, die kunnen worden opgebouwd uit Weyl half-spinoren.

[1] De waarden in de tabel zijn gemakkelijk te onthouden aangezien geldt dat:

$$\pi_1(SO^+_{p,q}(\mathbb{R})) = \pi_1(SO_p(\mathbb{R})) \times \pi_1(SO_q(\mathbb{R}))$$

2 Lineaire algebra

Zij $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, zij $n \in \mathbb{N}$, zij V de vectorruimte K^n, zij $Q : V \to K$ een kwadratische vorm.

Definitie Een *kwadratische vorm* op V is een afbeelding $Q : V \to K$ zó dat:

- $\forall v \in V, \forall c \in K : Q(cv) = c^2 Q(v)$;
- de afbeelding B gegeven door:

$$\begin{aligned} B: \quad V \times V &\to K \\ (v, w) &\mapsto \frac{1}{2}\left(Q(v+w) - Q(v) - Q(w)\right) \end{aligned}$$

  is een bilineaire symmetrische vorm.

Definitie Een kwadratische vorm heet *niet-gedegenereerd* als geldt dat:

$$\forall v \in V : B(v, w) = 0 \Rightarrow w = 0.$$

Merk op dat $B(v, v) = Q(v)$. In het vervolg zullen we aannemen dat iedere kwadratische vorm niet-gedegenereerd is.

We behandelen eerst het geval $K = \mathbb{C}$. Dan bestaat er voor iedere kwadratische vorm Q een basis $e_1, ..., e_n$ en een geassocieerde diagonaalmatrix A met enkel enen op de diagonaal zodat $Q(v) = v^T Av$.

In de rest van dit hoofdstuk geldt $K = \mathbb{R}$. Dan bestaat er voor iedere kwadratische vorm Q een basis $e_1, ..., e_n$ en een geassocieerde diagonaalmatrix A met enkel enen en min-enen op de diagonaal zodat $Q(v) = v^T Av$.

De traagheidsstelling van Sylvester[2] leert ons dat het aantal enen en min-enen onafhankelijk is van de specifieke geassocieerde diagonaalmatrix. Dit leidt ons tot de volgende definitie.

Definitie Zij $Q : V \to \mathbb{R}$ een kwadratische vorm, p het aantal enen en q het aantal min-enen van een geassocieerde matrix. Het paar (p, q) heet de *signatuur* van Q. De diagonaalmatrix $I_{p,q}$ gegeven door:

$$\left(I_{p,q}\right)_{jj} = \begin{cases} 1 & \text{als } j \leq p \\ -1 & \text{als } j > p \end{cases}$$

heet de *signatuurmatrix*.

[2]Een formulering en bewijs is te vinden in [1], hoofdstuk 8 stelling 1: bladzijde 77 en 78.

3 De Dirac vergelijking

De Klein-Gordon vergelijking, een relativistische versie van de Schrödingervergelijking, is een kwadratische differentiaalvergelijking. Het kan beschouwd worden als een eigenwaardevergelijking met als operator de d'Alembertiaan. Door van deze operator de wortel te nemen verkrijgt men de Dirac operator, een lineaire differentiaaloperator. Zoals we later zullen zien brengen de coëfficiënten van de afgeleiden in de Dirac operator de Clifford-algebra $Cl_{3,1}(\mathbb{R})$ voort. De eigenwaardevergelijking van de Dirac operator heet de Dirac vergelijking, oplossingen van de Dirac vergelijking beschrijven vrije elektronen in de Minkowski-ruimte: de vectorruimte $\mathbb{R}^4$ uitgerust met een kwadratische vorm met signatuur $(3, 1)$.

Laat $V = \mathbb{R}^4$ en Q een kwadratische vorm met signatuur $(3, 1)$. Laat $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ een basis zijn waarvoor geldt dat $Q(v) = v^T I_{3,1} v$, waarbij $v = xr_1 + yr_2 + zr_3 + tr_4$. Zij $m \in \mathbb{R}$ de rustmassa van het elektron.

Definitie De *d'Alembertiaan* wordt gegeven door

$$\Box = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2;$$

De *Klein-Gorden vergelijking* wordt (in natuurlijke eenheden) gegeven door:

$$\Box\Psi = m^2\Psi.$$

Vervolgens zoeken we coëfficiënten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ zodat:

$$\left(\gamma_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \gamma_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \gamma_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) + \gamma_4\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2 = \Box.$$

Dergelijke coëfficiënten moeten aldus voldoen aan de vergelijkingen:

$$\gamma_j\gamma_k + \gamma_k\gamma_j = 2\left(I_{3,1}\right)_{j,k}.$$

Aangezien de γ's dus niet met elkaar commuteren, kunnen we een representatie ervan niet in een lichaam vinden. In paragraaf 6.3 geven we een representatie binnen de reële matrixalgebra $M_4^{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$.

Definitie De *Dirac operator* wordt gegeven door

$$D = \left(\gamma_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \gamma_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \gamma_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) + \gamma_4\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right);$$

De *Dirac vergelijking* wordt gegeven door:

$$D\Psi = m\Psi.$$

4 Clifford-algebra

In dit hoofdstuk zullen we Clifford-algebra's definiëren en een tweevoudige overdekking van een gegeven orthogonale groep als deelstructuur van een geschikte Clifford-algebra identificeren. Een meer uitgebreide behandeling van Clifford-algebra's is te vinden in het eerste hoofdstuk van [2].

Laat $T^n(V) = V \bigotimes V \bigotimes ... \bigotimes V$ het tensorproduct van V n keer met zichzelf zijn, zij $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(V)$ de tensoralgebra van V. Laat $I(V)$ het (tweezijdig) ideaal voortgebracht door de verzameling $\{ v \otimes v - Q(v) | \, v \in V \}$ zijn.

Definitie De *Clifford-algebra* van een vectorruimte V uitgerust met een kwadratische vorm Q wordt gegeven door het quotient $Cl(V, Q) = T(V)/I(V)$.

Per constructie is de Clifford-algebra een associatieve algebra met eenheidselement.

Notatie Als $V = \mathbb{C}^n$ dan zijn alle kwadratische vormen equivalent. In dit geval noteren we de Clifford-algebra met $Cl_n(\mathbb{C})$. Als $V = \mathbb{R}^n$ dan wordt een kwadratische vorm gekarakteriseerd door de signatuur (p, q). In dit geval noteren we de bijbehorende Clifford-algebra met $Cl_{p,q}(\mathbb{R})$.

We zullen een dergelijke conventie voor de notatie ook gebruiken voor deelstructuren van de Clifford-algebra en orthogonale groepen.

Laat in het vervolg $e_1, ..., e_n$ een basis voor V zijn zodat $B(e_i, e_j) = (I_{p,q})_{i,j}$. Tevens zullen we elementen van de Clifford-algebra aanduiden met een representant. Als notatie voor het product (de bilineaire binaire operatie) van twee elementen $v, w \in Cl(V, Q)$ zullen we vw gebruiken. We identificeren $V = T^1(V)$ en $K = T^0(V)$. Voor het vervolg hebben we enkele identiteiten binnen de Clifford-algebra nodig.

Zij $v, w \in V$, er geldt:

$$\begin{aligned} B(v, w) &= \frac{1}{2}(Q(v + w) - Q(v) - Q(w)) \\ &= \frac{1}{2}((v + w)(v + w) - vv - ww) \\ &= \frac{1}{2}(vw + wv); \end{aligned}$$

in het bijzonder geldt dat:

$$B(e_i, e_j) = \frac{1}{2}(e_i e_j + e_j e_i);$$

en voor $i \neq j$ geldt dus:

$$\begin{aligned} e_i e_j + e_j e_i &= 2\delta_{ij} Q(e_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Een basis voor de tensoralgebra wordt gegeven door producten van de basisvectoren van V. Bovenstaande formules geven ons de mogelijkheid om een product van basiselementen van V te rangschikken en dubbel voorkomende elementen tegen elkaar weg te strepen, eventueel ten koste van een minteken. Dit leidt ons tot het volgende lemma.

Lemma Een basis voor $Cl(V,Q)$ als vectorruimte wordt gegeven door de producten:

$$e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_m} \text{ waarbij } 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_m \leq n.$$

Bewijs Zij $v \in Cl(V,Q)$, schrijf $v = \Sigma_j c_j e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_{k_j}}$ waarbij $c_j \in K, k_j \in \mathbb{N}$ en $1 \leq j_l \leq n$. Beschouw $e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_{k_j}}$ voor zekere j. Aangezien voor $i \neq j$ geldt dat $e_ie_j = -e_je_i$ volgt dat:

$$e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_{k_j}} = \pm e_{h_1}e_{h_2}...e_{h_l} \text{ voor zekere } 1 \leq h_1 \leq h_2 \leq ... \leq h_l \leq n.$$

Omdat bovendien geldt dat $e_ie_i = Q(e_i) = \pm 1$ volgt dat:

$$e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_{k_j}} = \pm e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_m} \text{ voor zekere } 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_m \leq n.$$

Dus ieder element van $Cl(V,Q)$ kan geschreven worden als lineaire combinatie van producten:

$$e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_m} \text{ waarbij } 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_m \leq n.$$

Lineaire onafhankelijkheid van deze producten volgt uit lineaire onafhankelijkheid van de representanten als elementen van de tensoralgebra. □

In het vervolg zullen we een element uit de Clifford-algebra altijd representeren door een lineaire combinatie zoals in het voorgaande lemma. De verzameling van inverteerbare elementen (t.o.v. het product) in de Clifford-algebra vormt een groep onder het product. Immers: het eenheidselement is inverteerbaar, associativiteit volgt uit associativiteit van de algebra, de inverse van een product wordt gegeven door het omgekeerde product van de inversen.

Definitie De *eenhedengroep* van een Clifford-algebra is de verzameling

$$Cl^{\times}(V,Q) = \{x \in Cl(V,Q) | \exists y \in Cl(V,Q) : xy = yx = 1\}$$

met als groepsoperatie het product.

Voor v in V geldt dat $Q(v) \neq 0$ dan en slechts dan als $v \in Cl^{\times}(V,Q)$.

Definitie De *pingroep* van $Cl(V,Q)$ is de ondergroep $Pin(V,Q)$ van $Cl^{\times}(V,Q)$ voortgebracht door de verzameling $\{v \in V | Q(v) = \pm 1\}$.

De volgende afbeeldingen zijn belangrijk en worden daarom in het vervolg met een vast symbool aangegeven.

Definitie Laat α, β, N de afbeeldingen zijn gegeven door:

$$\begin{array}{rll} \alpha: & Cl(V,Q) & \to Cl(V,Q) \\ & \Sigma_j c_j e_{j_1} ... e_{j_{k_j}} & \mapsto \Sigma_j c_j (-e_{j_1}) ... (-e_{j_{k_j}}); \\ \beta: & Cl(V,Q) & \to Cl(V,Q) \\ & \Sigma_j c_j e_{j_1} ... e_{j_{k_j}} & \mapsto \Sigma_j c_j e_{j_{m_j}} ... e_{j_1}; \\ N: & Cl(V,Q) & \to Cl(V,Q) \\ & \Sigma_j c_j e_{j_1} ... e_{j_{k_j}} & \mapsto \beta\left(\Sigma_j c_j e_{j_1} ... e_{j_{k_j}}\right) \Sigma_j c_j e_{j_1} ... e_{j_{k_j}}. \end{array}$$

Er geldt dat α een algebra-homomorfisme is en β is een algebra-antihomomorfisme.

Definitie De deelverzameling van de Clifford-algebra gegeven door:

$$Cl^0(V,Q) = \{ w \in Cl(V,Q) |\, \alpha(w) = w\}$$

heet de *even deelalgebra* van $Cl(V,Q)$. Een element in de even deelalgebra heet *even*.

De even deelalgebra is een deelalgebra met als eenheidselement het eenheidselement van de Clifford-algebra. Ieder element $u \in Cl(V,Q)$ kunnen we schrijven als som $u = x + y$ met $\alpha(x) = x$ en $\alpha(y) = -y$.

Lemma De inverse van een inverteerbaar even element is even.
Bewijs Stel dat $w \in Cl^0(V,Q)$ en $u \in Cl(V,Q)$ zo dat $wu = 1$. Schrijf $u = x + y$ met $\alpha(x) = x$ en $\alpha(y) = -y$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} w(x-y) &= \alpha(wx) + \alpha(wy) \\ &= \alpha(wu) = \alpha(1) = 1 \\ &= wu = w(x+y). \end{aligned}$$

Aangezien de inverse uniek is volgt dat $y = 0$ en dus $u \in Cl^0(V,Q)$. $\square$

Dit lemma rechtvaardigt de volgende definitie.

Definitie De *spingroep* van $Cl(V,Q)$ is de ondergroep van de pingroep gegeven door $Spin(V,Q) = Pin(V,Q) \cap Cl^0(V,Q)$.

Het centrum van een algebra is de deelalgebra van alle elementen die met alle andere elementen commuteren ten opzichte van het product.

Lemma Het centrum van $Cl(V,Q)$ is gelijk aan K als n even is en is gelijk aan $K \oplus Ke_1e_2...e_n$ als n oneven is.
Bewijs Zij $w = \Sigma_j c_j e_{j_1} ... e_{j_{m_j}}$ een element uit het centrum van $Cl(V,Q)$.

Voor iedere e_i geldt nu dat $we_i = e_i w$ en omdat e_i inverteerbaar is volgt hieruit dat voor alle i, j geldt:

$$\begin{aligned} e_{j_1}...e_{j_{m_j}} e_i &= e_i e_{j_1}...e_{j_{m_j}} \\ &= \begin{cases} (-1)^{m_j - 1} e_{j_1}...e_{j_{m_j}} e_i & \text{als } j_l = i \text{ voor zekere } l \\ (-1)^{m_j} e_{j_1}...e_{j_{m_j}} e_i & \text{als } j_l \neq i \text{ voor alle } l \end{cases} \end{aligned}$$

Uit bovenstaande kunnen we concluderen dat $e_{j_1}...e_{j_{m_j}} = 1$, of $e_{j_1}...e_{j_{m_j}} = e_1 e_2 ... e_n$ mits n oneven. Aangezien het centrum een deelalgebra is zijn we klaar. □

5 Een tweevoudige overdekking van $O_{p,q}(\mathbb{R})$

Definitie Zij $w \in V$ met $Q(w) \neq 0$. Laat ϕ_w de afbeelding zijn gegeven door:

$$\begin{aligned} \phi_w : \quad V &\to V \\ v &\mapsto \frac{-wvw}{Q(w)}. \end{aligned}$$

We noemen ϕ_w de *spiegeling* in het hypervlak loodrecht op w.

Om de definitie te valideren moeten we nagaan dat het beeld van ϕ_w in V ligt. Voor $v, w \in V$ met $Q(w) \neq 0$ geldt:

$$\frac{-wvw}{Q(w)} \quad = \quad \frac{-w(-wv + 2B(v,w))}{Q(w)} = v - \frac{2B(v,w)}{Q(w)} w \in V.$$

De uitdrukking aan de rechterkant is op de 2 na gelijk aan een orthogonalisatieprocedure zoals het Gram-Schmidt proces: in deze vorm is het duidelijk dat ϕ_w een spiegeling is.

We beschouwen enkele eigenschappen van ϕ_w. Voor $u, v, w \in V$ met $Q(w) \neq 0$ en $c, d \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\begin{aligned} \phi_w(cu + dv) &= \frac{-w(cu+dv)w}{Q(w)} \\ &= c\frac{-wuw}{Q(w)} + d\frac{-wvw}{Q(w)} \\ &= c\phi_w(u) + d\phi_w(v), \\ \phi_w \circ \phi_w(v) &= \phi_w\left(\frac{-wvw}{Q(w)}\right) \\ &= \frac{wwvww}{Q(w)Q(w)} \\ &= v, \\ Q\left(\phi_w(v)\right) &= Q\left(\frac{-wvw}{Q(w)}\right) \\ &= \frac{-wvw}{Q(w)} \cdot \frac{-wvw}{Q(w)} \\ &= Q(v). \end{aligned}$$

Dus ϕ_w is een inverteerbare lineaire afbeelding die de kwadratische vorm respecteert. We concluderen dat $\phi_w \in O_{p,q}(\mathbb{R})$.

We hebben hierboven reeds gezien dat ϕ_w een involutie is, dus $\det(\phi_w) = \pm 1$. Laat w in V met $Q(w) \neq 0$, schrijf $w = \Sigma_j \lambda_j e_j$. Aangezien $w \neq 0$ bestaat er een k zodat $\lambda_k \neq 0$, definieer voor een dergelijke k:

$$a_j \quad = \quad \begin{cases} w & \text{als } j = k \\ e_j - \frac{B(e_j,w)}{Q(w)} w & \text{als } j \neq k \end{cases}.$$

De a_j vormen een basis van V. Voor $j = k$ geldt dat:

$$\begin{aligned}\phi_w(a_j) &= \frac{-www}{Q(w)} \\ &= -a_j\end{aligned}$$

en voor $j \neq k$ geldt dat:

$$\begin{aligned}\phi_w(a_j) &= \frac{-w(e_j - \frac{B(e_j,w)}{Q(w)}w)w}{Q(w)} \\ &= e_j - 2\frac{B(e_j,w)}{Q(w)}w + \frac{B(e_j,w)}{Q(w)}w \\ &= a_j.\end{aligned}$$

Dus volgt dat ϕ_w de oriëntatie verandert en de determinant dus een negatief teken heeft: $\det(\phi_w) = -1$.

We noteren een element uit $Pin_{p,q}(\mathbb{R})$ met $w_1w_2...w_m$, waarbij $w_j \in V$ en $Q(w_j) = \pm 1$.

Definitie Laat Ψ de afbeelding zijn gegeven door:

$$\begin{aligned}\Psi : \quad Pin_{p,q}(\mathbb{R}) &\to O_{p,q}(\mathbb{R}) \\ w_1w_2...w_m &\mapsto \phi_{w_1} \circ \phi_{w_2} \circ ... \circ \phi_{w_m}.\end{aligned}$$

Het is duidelijk dat Ψ een groepshomomorfisme is. Aangezien $\det(\phi_{w_i}) = -1$ volgt dat $\Psi(w_1...w_m) \in SO_{p,q}(\mathbb{R})$ dan en slecht dan als m een even getal is en dus $w_1...w_m \in Spin_{p,q}(\mathbb{R})$.

Lemma Er geldt: $\ker(\Psi) = \{1, -1\}$.
Bewijs Laat $w_1...w_m \in \ker(\Psi)$, dan geldt voor alle v in V dat:

$$\frac{w_m...w_1vw_1...w_m}{Q(w_1)...Q(w_m)} = v$$

en dus

$$vw_1...w_m = w_1...w_mv.$$

Dus $w_1...w_m$ ligt in het centrum van $Cl_{p,q}(\mathbb{R})$.

Aangezien $\det(\Psi(w_1...w_m)) = 1$ is $w_1...w_m$ een element van $Spin_{p,q}(\mathbb{R})$. De doorsnede van het centrum met de spingroep is $\mathbb{R}$, dus $w_1...w_m = c \in R$. We berekenen met de eerder gedefinieerde afbeelding N:

$$c^2 = N(c) = N(w_1...w_m) = Q(w_1)...Q(w_m) = \pm 1;$$

dus $c = \pm 1$. We kunnen dus concluderen dat $\ker(\Psi) \subset \{1, -1\}$.

Merk op dat omdat $\phi_{e_1} = \phi_{-e_1}$ en ${\phi_{e_1}}^2 = I$ geldt dat $\Psi(\pm 1) = \Psi(\pm {e_1}^4) = \phi_{-e_1}{\phi_{e_1}}^3 = I$ gelijk is aan de identiteit, dus $\{1, -1\} \subset \ker(\Psi)$. Tezamen geeft dit $\ker(\Psi) = \{1, -1\}$. $\square$

Voor het bewijs van het volgende lemma hebben we de Stelling van Cartan-Dieudonné[3] nodig.

Stelling (Cartan-Dieudonné) Ieder element van $O_{p,q}(\mathbb{R})$ is het product van ten hoogste n spiegelingen.

Lemma Er geldt: Ψ is surjectief.
Bewijs Een spiegeling is een afbeelding $\Psi(w) = \phi_w$, waarbij $w \in V$ zo genomen kan worden dat $Q(w) = \pm 1$ en dus $w \in Pin_{p,q}(\mathbb{R})$. Dus iedere spiegeling wordt bereikt, uit Cartan-Dieudonné volgt nu dat Ψ surjectief is. $\square$

We kunnen nu aan $\Psi^{-1}(SO^+_{p,q}(\mathbb{R})) \subset Spin_{p,q}(\mathbb{R})$ een topologie toekennen zodat deze ruimte een tweevoudige overdekkingsruimte wordt van $SO^+_{p,q}(\mathbb{R})$. We kunnen van $\Psi^{-1}(SO^+_{p,q}(\mathbb{R}))$ zelfs een differentieerbare variëteit maken met deze eigenschap. In het geval dat $\pi_1(SO^+_{p,q}(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is dit de universele overdekkingsruimte. Propositie 7.10 van [4] geeft nu dat, bij keuze van een eenheidselement uit het inverse beeld van het eenheidselement in $O_{p,q}(\mathbb{R})$, we een unieke Liegroepstructuur kunnen toekennen aan $\Psi^{-1}(SO^+_{p,q}(\mathbb{R}))$ zodat Ψ hiertoe beperkt een Liegroepshomomorfisme is. We werken de details hiervan verder niet uit.

[3] Deze stelling wordt bewezen in [3], Stelling 3.20: bladzijde 129 en 130

6 Een trouwe representatie van $Spin_{p,q}(\mathbb{R})$

In dit deel zullen we een manier beschrijven om trouwe representaties $\chi_{p,q} : Cl_{p,q}(\mathbb{R}) \to M_m(\mathbb{C})$ te vinden, waarbij $M_m(\mathbb{C})$ de matrixalgebra is van complexe $m \times m$-matrices over $\mathbb{C}$ voor een nog te kiezen natuurlijk getal m. We zullen hiertoe eerst representaties van $\phi_n : Cl_n(\mathbb{C}) \to M_m(\mathbb{C})$ inductief afleiden. We bekijken ook of ϕ_n reducibel is. Vervolgens kunnen we een representatie $\chi_{p,q}$ beperken om een representatie van een deelstructuur te verkrijgen. Zodoende kunnen we trouwe representaties verkrijgen voor de reële spingroepen.

6.1 Constructie van een trouwe representatie van $Cl_n(\mathbb{C})$

Zij $n > 0$ gegeven, zij $e_1, ..., e_n$ een basis van $V = \mathbb{C}^n$ zodat $B(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Aangezien een representatie een homomorfisme is, zijn de beelden van $e_1, ..., e_n$ voldoende om een representatie vast te leggen. We geven een inductieve definitie van de afbeelding ϕ_n, we onderscheiden hierbij twee mogelijkheden: n is oneven of n is even. Voor een natuurlijk getal l noteren we met I_l de $l \times l$-eenheidsmatrix.

De volgende definitie dient als beginstap in het inductieproces. Merk op dat $Cl_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ en $M_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$.

Definitie Laat de afbeelding $\phi_0 : Cl_0(\mathbb{C}) \to M_1(\mathbb{C})$ de identiteit op $\mathbb{C}$ zijn.

Het is duidelijk dat ϕ_0 een trouwe representatie van $Cl_0(\mathbb{C}$ is.

Notatie Zij $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ en $\phi_n : Cl_n(\mathbb{C}) \to M_m(\mathbb{C})$ een afbeelding. Om ruimte te besparen zullen we de volgende notatie invoeren:

$$\begin{pmatrix} \phi_n(e_{j_1}...e_{j_{k_j}})a & \phi_n(e_{j_1}...e_{j_{k_j}})b \\ \phi_n(e_{j_1}...e_{j_{k_j}})c & \phi_n(e_{j_1}...e_{j_{k_j}})d \end{pmatrix} =: \phi_n(e_{j_1}...e_{j_{k_j}}) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ook in het geval dat $\phi_n(e_{j_1}...e_{j_{k_j}})$ een 2×2-matrix is, moet dit dus niet als matrixproduct geïnterpreteerd worden.

Definitie Stel $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ is even, laat het algebra-homomorfisme $\phi_n : Cl_n(\mathbb{C}) \to M_{2^{\frac{n}{2}}}(\mathbb{C})$ gegeven zijn. Dan wordt het algebra-homomorfisme $\phi_{n+1} : Cl_{n+1}(\mathbb{C}) \to M_{2^{\frac{n+2}{2}}}(\mathbb{C})$ gegeven door:

$$\phi_{n+1}(e_j) = \begin{cases} \phi_n(e_j) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \text{als } j \in \{1, ..., n\} \\ \phi_n(e_1...e_n) \begin{pmatrix} 0 & -i^{\frac{n+2}{2}} \\ i^{\frac{n+2}{2}} & 0 \end{pmatrix} & \text{als } j = n+1. \end{cases}$$

Definitie Stel $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ is oneven, laat het algebra-homomorfisme $\phi_n : Cl_n(\mathbb{C}) \to M_{2^{\frac{n+1}{2}}}(\mathbb{C})$ gegeven zijn. Dan wordt het algebra-homomorfisme

$\phi_{n+1} : Cl_{n+1}(\mathbb{C}) \to M_{2^{\frac{n+1}{2}}}(\mathbb{C})$ gegeven door:

$$\phi_{n+1}(e_j) \quad = \quad \begin{cases} \phi_n(e_j) & \text{als } j \in \{1,...,n\} \\ \begin{pmatrix} 0 & I_{2^{\frac{n-1}{2}}} \\ I_{2^{\frac{n-1}{2}}} & 0 \end{pmatrix} & \text{als } j = n+1. \end{cases}$$

Stelling Voor $n \in \mathbb{N}$ is de afbeelding ϕ_n een representatie.
Bewijs We bewijzen dit eerst met inductie voor even n. De beginstap $n = 0$ wordt gegeven door de definitie aan het begin van dit hoofdstuk.

Stel dat voor zekere even n voor $m \leq n$ even geldt dat ϕ_m een representatie is. We hoeven enkel de commutatierelaties voor de beelden van de elementen $e_1, ..., e_{n+2}$ na te gaan. Omdat ϕ_n een representatie is volgen voor $j, k \in \{1, ..., n\}$ de volgende identiteiten:

$$\begin{aligned}
&\phi_{n+2}(e_j)\phi_{n+2}(e_k) + \phi_{n+2}(e_k)\phi_{n+2}(e_j) \\
&\quad = \quad (\phi_n(e_j)\phi_n(e_k) + \phi_n(e_k)\phi_n(e_j)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad = \quad 2\delta_{j,k} I_{2^{\frac{n+2}{2}}}; \\
&(\phi_{n+2}(e_{n+1}))^2 \\
&\quad = \quad \left(\phi_n(e_1)...\phi_n(e_n) \begin{pmatrix} 0 & -i^{\frac{n+2}{2}} \\ i^{\frac{n+2}{2}} & 0 \end{pmatrix} \right)^2 \\
&\quad = \quad -i^{\frac{n+2}{2}} i^{\frac{n+2}{2}} \phi_n(e_1)...\phi_n(e_n)\phi_n(e_1)...\phi_n(e_n) I_{2^{\frac{n+2}{2}}} \\
&\quad = \quad (-1)^{1+\frac{n+2}{2}+\frac{n(n-1)}{2}} I_{2^{\frac{n+2}{2}}} \\
&\quad = \quad I_{2^{\frac{n+2}{2}}}; \\
&(\phi_{n+2}(e_{n+2}))^2 \\
&\quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & I_{2^{\frac{n}{2}}} \\ I_{2^{\frac{n}{2}}} & 0 \end{pmatrix}^2 \\
&\quad = \quad I_{2^{\frac{n+2}{2}}}; \\
&\phi_{n+2}(e_j)\phi_{n+2}(e_{n+1}) \\
&\quad = \quad \phi_n(e_j) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \phi_n(e_1)...\phi_n(e_n) \begin{pmatrix} 0 & -i^{\frac{n+2}{2}} \\ i^{\frac{n+2}{2}} & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad = \quad -\phi_n(e_1)...\phi_n(e_n) \begin{pmatrix} 0 & -i^{\frac{n+2}{2}} \\ i^{\frac{n+2}{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \phi_n(e_j) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad = \quad -\phi_{n+2}(e_{n+1})\phi_{n+2}(e_j); \\
&\phi_{n+2}(e_j)\phi_{n+2}(e_{n+2}) \\
&\quad = \quad \phi_n(e_j) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot I_{2^{\frac{n}{2}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -I_{2^{\frac{n}{2}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \phi_n(e_j) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\phi_{n+2}(e_{n+2})\phi_{n+2}(e_j);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\phi_{n+2}(e_{n+1})\phi_{n+2}(e_{n+2}) \\
&= \phi_n(e_1...e_n) \begin{pmatrix} 0 & -i^{\frac{n+2}{2}} \\ i^{\frac{n+2}{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot I_{2^{\frac{n}{2}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -I_{2^{\frac{n}{2}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \phi_n(e_1...e_n) \begin{pmatrix} 0 & -i^{\frac{n+2}{2}} \\ i^{\frac{n+2}{2}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\phi_{n+2}(e_{n+2})\phi_{n+2}(e_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Dus ϕ_{n+2} is een representatie van $Cl_{n+2}(\mathbb{C})$.

Voor oneven n: ϕ_n is de restrictie van ϕ_{n+1} tot $Cl_n(\mathbb{C}) \subset Cl_{n+1}(\mathbb{C})$, dus ϕ_n is ook een representatie. We concluderen dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt dat ϕ_n een representatie is. $\square$

Merk op dat ϕ_n een werking van de Clifford-algebra $Cl_n(\mathbb{C})$ op de representatieruimte induceert. Zij x in $Cl_n(\mathbb{C})$, dan is $\phi_n(x)$ op te delen in vier even grote deelmatrices waarvan er twee enkel nullen bevatten. De twee niet-nul deelmatrices verschillen ten hoogste van teken en liggen wel of niet op de diagonaal.

Stelling Voor $n \in \mathbb{N}$ is de afbeelding ϕ_n injectief.
Bewijs We bewijzen dit eerst met inductie voor even n. De beginstap $n = 0$ wordt gegeven door de definitie aan het begin van dit hoofdstuk.

Stel dat voor zekere even n voor $m \leq n$ even geldt dat ϕ_m injectief is. Dan is de verzameling van beelden van producten $\phi_n(e_{j_1}...e_{j_{k_j}})$ met $1 \leq j_1 < ... < j_{k_j} \leq n$ lineair onafhankelijk. Er zijn acht mogelijkheden:

- Als k_j even, $j_{k_j} = n+2$ en $j_{k_j-1} = n+1$ dan geldt:
$$\phi_{n+2}(e_{j_1}...e_{j_{k_j}}) = \phi_n(e_{j_1}...e_{j_{k_j-2}}e_1...e_n) \begin{pmatrix} -i^{\frac{n+2}{2}} & 0 \\ 0 & i^{\frac{n+2}{2}} \end{pmatrix};$$
dus het beeld van een <u>even</u> element onder ϕ_n; de deelmatrices liggen met <u>tegengesteld</u> teken op de <u>diagonaal</u>.

- Als k_j even, $j_{k_j} = n+2$ en $j_{k_j-1} \neq n+1$ dan geldt:
$$\phi_{n+2}(e_{j_1}...e_{j_{k_j}}) = \phi_n(e_{j_1}...e_{j_{k_j-1}}) \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix};$$
dus het beeld van een <u>oneven</u> element onder ϕ_{n-1}; de deelmatrices liggen met <u>tegengesteld</u> teken op de <u>diagonaal</u>.

- Als k_j even, $j_{k_j} \neq n+2$ en $j_{k_j} = n+1$ dan geldt:
$$\phi_{n+2}(e_{j_1}...e_{j_{k_j}}) = \phi_n(e_{j_1}...e_{j_{k_j-1}}e_1...e_n) \begin{pmatrix} -i^{\frac{n+4}{2}} & 0 \\ 0 & -i^{\frac{n+4}{2}} \end{pmatrix};$$
dus het beeld van een <u>oneven</u> element onder ϕ_n; de deelmatrices liggen met <u>gelijk</u> teken op de <u>diagonaal</u>.

- Als k_j even, $j_{k_j} \neq n+2$ en $j_{k_j} \neq n+1$ dan geldt:
$$\phi_{n+2}(e_{j_1}...e_{j_{k_j}}) \quad = \quad \phi_n(e_{j_1}...e_{j_{k_j}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$
dus het beeld van een even element onder ϕ_n; de deelmatrices liggen met gelijk teken op de diagonaal.

- Als k_j oneven, $j_{k_j} = n+2$ en $j_{k_j-1} = n+1$ dan geldt:
$$\phi_{n+2}(e_{j_1}...e_{j_{k_j}}) \quad = \quad \phi_n(e_{j_1}...e_{j_{k_j-2}}e_1...e_n) \begin{pmatrix} 0 & -i^{\frac{n+4}{2}} \\ -i^{\frac{n+4}{2}} & 0 \end{pmatrix};$$
dus het beeld van een oneven element onder ϕ_n; de deelmatrices liggen met gelijk teken op de anti-diagonaal.

- Als k_j oneven, $j_{k_j} = n+2$ en $j_{k_j-1} \neq n+1$ dan geldt:
$$\phi_{n+2}(e_{j_1}...e_{j_{k_j}}) \quad = \quad \phi_n(e_{j_1}...e_{j_{k_j-1}}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$
dus het beeld van een even element onder ϕ_n; de deelmatrices liggen met gelijk teken op de anti-diagonaal.

- Als k_j oneven, $j_{k_j} \neq n+2$ en $j_{k_j} = n+1$ dan geldt:
$$\phi_{n+2}(e_{j_1}...e_{j_{k_j}}) \quad = \quad \phi_n(e_{j_1}...e_{j_{k_j-1}}e_1...e_n) \begin{pmatrix} 0 & -i^{\frac{n+2}{2}} \\ i^{\frac{n+2}{2}} & 0 \end{pmatrix};$$
dus het beeld van een even element onder ϕ_n; de deelmatrices liggen met tegengesteld teken op de anti-diagonaal.

- Als k_j oneven, $j_{k_j} \neq n+2$ en $j_{k_j} \neq n+1$ dan geldt:
$$\phi_{n+2}(e_{j_1}...e_{j_{k_j}}) \quad = \quad \phi_n(e_{j_1}...e_{j_{k_j}}) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};$$
dus het beeld van een oneven element onder ϕ_n; de deelmatrices liggen met tegengesteld teken op de anti-diagonaal.

Uit het feit ieder tweetal van de bovenstaande categoriën verschilt in ten minste een van de kwalificaties even/oneven, gelijk/tegengesteld, diagonaal/anti-diagonaal, volgt dat elementen die in verschillende categoriën belanden lineair onafhankelijk zijn.

Stel nu dat $\Sigma_j c_j \phi_{n+2}(e_{j_1}...e_{j_{k_j}}) = 0$. We kunnen de termen in deze som verdelen over de acht bovenstaande categoriën. Omdat ieder van de categoriën lineair onafhankelijk is, volgt dat de som van de termen binnen een categorie op nul afgebeeld moet worden. Vanwege injectiviteit van ϕ_n kan dit enkel als voor iedere j geldt $c_j = 0$. Dus ϕ_{n+2} is injectief.

Voor oneven n: ϕ_n is de restrictie van ϕ_{n+1} tot $Cl_n(\mathbb{C}) \subset Cl_{n+1}(\mathbb{C})$, dus ϕ_n is ook injectief. We concluderen dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt dat ϕ_n injectief is. $\square$

6.2 Reducibiliteit of irreducibiliteit van de representatie

Nu bekijken we of de ϕ_n irreducibel zijn. Voor het geval dat n even is blijkt dit het geval te zijn. Voor n oneven is de representatie reducibel: we kunnen de representatieruimte schrijven als de directe som van twee lineaire deelruimten waarop ϕ_n beperkt tot zo'n deelruimte irreducibel is.

Definitie De representatieruimte behorende bij de geconstrueerde afbeeldingen ϕ_n wordt de *spinorruimte* genoemd, elementen uit de spinorruimte heten *spinoren*.

We zullen de spinorruimte in het vervolg met S aanduiden. Voor $n > 0$ is de dimensie van S even, schrijf $S = \mathbb{C}^{2m}$. Laat $S = S_1 \bigoplus S_2$ waarbij $\mathrm{proj}_{S_1}(v)$ de projectie is op de eerste m coördinaten en $\mathrm{proj}_{S_2}(v)$ de projectie is op de laatste m coördinaten van v.

Lemma Voor n even is ϕ_n irreducibel.
Bewijs Aangezien de dimensie van $Cl_n(\mathbb{C})$ en $M_{2^{\frac{n}{2}}}(\mathbb{C})$ gelijk is volgt dat ϕ_n een algebra-isomorfisme is: $Cl_n(\mathbb{C}) \cong M_{2^{\frac{n}{2}}}(\mathbb{C})$. Bovendien geldt dat $M_{2^{\frac{n}{2}}}(\mathbb{C})$ transitief werkt op S, er is dus geen niet-triviale invariante deelruimte en ϕ_n is een irreducibele representatie. $\square$

In de rest van deze paragraaf bekijken we het geval dat n oneven is.

Definitie Laat S_l, S_r de lineaire deelruimten van de spinorruimte zijn gegeven door:

$$\begin{aligned} S_l &= \left\{ v \in S \,|\, i \cdot \mathrm{proj}_{S_1}(v) = \mathrm{proj}_{S_2} \right\}; \\ S_r &= \left\{ v \in S \,|\, \mathrm{proj}_{S_1}(v) = i \cdot \mathrm{proj}_{S_2} \right\}. \end{aligned}$$

Elementen uit S_l of S_r worden *half-spinoren* genoemd.

De dimensie van van S_l en S_r is gelijk aan m. Als notatie voor een element uit S_l gebruiken we $(v, iv)^T$, als notatie voor een element uit S_r gebruiken we $(iv, v)^T$. Er geldt dat $S = S_l \bigoplus S_r$.

Lemma Voor n oneven geldt dat $Cl_n(\mathbb{C}) \cong M_{2^{\frac{n-1}{2}}}(\mathbb{C}) \bigoplus M_{2^{\frac{n-1}{2}}}(\mathbb{C})$. In het bijzonder is ϕ_n reducibel.
Bewijs Merk op dat het voor invariantie van een deelruimte $U \subset S$ voldoende is als U invariant is onder $\phi_n(e_j)$ voor iedere j met $1 \leq j \leq n$. Er geldt:

$$\phi_n(e_j)\begin{pmatrix} v \\ iv \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \phi_{n-1}(e_j)(v) \\ i(\phi_{n-1}(e_j)(v)) \end{pmatrix} \in S_l \text{ als } j \in \{1, ..., n-1\} \\ \begin{pmatrix} i^{\frac{n+1}{2}}\phi_{n-1}(e_1...e_{n-1})(v) \\ i(i^{\frac{n+1}{2}}\phi_{n-1}(e_1...e_{n-1})(v)) \end{pmatrix} \in S_l \text{ als } j = n \end{cases}$$

$$\phi_n(e_j)\begin{pmatrix} iv \\ v \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} i(-\phi_{n-1}(e_j)(v) \\ -\phi_{n-1}(e_j)(v) \end{pmatrix} \in S_r \text{ als } j \in \{1, ..., n-1\} \\ \begin{pmatrix} i(-i^{\frac{n+1}{2}}\phi_{n-1}(e_1...e_{n-1})(v)) \\ -i^{\frac{n+1}{2}}\phi_{n-1}(e_1...e_{n-1})(v) \end{pmatrix} \in S_r \text{ als } j = n \end{cases}$$

dus S_l en S_r zijn invariante lineare deelruimten van de spinorruimte. Omdat $\phi_{n-1}(Cl_{n-1}(\mathbb{C}))$ transitief werkt op S_1 volgt dat ϕ_n beperkt tot S_l of S_r een irreducibele representatie is. Gebruik van het bovenstaande lemma dat het geval n is even is behandelt levert het gewenste resultaat. $\square$

Definitie De *chiraliteits-operator* wordt gegeven door $\kappa = \phi_n(e_1 ... e_n)$.

Lemma De eigenruimten van κ worden gegeven door S_l en S_r.
Bewijs Definieer $\lambda = i^{\frac{n+1}{2}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. We berekenen:

$$\begin{aligned}
\kappa \begin{pmatrix} v \\ iv \end{pmatrix} &= \phi_n(e_1...e_n) \begin{pmatrix} v \\ iv \end{pmatrix} \\
&= i^{\frac{n+1}{2}} \phi_{n-1}(e_1...e_{n-1}e_1...e_{n-1}) \begin{pmatrix} v \\ iv \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} v \\ iv \end{pmatrix} \\
\kappa \begin{pmatrix} iv \\ v \end{pmatrix} &= \phi_n(e_1...e_n) \begin{pmatrix} iv \\ v \end{pmatrix} \\
&= (-1)^n i^{\frac{n+1}{2}} \phi_{n-1}(e_1...e_{n-1}e_1...e_{n-1}) \begin{pmatrix} iv \\ v \end{pmatrix} \\
&= -\lambda \begin{pmatrix} iv \\ v \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Definitie Elementen uit S_l worden *linkshandige* half-spinoren genoemd. Elementen uit S_r worden *rechtshandige* half-spinoren genoemd. De linkshandigheid dan wel rechtshandigheid van een spinor wordt aangeduid met het begrip *chiraliteit*.

Door gebruik te maken van de operatoren $\frac{\kappa+\lambda}{2}$ en $\frac{\kappa-\lambda}{2}$ kan men een spinor scheiden in een linkshandige en een rechtshandige half-spinor.

6.3 Een trouwe representatie van $Cl_{p,q}(\mathbb{R})$

Om uit het voorgaande een representatie van $Cl_{p,q}(\mathbb{R})$ te vinden, nemen we de representatie ϕ_{p+q} van $Cl_{p+q}(\mathbb{C})$. Vervolgens definiëren we:

$$r_j = \begin{cases} e_j & \text{als} \quad 1 \leq j \leq p \\ ie_j & \text{als} \quad p < j \leq p+q \end{cases}.$$

Het volgt dat de r_j de reële Clifford-algebra $Cl_{p,q}(\mathbb{R})$ genereren.

Definitie Laat $\chi_{p,q} : Cl_{p,q}(\mathbb{R}) \to M_m(\mathbb{C})$ het reële algebra-homomorfisme gegeven door:

$$\chi_{p,q}(r_j) = \begin{cases} \phi_{p+q}(e_j) & \text{als} \quad 1 \leq j \leq p \\ i\phi_{p+q}(e_j) & \text{als} \quad p < j \leq p+q \end{cases}.$$

Uit het feit dat ϕ_{p+q} een trouwe representatie is van $Cl_{p+q}(\mathbb{C})$ volgt direct dat $\chi_{p,q}$ een trouwe representatie is van $Cl_{p,q}(\mathbb{R})$.

Voorbeeld: γ-matrices Laat V een vierdimensionale reële vectorruimte met daarop een kwadratische vorm met signatuur $(p,q) = (3,1)$. Laat $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ een basis zijn waarvoor voor $v \in V$ uitgedrukt in deze basis geldt dat $Q(v) = I_{3,1} v I_{3,1}$. Uit de inductieve definitie bepalen we dat $\phi_4 : Cl_4(\mathbb{C}) \to M_4(\mathbb{C})$ gedefinieerd is als het algebra-homomorfisme gegeven door:

$$\begin{aligned}
\phi_4(e_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
\phi_4(e_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
\phi_4(e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
\phi_4(e_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vervolgens is $\chi_{3,1} : Cl_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_4(\mathbb{C})$ gedefinieerd als het reële algebra-homomorfisme gegeven door:

$$\begin{aligned}
\chi_{3,1}(r_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
\chi_{3,1}(r_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
\chi_{3,1}(r_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
\chi_{3,1}(r_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De $\chi_{3,1}(r_j)$ vormen een representatie van de coëfficiënten γ_j uit de Dirac vergelijking van hoofdstuk 2. De $\chi_{3,1}(r_j)$ worden daarom ook wel γ-matrices genoemd.

De reducibiliteit dan wel irreducibiliteit van $\chi_{p,q}$ is analoog aan dat van ϕ_{p+q}: we kunnen concluderen dat als $p+q$ even is dat dan geldt $Cl_{p,q}(\mathbb{R}) \cong M_{2^{\frac{p+q}{2}}}(\mathbb{R})$ en als $p+q$ oneven is dat dan geldt $Cl_{p,q}(\mathbb{R}) \cong M_{2^{\frac{p+q-1}{2}}}(\mathbb{R}) \bigoplus M_{2^{\frac{p+q-1}{2}}}(\mathbb{R})$.

6.4 Trouwe representaties van $Spin_{p,q}(\mathbb{R})$

We kunnen een trouwe representatie van $Spin_{p,q}(\mathbb{R})$ verkrijgen door restrictie van $\chi_{p,q}$ tot $Spin_{p,q}(\mathbb{R})$. In deze paragraaf geven we echter een andere constructie, via de even deelalgebra $Cl^0_{p,q}(\mathbb{R})$. Hiertoe geven we voor iedere reële even deelalgebra een algebra-isomorfisme met een reële Clifford-algebra.

Zij $q \geq 1$, laat $e_1, .., e_{p+q}$ een basis zijn voor $V = \mathbb{R}^{p+q}$ uitgerust met een kwadratische vorm met signatuur (p,q) zodat $B(e_j, e_k) = (I_{p,q})_{j,k}$. Zij $Cl_{p,q}(\mathbb{R})$ de overeenkomstige Clifford-algebra. Laat daarnaast $Cl_{p,q-1}(\mathbb{R})$ de Clifford-algebra zijn voortgebracht door $e_1, ..., e_{p+q-1}$. Zij $n = p+q$.

Definitie Laat $f : Cl_{p,q-1}(\mathbb{R}) \to Cl^0_{p,q}(\mathbb{R})$ het algebra-homomorfisme zijn gegeven door $e_j \mapsto e_j e_n$.

Merk op dat omdat

$$\begin{aligned} f(e_j e_k + e_k e_j) &= e_j e_n e_k e_n + e_k e_n e_j e_n \\ &= e_j e_k + e_k e_j \end{aligned}$$

en omdat het beeld inderdaad altijd even is, de afbeelding welgedefinieerd is.

Lemma Er geldt dat $Cl_{p,q-1}(\mathbb{R}) \cong Cl^0_{p,q}(\mathbb{R})$ als algebra's.
Bewijs Laat $e_{j_1}...e_{j_{k_j}}$ een element zijn van $Cl^0_{p,q}(\mathbb{R})$. Als $e_{j_{k_j}} = e_n$, dan geldt $\pm f(e_{j_1}...e_{j_{k_j-1}}) = e_{j_1}...e_{j_{k_j}}$. Als $e_{j_{k_j}} \neq e_n$, dan geldt $\pm f(e_{j_1}...e_{j_{k_j}}) = e_{j_1}...e_{j_{k_j}}$. Dus f is surjectief.

Omdat de dimensie van het domein en het bereik gelijk is volgt dat dat f bijectief is. Dus f is een algebra-isomorfisme. □

Laat $p \geq 1$ zijn, laat $e_1, .., e_{p+q}$ een basis zijn voor V uitgerust met een kwadratische vorm met signatuur (p,q) zodat $B(e_j, e_k) = (I_{p,q})_{j,k}$. Zij $Cl_{p,q}(\mathbb{R})$ de overeenkomstige Clifford-algebra. Zij $n = p+q$. Laat evenzo $ie_1, ..., ie_{n-1}$ de Clifford-algebra $Cl_{q,p-1}(\mathbb{R})$ voortbrengen.

Definitie Laat $g : Cl_{q,p-1}(\mathbb{R}) \to Cl^0_{p,q}(\mathbb{R})$ het algebra-homomorfisme zijn gegeven door $ie_j \mapsto e_{n-j+1}e_1$.

Merk op dat omdat

$$\begin{aligned}
g(ie_jie_k + ie_kie_j) &= e_{n+1-j}e_1e_{n+1-k}e_1 + e_{n+1-k}e_1e_{n+1-j}e_1 \\
&= -e_{n+1-j}e_{n+1-k} - e_{n+1-k}e_{n+1-j} \\
&= -2(I_{p,q})_{n+1-j,n+1-k} \\
&= 2(I_{q,p-1})_{j,k}
\end{aligned}$$

en omdat het beeld inderdaad altijd even is, de afbeelding welgedefinieerd is.

Lemma Er geldt dat $Cl_{q,p-1}(\mathbb{R}) \cong Cl^0_{p,q}(\mathbb{R})$ als algebra's.
Bewijs Laat $e_{j_1}...e_{j_{k_j}}$ een element zijn van $Cl^0_{p,q}(\mathbb{R})$. Als $e_{j_1} = e_1$, dan geldt $\pm f(e_{j_2}...e_{j_{k_j}}) = e_{j_1}...e_{j_{k_j}}$. Als $e_{j_1} \neq e_1$, dan geldt $\pm f(e_{j_1}...e_{j_{k_j}}) = e_{j_1}...e_{j_{k_j}}$. Dus g is surjectief.

Omdat de dimensie van het domein en het bereik gelijk is volgt dat dat g bijectief is. Dus g is een algebra-isomorfisme. $\square$

De afbeelding f laat zien dat voor $q \geq 1$ representaties van $Cl^0_{p,q}(\mathbb{R})$ gegeven worden door representaties van $Cl_{p,q-1}(\mathbb{R})$, op deze manier kunnen we dus ook representaties genereren van $Spin_{p,q}(\mathbb{R}) \subset Cl^0_{p,q}(\mathbb{R})$. De afbeelding g doet hetzelfde voor $p \geq 1$, in dit geval is $Cl^0_{p,q}(\mathbb{R})$ isomorf met $Cl_{q,p-1}$.

Definitie Definieer voor $q \geq 1$: $\zeta_{p,q} = \chi_{p,q-1} \circ f^{-1} : Cl^0_{p,q}(\mathbb{R}) \to M^{\mathbb{R}}_m(\mathbb{C})$, waarbij m gelijk is aan $2^{\frac{p+q-1}{2}}$ als $p+q$ oneven en gelijk is aan $2^{\frac{p+q}{2}}$ als $p+q$ even. Definieer voor $p \geq 1$ evenzo: $\eta_{p,q} = \chi_{q,p-1} \circ g^{-1} : Cl^0_{p,q}(\mathbb{R}) \to M^{\mathbb{R}}_m(\mathbb{C})$. Deze representaties heten *reële spinrepresentaties*.

Door restrictie van bovenstaande afbeeldingen tot $Spin_{p,q}(\mathbb{R})$ verkrijgen we representaties van de reële spingroepen. Voor $p+q$ oneven is de representatie irreducibel, voor $p+q$ even is de representatie reducibel.

Definitie Beschouw de Minkowski-ruimte, dus met signatuur $(p,q) = (3,1)$. Beschouw de representatie $\zeta_{p,q}$. In dit geval worden de spinoren *Dirac spinoren* genoemd. Half-spinoren heten in dit geval *Weyl half-spinoren*, die dus links- of rechtshandig zijn.

Door gebruik te maken van de chiraliteitsoperator kunnen we net als voorheen de Dirac spinor schrijven als een lineaire combinatie van Weyl half-spinoren.

7 Appendix

7.1 Liegroepen

Zij $K = \mathbb{R}$ of $K = \mathbb{C}$, zij $n \in \mathbb{N}$, zij $V = K^n$, zij $Q : V \to K$ een kwadratische vorm, zij $GL(V)$ de groep van inverteerbare lineaire afbeeldingen op V.

Definitie Een *Liegroep* is een differentieerbare variëteit G uitgerust met een groepsoperatie $\phi : G \times G \to G$ zo dat de groepsoperatie en de inverseafbeelding $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ differentieerbaar zijn.

We noteren met e de identiteit in G.

Definitie Een (gesloten) *Lie-ondergroep* van een Liegroep G is een niet-lege gesloten deelvariëteit van G die als verzameling gesloten is onder de groepsoperatie en de inverseafbeelding.

Iedere Lie-ondergroep is een Liegroep.

Definitie Zij M, N Liegroepen. Een *Liegroepshomomorfisme* van M naar N is een differentieerbaar groepshomomorfisme $\phi : M \to N$. Als ϕ een inverse heeft die ook differentieerbaar is, dan heet ϕ een *Liegroepsisomorfisme*.

Zij $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, zij $n \in \mathbb{N}$. Zij $M_n(K)$ de vectorruimte van $n \times n$-matrices met coëfficienten in K uitgerust met de matrixvermenigvuldiging. Als vectorruimte is $M_n(K)$ isomorf met de vectorruimte K^{n^2}, dus $M_n(K)$ is een variëteit. Omdat de vermenigvuldiging en het optellen van scalairen als functies van K naar K differentieerbaar zijn, volgt dat matrixvermenigvuldiging ook differentieerbaar is. We geven nu enkele voorbeelden van Liegroepen die bevat zijn in $M_n(K)$, deze Liegroepen worden matrix Liegroepen genoemd.[4]

De Liegroepen $GL_n(K)$ en $SL_n(K)$
Bekijk de deelverzameling $GL_n(K) \subset M_n(K)$ van inverteerbare matrices, zij vormen een groep onder matrixvermenigvuldiging. Bekijk de determinantafbeelding:

$$\begin{aligned} f: \quad GL_n(K) &\to K \\ A &\mapsto det(A). \end{aligned}$$

De determinant van een matrix is een polynoom en dus een continue afbeelding. Er geldt dat $f^{-1}(0)$ gelijk is aan de verzameling van niet-inverteerbare matrices in $M_n(K)$. Het complement, $M_n(K) \setminus f^{-1}(0)$, de inverteerbare matrices, is een open deelverzameling van $M_n(K)$ en dus een deelvarieteit. Iedere rationele functie van de coëfficiënten van matrices is differentieerbaar, dus ook polynomen, dus matrixvermenigvuldiging is differentieerbaar. De elementen van de inverse van een matrix worden gegeven door de cofactoren van de matrix gedeeld door de

[4] Een volledige behandeling is te vinden in [5], paragraaf 3.37: bladzijde 107 en 108.

determinant van de matrix; iedere cofactor is de determinant van een deelmatrix, dus de inverseafbeelding is ook differentieerbaar. Dus $GL_n(K)$ is een Liegroep.

Over $\mathbb{R}$ heeft deze Liegroep twee samenhangscomponenten: de matrices met positieve determinant (waaronder de eenheidsmatrix) en de matrices met negatieve determinant.

Er geldt dat $SL_n(K) = (f)^{-1}(1)$ (de inverteerbare matrices met determinant gelijk aan 1) een deelvariëteit is van $GL_n(K)$ en bovendien een gesloten ondergroep, dus een Lie-ondergroep, dus een Liegroep is.

Laat de signatuurmatrix $I_{p,q}$ gegeven zijn door:

$$(I_{p,q})_{jj} = \begin{cases} 1 & \text{als } j \leq p \\ -1 & \text{als } j > p \end{cases} .$$

De Liegroepen $O_{p,q}(\mathbb{R})$ en $SO_{p,q}(\mathbb{R})$
Zij $K = \mathbb{R}$, laat $Q : V \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $Q(v) = v^T I_{p,q} v$.

Definitie De orthogonale afbeeldingen, respectievelijk orthogonale afbeeldingen met determinant 1, worden gegeven door:

$$\begin{aligned} O_{p,q}(\mathbb{R}) &= \{A : V \to V \text{ lineair isomorfisme} \,|\, Q(Av) = Q(v)\}; \\ SO_{p,q}(\mathbb{R}) &= \{A \in O_{p,q}(\mathbb{R}) | \det(A) = 1\}. \end{aligned}$$

Deze groepen zijn isomorf met een matrixrepresentatie ervan. Men kan laten zien dat deze matrixrepresentatie weer een Lie-ondergroep is van $GL_n(\mathbb{R})$.

7.2 Representaties

Zij $K = \mathbb{R}$ of $K = \mathbb{C}$, zij $n \in \mathbb{N}$, zij $W = K^n$, zij $GL(W)$ de groep van inverteerbare lineaire afbeeldingen van W naar zichzelf, zij G een groep.

Definitie Een groepshomomorfisme $\rho : G \to GL(W)$ heet een *groepsrepresentatie* van G op W. De vectorruimte W heet de *representatieruimte.*

Een groepsrepresentatie zullen we in het vervolg noteren met (G, ρ, W).

Definitie Zij (G, ρ, W) een representatie. Als ρ een injectieve afbeelding is, dan heet de representatie *trouw.*

Zij (G, ρ, W) een representatie. Een deelruimte $U \subset W$ is *invariant* onder de groepswerking als voor alle g in G en voor alle u in U geldt dat $\rho(g)(u) \in U$. Merk op dat er dus geldt dat $\rho(g)|_U \in GL(U)$. Dit leidt ons tot de volgende definitie.

Definitie Zij (G, ρ, W) een representatie, zij $U \subset W$ een invariante deelruimte. Laat $\sigma : G \to GL(U)$ gegeven door $\sigma(g) = \rho(g)|_U$. Dan heet de representatie gegeven door (G, σ, U) een *deelrepresentatie* van (G, ρ, W).

Definitie Zij (G, ρ, W) een representatie en laat $W \neq \{0\}$. Als het aantal deelrepresentaties van (G, ρ, W) gelijk is aan 2, dan heet de representatie *irreducibel.* In het andere geval heet de representatie *reducibel.*

Merk op dat iedere representatie (G, ρ, W) waarbij $W \neq \{0\}$ op zijn minst twee deelrepresentaties heeft: de invariante deelruimten $W \subset W$ en $\{0\} \subset W$ induceren beide een deelrepresentatie. Het reducibel zijn van een representatie komt overeen met het bestaan van een niet-triviale invariante deelruimte.

Definitie Zij A een algebra en $End(W)$ de groep van lineaire afbeeldingen van W naar zichzelf. Een algebra-homomorfisme $\mu : A \to End(W)$ heet een *algebra-representatie* van A op W.

Voor representaties van algebra's bestaan vergelijkbare karakterisaties zoals hierboven gedefinieerd voor groepsrepresentaties.

Referenties

[1] *Linear Algebra*, Peter D. Lax, John Wiley & Sons, 1997
[2] *Spin Geometry*, Lawson en Michelsohn, Princeton University Press, 1989
[3] *Geometric Algebra*, E. Artin, Interscience Publishers, 1957
[4] *Representation Theory*, William Fulton en Joe Harris, Springer-Verlag, 1991
[5] *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Frank W. Warner, Scott, Foresman and Company, 1971