T.J. Sijpesteijn

Riemann-Roch voor grafen

Bachelorscriptie

Scriptiebegeleider: dr. T.C. Streng

Datum bachelorexamen: juni 2016

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding

De *stelling van Riemann-Roch* is een belangrijke stelling in de complexe analyse en de algebraïsche meetkunde. Er blijkt voor deze stelling echter een analogon te bestaan in de grafentheorie. Het doel van deze scriptie is om dit analogon, de *stelling van Riemann-Roch voor grafen*, te bewijzen.

1.1 Conventies en terminologie

Overal in deze scriptie zullen de volgende conventies gehandhaafd worden.

- Elke graaf G is niet-leeg, eindig, samenhangend, ongewogen, ongericht en bevat geen lussen of dubbele kanten.
- We noteren de verzameling knopen en de verzameling kanten van een graaf G met $V(G)$ respectievelijk $E(G)$. Voor twee knopen $v, w \in V(G)$ noteren we een kant tussen v en w met $\{v, w\} \in E(G)$.

1.2 Dollar Game

De *stelling van Riemann-Roch voor grafen* heeft een zeer concrete toepassing in de vorm van de zogenaamde *Dollar Game*, een variatie op de *Chip-Firing Game*. In alle hoofstukken van deze scriptie zullen we veelvuldig verwijzen naar dit spel, omdat het een duidelijke intuïtie voor veel begrippen en resultaten geeft. Voordat we beginnen met formele definities en resultaten om *Riemann-Roch voor grafen* te bewijzen, volgt hieronder dan ook een korte uitleg van de *Dollar Game*.

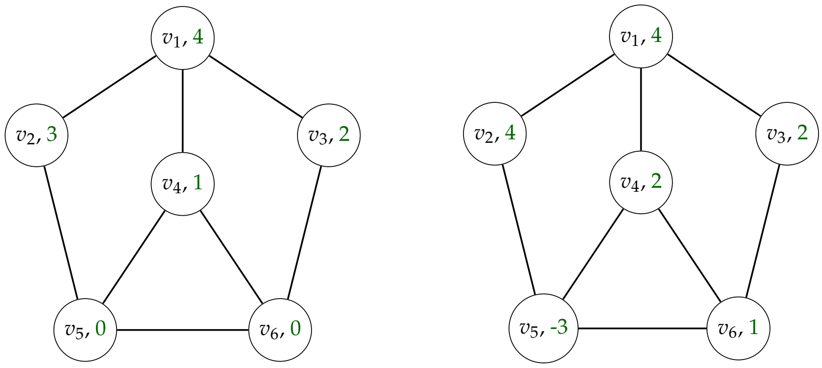
We beschouwen een graaf G, waarin elke knoop begint met een willekeurig bedrag van gehele dollars (dat in de knoop genoteerd wordt). Merk overigens op dat dit bedrag negatief kan zijn: dat is de reden dat we met geld rekenen in plaats van met traditionelere fiches, zoals in de *Chip-Firing Game*. Het doel van het spel is het geld zó over de knopen te herverdelen, dat geen enkele knoop meer in het rood staat (dat wil zeggen: een negatief bedrag heeft). Er zijn per knoop echter maar twee mogelijke zetten:

- 'Schieten': De knoop geeft elk van de buurknopen 1 dollar.
- 'Innen': De knoop krijgt van elk van de buurknopen 1 dollar.

Zie figuur 1 voor een voorbeeld: v_5 schiet hier.

Merk op dat schieten en innen elkaars inverse zijn: als een knoop v twee keer schiet en vervolgens twee keer int, is de verdeling van geld niet veranderd ten opzichte van de beginverdeling. Net zo is drie keer schieten en één keer innen hetzelfde als twee keer schieten.

Het is een voor de hand liggende vraag om te kijken wanneer een spel te winnen is, dat wil zeggen: wanneer er een serie geldige zetten bestaat, zodanig dat elke knoop met een bedrag groter dan of gelijk aan nul eindigt. Een serie geldige zetten zullen we vanaf nu een *strategie* noemen. Zoals we later zullen zien, volgt er uit de *stelling van Riemann-Roch voor grafen* de volgende bewering:



Figuur 1: De *Dollar Game*: knoop 5 schiet

Gevolg 1.1. *Beschouw de Dollar Game gespeeld op een zekere graaf G, waarin elke knoop v een bepaald bedrag $\lambda_v \in \mathbb{Z}$ heeft. Definieer nu $g := |E(G)| - |V(G)| + 1$ en $N := \sum_{v \in V(G)} \lambda_v$ (de totale hoeveelheid geld in het spel). Als $N \geq g$, dan bestaat er een winnende strategie voor het spel.*

In de komende hoofdstukken zullen we de *stelling van Riemann-Roch voor grafen* bewijzen, om uiteindelijk bovenstaand resultaat te concluderen.

2 Definities en notatie

Definitie 2.1. Zij G een graaf. We definiëren de divisorgroep $\mathrm{Div}(G)$ als de vrije abelse groep op de verzameling knopen van G, dus

$$\mathrm{Div}(G) := \left\{ \sum_{v \in V(G)} \lambda_v \, v \colon \lambda_v \in \mathbb{Z} \right\}.$$

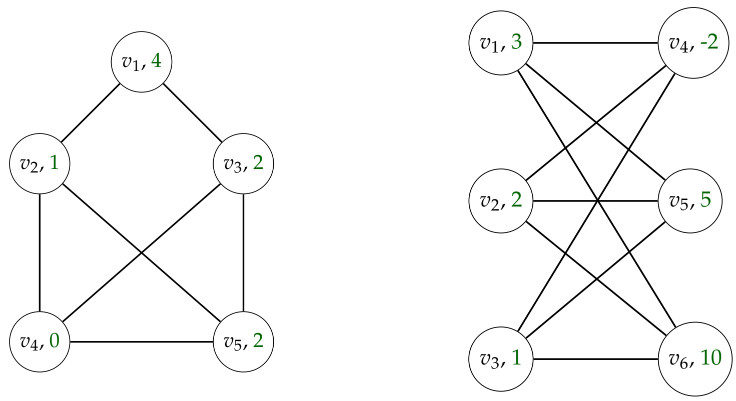
We voeren voor elke $D \in \mathrm{Div}(G)$ bovendien de volgende notatie in:

$$D(v) = \lambda_v.$$

Voor elke graaf G definiëren we een ordening op $\mathrm{Div}(G)$. Laat $D, D' \in \mathrm{Div}(G)$. Er geldt $D \geq D'$ dan en slechts dan als voor alle $v \in V(G)$ geldt dat $D(v) \geq D'(v)$. We noemen een divisor D *effectief* als $D \geq 0$.

Voorbeeld 2.2. Zie figuur 2 voor voorbeelden, waarbij we in elke knoop v_i tevens de coëfficiënt λ_i in groen hebben genoteerd. Voor de linkergraaf geldt dat $D = 4v_1 + v_2 + 2v_3 + 2v_5$. Deze divisor is effectief. Merk op dat de divisor op de rechtergraaf niet effectief is, aangezien $D(v_4) = -2 < 0$.

In het geval van de *Dollar Game* kunnen we de coëfficiënt van een knoop interpreteren als het bedrag dat de betreffende knoop bezit. Een divisor beschrijft dus de status van het spel op een gegeven moment, we noemen dat een *verdeling*. Merk tevens op dat een effectieve divisor een verdeling van een gewonnen spel beschrijft.



Figuur 2: Twee grafen met elk een divisor

Definitie 2.3. Voor elke divisor D op een graaf G definieren we de *graad* van D door $\deg(D) := \sum_{v \in V(G)} D(v)$. Bovendien stellen we

$$\deg^+(D) := \sum_{\substack{v \in V(G) \\ D(v) > 0}} D(v)$$

$$\deg^-(D) := \sum_{\substack{v \in V(G) \\ D(v) < 0}} D(v).$$

In de context van de *Dollar Game* is de graad van een divisor logischerwijze de totale hoeveelheid geld die in het betreffende spel aanwezig is. Het is binnen dit spel zinvol om na te denken over verdelingen die door een opeenvolging van geldige zetten in elkaar overgevoerd kunnen worden. Deze verdelingen gaan we equivalent noemen. Voordat we deze equivalentie aan de hand van de *Laplace-afbeelding* formeel kunnen definiëren, introduceren we echter de volgende groep:

$$\mathcal{M}(G) := \mathrm{Map}(V(G), \mathbb{Z}),$$

de groep van afbeeldingen van de verzameling knopen van G naar de groep van gehele getallen.

Definitie 2.4. We definiëren de *Laplace-afbeelding* Δ als volgt:

$$\begin{aligned} \Delta : \ \ \mathcal{M}(G) &\longrightarrow \mathrm{Div}(G) \\ f &\longmapsto \sum_{v \in V(G)} \left(\sum_{\substack{w \in V(G) \\ \{v,w\} \in E(G)}} (f(v) - f(w)) \right) v. \end{aligned}$$

We definiëren nu de deelverzameling $\mathrm{Prin}(G) := \Delta\left[\mathcal{M}(G)\right] \subseteq \mathrm{Div}(G)$ van *hoofddivisoren*. Merk op dat dit een ondergroep is, aangezien de *Laplace-afbeelding* duidelijk een homomorfisme van groepen is.

Lemma 2.5. *Voor alle* $D \in \mathrm{Prin}(G)$ *geldt* $\deg(D) = 0$.

Bewijs. Laat $D \in \mathrm{Prin}(G)$. Dan bestaat er een $f \in \mathcal{M}(G)$ zodanig dat

$$\deg(D) = \sum_{v \in V(G)} \left(\sum_{\substack{w \in V(G) \\ \{v,w\} \in E(G)}} (f(v) - f(w)) \right).$$

Zij $v \in V(G)$. Merk op dat er voor elke $w \in V(G)$ waarvoor er een kant $\{v, w\}$ bestaat een term $f(v) - f(w)$ in de sommatie komt. Omdat deze kant $\{v, w\}$ bestaat, volgt er nu echter dat er ook een term $f(w) - f(v)$ in de sommatie voorkomt. Elke term in de sommatie valt dus weg en we concluderen $\deg(D) = 0$. $\square$

We gebruiken de groep $\mathrm{Prin}(G)$ om de volgende relatie te definiëren.

Definitie 2.6. Laat $D, D' \in \mathrm{Div}(G)$ voor een zekere graaf G. We definiëren de relatie $\sim$ door

$$D \sim D' \iff D - D' \in \mathrm{Prin}(G)$$

Merk op dat deze relatie duidelijk een equivalentierelatie is, aangezien we simpelweg uitdelen naar een ondergroep.

We hebben nu een equivalentierelatie op de divisorgroep gedefinieerd. Het rest ons nog om aan te tonen dat deze formele definitie inderdaad aansluit bij de motivatie die we eerder noemden: het idee dat twee verdelingen in de *Dollar Game* equivalent zijn als ze middels een geldige spelstrategie in elkaar over te voeren zijn. We illustreren dit aan de hand van het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 2.7. Zij $f \in \mathcal{M}(G)$. Voor alle $v \in V(G)$ interpreteren we $f(v)$ als het aantal keren dat knoop v int minus het aantal keren dat hij schiet. Het schieten van v_5 in figuur 1 karakteriseren we op deze wijze als de afbeelding f die v_i met $i \neq 5$ afbeeldt op 0 en v_5 afbeeldt op -1.

Op deze manier kunnen we elke strategie karakteriseren door een afbeelding $f \in \mathcal{M}(G)$. Merk op dat de *Laplace-afbeelding* toegepast op f dan een divisor $D = \Delta(f) \in \mathrm{Div}(G)$ geeft, waarbij de coëfficiënt van elke knoop aangeeft hoeveel winst of verlies de betreffende knoop maakt als gevolg van de strategie f. Met andere woorden, als we van een verdeling $D \in \mathrm{Div}(G)$ door een strategie $f \in \mathcal{M}(G)$ naar een verdeling $D' \in \mathrm{Div}(G)$ komen, dan geldt er $D + \Delta(f) = D'$. We concluderen $D \sim D'$ dan en slechts dan als D door een geldige strategie naar D' omgezet kan worden.

Merk tevens op dat we voor alle $D, D' \in \mathrm{Div}(G)$ met $D \sim D'$ vinden dat $\deg(D) = \deg(D')$. Dit volgt direct uit de *homomorfiestelling*, aangezien de afbeelding $\deg : \mathrm{Div}(G) \to \mathbb{Z}$ een homomorfisme is, $\mathrm{Prin}(G) \triangleleft \mathrm{Div}(G)$ en $\mathrm{Prin}(G) \subseteq \ker \deg$. In de context van de *Dollar Game* is dit resultaat overigens zeer logisch: de totale hoeveelheid geld kan immers niet verschillen tussen twee equivalente verdelingen.

Definitie 2.8. Voor elke D definiëren we nu $[D]$, het *lineaire systeem horende bij* D, door

$$[D] := \{D' \in \mathrm{Div}(G) \colon D' \sim D,\ \ D' \geq 0\}$$

In overeenkomst met de interpretatie in de *Dollar Game*, noemen we een divisor $D \in \mathrm{Div}(G)$ *winbaar* als $[D] \neq \emptyset$ en *niet-winbaar* als $[D] = \emptyset$.

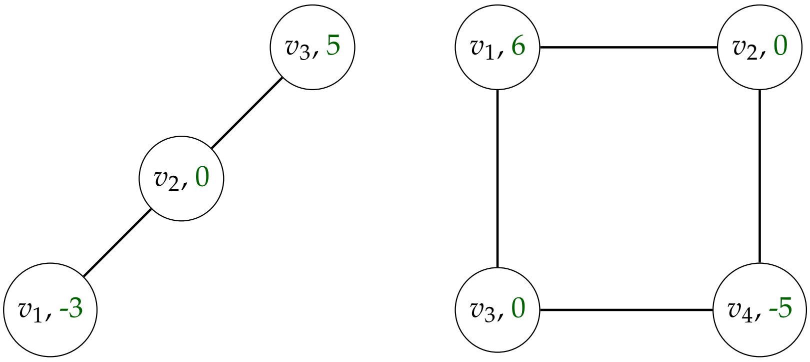
Aan de hand van het lineaire systeem kunnen we nu de dimensie van een divisor definiëren.

Definitie 2.9. De *dimensie* $r(D)$ van een divisor $D \in \mathrm{Div}(G)$ wordt gegeven door

$$r(D) = \begin{cases} -1 & \text{als } [D] \quad \text{niet winbaar} \\ \max T_D & \text{als } [D] \quad \text{winbaar} \end{cases},$$

waarin $T_D := \{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : [D - E]$ winbaar voor alle effectieve $E \in \mathrm{Div}(G)$ met $\deg(E) = t\}$.

Voorbeeld 2.10. Deze laatste definitie laat zich erg verduidelijken door een verwijzing naar de *Dollar Game*, of eigenlijk een kleine variatie daarop. Stel dat men het spel nu met twee spelers speelt. Men begint met een willekeurige beginverdeling D. Vervolgens mag speler 1 het spel moeilijker maken door een bedrag van t gehele dollars uit het spel te verwijderen: uit elke knoop mag deze eerste speler een bedrag naar keuze wegnemen, zodanig dat er totaal t dollar weggenomen wordt. Hierna moet de tweede speler proberen deze nieuw verkregen verdeling volgens de regels van de *Dollar Game* uit te spelen. Het is te verwachten dat dit speler 2 soms niet lukt, namelijk wanneer het spel sowieso al niet te winnen was, of wanneer speler 1 zo veel geld verwijdert dat het spel onwinbaar wordt. In het eerste geval kennen we aan $r(D)$ een waarde van -1 toe. In het tweede geval is de *dimensie* in deze context gelijk aan de maximale hoeveelheid geld die speler 1 mag verwijderen, zodat het spel winbaar blijft, dat wil zeggen, het hoogste bedrag dat op elke manier uit het spel weggenomen kan worden zonder dat de nieuw verkregen verdeling onwinbaar is. De dimensie van een spel geeft dus in feite een maat voor de moeilijkheidsgraad. Bekijk bijvoorbeeld de twee *Dollar Games* in figuur 3:



(a) Een spel met dimensie 2 (b) Een spel met dimensie 0

Figuur 3

Voor het spel in 3a geldt dat de dimensie gelijk is aan 2. Hoe de 2 dollar ook wordt weggehaald (dus 2 dollar uit één knoop, of 1 dollar uit twee knopen), het blijft altijd een winnende strategie om eerst met v_1' te innen tot 0 bereikt wordt om vervolgens met v_3 te schieten tot v_2 ook op 0 staat. Voor elke manier waarop men 3 dollar uit de verdeling wegneemt wordt het spel echter onwinbaar, aangezien de totale hoeveelheid geld in het spel dan negatief is.

Voor het rechterspel geldt er dat $r(D) = 0$. Dat de verdeling zonder aanpassingen te winnen is, is snel duidelijk. Neem nu echter een dollar weg uit v_1. Zoals we in hoofdstuk 4 zullen bewijzen, is de verdeling is nu niet winbaar en met de definitie van dimensie concluderen we dat $r(D) = 0$. Hoewel we deze onwinbaarheid pas in hoofdstuk 4 zullen bewijzen, zal een kleine exercitie al snel overtuigend zijn.

Lemma 2.11. *Laat $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(G)$ met $r(D_1), r(D_2) \geq 0$. Dan geldt er*

$$r(D_1 + D_2) \geq r(D_1) + r(D_2)$$

Bewijs. Zij E een effectieve divisor van graad $r(D_1) + r(D_2)$. Verdeel E nu in twee effectieve divisoren E_1, E_2 van respectievelijk graad $r(D_1)$ en $r(D_2)$. Dan zijn de divisoren $D_1 - E_1$ en $D_2 - E_2$ winbaar, dus $D_1 - E_1 \sim F_1$ en $D_2 - E_2 \sim F_2$ voor zekere effectieve $F_1, F_2 \in \mathrm{Div}(G)$. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}(D_1 + D_2) - E &= (D_1 + D_2) - (E_1 + E_2) \\ &= (D_1 - E_1) + (D_2 - E_2) \\ &\sim F_1 + F_2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Dus $(D_1 + D_2) - E$ is equivalent aan een effectieve divisor en we concluderen $r(D_1 + D_2) \geq \deg(E) = r(D_1) + r(D_2)$. $\square$

3 De stelling

3.1 Formulering

Voordat we nu de stelling kunnen formuleren, hebben we nog twee kleine definities nodig.

Definitie 3.1. Zij G een graaf. Dan definiëren we het *geslacht* g van G door $g := |E(G)| - |V(G)| + 1$.

Definitie 3.2. Op een graaf G definiëren we de *kanonieke divisor* $K \in \mathrm{Div}(G)$ door

$$K := \sum_{v \in V(G)} (\deg(v) - 2) \cdot v,$$

waarin deg als functie op de verzameling knopen zoals gebruikelijk gedefinieerd is, namelijk als het aantal takken dat de betreffende knoop raakt.

Merk op dat K van graad $2g - 2$ is, aangezien $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E(G)|$ en $\sum_{v \in V(G)} -2 = -2|V(G)|$.

Stelling 3.3. *(Riemann-Roch voor grafen) Zij G een graaf. Dan geldt er voor alle $D \in \mathrm{Div}(G)$*

$$r(D) - r(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Voordat we deze stelling bewijzen, zullen we de belofte uit hoofdstuk 1 nakomen en gevolg 1.1 bewijzen, dat we hier voor het overzicht even zullen herhalen.

Gevolg 3.4. *Beschouw de Dollar Game gespeeld op een graaf G, waarin elke knoop $v \in V(G)$ een bepaald bedrag $\lambda_v \in \mathbb{Z}$ heeft. Definieer nu $g := |E(G)| - |V(G)| + 1$ en $N := \sum_{v \in V(G)} \lambda_v$ (de totale hoeveelheid geld in het spel). Als $N \geq g$, dan bestaat er een winnende strategie voor het spel.*

Bewijs. Interpreteer de verdeling als een divisor $D \in \mathrm{Div}(G)$. We kunnen nu stelling 3.3 omschrijven tot

$$r(D) = \deg(D) - g + 1 + r(K - D)$$

Merk nu op dat per definitie geldt dat $r(K - D) \geq -1$. Bovendien geldt er $\deg(D) = N$ en we kunnen schrijven

$$\begin{aligned} r(D) &= N - g + 1 + r(K - D) \\ &\geq N - g \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

waarbij de laatste ongelijkheid geldt vanwege de aanname dat $N \geq g$. We vinden dus $r(D) \geq 0$ en concluderen dat D winbaar is. $\square$

3.2 Plan van aanpak

In het volgende hoofdstuk zullen stelling 3.3 bewijzen. Het bewijs bestaat in feite uit twee deelstellingen, die beide te maken hebben met dezelfde twee voorwaarden, die we (RR1) en (RR2) zullen noemen. Voor het formuleren van voorwaarde (RR1) hebben we echter nog een definitie nodig, namelijk die van de verzameling $\mathcal{N}$.

Definitie 3.5. We definiëren de verzameling $\mathcal{N}$ door

$$\mathcal{N} := \{D \in \mathrm{Div}(G) : \deg(D) = g - 1 \text{ en } D \text{ niet winbaar}\}$$

Ook deze verzameling $\mathcal{N}$ heeft een mooie interpretatie in de *Dollar Game*. Zoals we met gevolg 3.4 bewezen hebben, is een verdeling D namelijk winbaar als $\deg(D) \geq g$. Op deze manier kunnen we $\mathcal{N}$ (mits $\mathcal{N} \neq \emptyset$) interpreteren als de verzameling onwinbare verdelingen van maximale graad.

Nu kunnen we (RR1) en (RR2) formuleren.

(RR1): Voor alle $D \in \mathrm{Div}(G)$ bestaat er een $N \in \mathcal{N}$ zodanig dat
D winbaar $\Longleftrightarrow$ $N - D$ niet-winbaar

(RR2): Voor alle $D \in \mathrm{Div}(G)$ van graad $g - 1$ geldt er dat
D winbaar $\Longleftrightarrow$ $K - D$ winbaar.

Merk op dat (RR2) een speciaal geval van *Riemann-Roch voor grafen* is: als de graad van een divisor $g - 1$ is, valt de rechterzijde van stelling 3.3 immers weg en blijft er de uitspraak van (RR2) over.

We zullen in het volgende hoofdstuk met de eerste deelstelling bewijzen dat deze twee voorwaarden 3.3 impliceren. Vervolgens zullen we met de tweede deelstelling aantonen dat aan deze voorwaarden altijd voldaan wordt.

4 Bewijs

4.1 Deelstelling I

Stelling 4.1. (Deelstelling I) *Zij G een graaf en neem de volgende voorwaarden aan:*

(RR1): *Voor alle $D \in \mathrm{Div}(G)$ bestaat er een $N \in \mathcal{N}$ zodanig dat*
D winbaar $\Longleftrightarrow N - D$ niet-winbaar

(RR2): *Voor alle $D \in \mathrm{Div}(G)$ van graad $g - 1$ geldt er dat*
D winbaar $\Longleftrightarrow K - D$ winbaar.

Dan geldt voor alle $D \in \mathrm{Div}(G)$ de Riemann-Roch-formule

$$r(D) - r(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Voordat we aantonen dat deze stelling geldt, formuleren en bewijzen we eerst nog een tweetal lemma's dat we in het uiteindelijke bewijs zullen gebruiken. In het eerste lemma gebruiken we (RR1), in het tweede (RR2).

Lemma 4.2. *Neem* (RR1) *aan. Dan geldt er:*

$$r(D) = \left(\min_{\substack{D' \sim D \\ N \in \mathcal{N}}} \deg^{+}(D' - N) \right) - 1$$

Bewijs. Om praktische redenen voeren we de volgende notatie in: $r'(D) := \big(\min \deg^{+}(D' - N)\big) - 1$. We bewijzen achtereenvolgens $r(D) \geq r'(D)$ en $r(D) \leq r'(D)$.

(i) Wegens de definitie van dimensie bestaat er een effectieve divisor E van graad $r(D) + 1$ zodanig dat $D - E$ niet winbaar is. Met (RR1) volgt er nu dat er een $N \in \mathcal{N}$ bestaat zodanig dat $N - (D - E)$ winbaar is. Dus er bestaat een effectieve divisor E' zodanig dat $N - D + E \sim E'$. Er bestaat dan per definitie een $F \sim D$ zodanig dat

$$N - F + E = E'.$$

Hieruit volgt

$$F - N = E - E'.$$

We passen nu links en rechts de functie $\deg^{+}$ toe en omdat $E, E' \geq 0$ schrijven we:

$$\begin{aligned} \deg^{+}(F - N) - 1 &= \deg^{+}(E - E') - 1 \\ &\leq \deg^{+}(E) - 1 \\ &= r(D). \end{aligned}$$

Dus er bestaan $F \sim D$ en $N \in \mathcal{N}$ zodanig dat $\deg^{+}(F - N) - 1 \leq r(D)$. Aangezien $r'(D)$ per definitie kleiner dan of gelijk aan $\deg^{+}(F - N) - 1$ is, volgt hieruit $r'(D) \leq r(D)$.

(ii) Kies nu $D' \sim D$ en $N \in \mathcal{N}$ zodat $\deg^+(D' - N)$ minimaal is. Dan volgt er met de definitie van r' dat $\deg^+(D' - N) = r'(D) + 1$. We schrijven de divisor $D' - N$ als $\sum_{v \in v(G)} \lambda_v v$ en definiëren aan de hand daarvan de volgende twee divisoren:

$$E_1 := \sum_{\substack{v \in V(G) \\ \lambda_v \geq 0}} \lambda_v$$
$$E_2 := \sum_{\substack{v \in V(G) \\ \lambda_v \leq 0}} -\lambda_v.$$

Merk op dat E_1 en E_2 effectief zijn en dat $\deg(E_1) = \deg^+(D' - N) = r'(D) + 1$. Bovendien geldt er dat $D' - N = E_1 - E_2$ en dus $D' - E_1 = N - E_2$. Omdat per definitie geldt $D' \sim D$, kunnen we nu schrijven $D - E_1 \sim N - E_2$. Merk op dat N niet winbaar is, en omdat E_2 effectief is volgt er dat $D - E_1 = N - E_2$ ook niet winbaar is. We concluderen dat E_1 een effectieve divisor is van graad $r'(D) + 1$ zodanig dat $D - E_1$ niet winbaar is. We concluderen $r(D) < r'(D) + 1$ en dus $r(D) \leq r'(D)$.

Aangezien zowel $r'(D) \geq r(D)$ als $r'(D) \leq r(D)$ geldt, concluderen we dat $r'(D) = r(D)$. □

Lemma 4.3. *Zij $N \in \mathcal{N}$ en neem aan dat* (RR2) *geldt. Dan geldt er dat de afbeelding γ gegeven door*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{N} &\longrightarrow \mathcal{N} \\ N &\longmapsto K - N, \end{aligned}$$

een welgedefinieerde surjectie is.

Bewijs. Zij $N \in \mathcal{N}$. Dan geldt er N niet winbaar is. Met (RR2) volgt er dat $K - N = \gamma(N)$ ook niet winbaar is. Tevens geldt er $\deg(\gamma(N)) = \deg(K) - \deg(N) = g - 1$ en we concluderen dat $\gamma(N) \in \mathcal{N}$. Dus γ is welgedefinieerd. Zij nu $M \in \mathcal{N}$ willekeurig. Merk op dat $\gamma(K - M) = M$, dus γ is een surjectie. □

We hebben nu genoeg theorie opgebouwd om *Riemann-Roch voor grafen* te bewijzen onder aanname van (RR1) en (RR2). Dat zullen we in de volgende stelling doen.

Stelling 4.4. *Zij G een graaf en neem de volgende twee uitspraken aan:*

(RR1)*: Voor alle $D \in \mathrm{Div}(G)$ bestaat er een $N \in \mathcal{N}$ zodanig dat*
D winbaar $\iff N - D$ niet-winbaar

(RR2)*: Voor alle $D \in \mathrm{Div}(G)$ van graad $g - 1$ geldt er dat*
D winbaar $\iff K - D$ winbaar.

Dan geldt voor alle $D \in \mathrm{Div}(G)$ de Riemann-Roch formule

$$r(D) - r(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Bewijs. Zij $D \in \text{Div}(G)$ en beschouw de verzameling

$$A := \{D' - N : D' \sim D, N \in \mathcal{N}\} \subset \text{Div}(G),$$

en de afbeelding φ gegeven door

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow \text{Div}(G) \\ F &\longmapsto -F. \end{aligned}$$

Per definitie van A geldt er voor elke $F \in A$ dat $F = D' - N$ voor zekere $D' \sim D$ en $N \in \mathcal{N}$. We kunnen dan schrijven:

$$\begin{aligned} \deg^+(D' - N) - \deg^+(\varphi(D' - N')) &= \deg^+(D' - N) - \deg^+(N - D') \\ &= \deg(D' - N) \\ &= \deg(D') - \deg(N) \\ &= \deg(D) + 1 - g. \end{aligned}$$

We concluderen dat $D' - N \in A$ geldt dat $\deg^+(D' - N)$ een constante verschilt van $\deg^+(\varphi(D' - N))$. Dit geldt voor alle $(D' - N) \in A$, dus ook voor het element in $D' - N \in A$ waarvoor $\deg^+(D' - N)$ minimaal is. We schrijven:

$$\min_{\substack{D' \sim D \\ N \in \mathcal{N}}} \left(\deg^+(D' - N)\right) - \min_{\substack{D' \sim D \\ N \in \mathcal{N}}} \left(\deg^+(\varphi(D' - N)\right) = \deg(D) + 1 - g.$$

Merk nu op dat voor elke $D' - N \in A$ geldt dat $(K - D') - (K - N) = N - D' = \varphi(D' - N)$. Bovendien volgt er met lemma 4.3 dat $N' := K - N \in \mathcal{N}$ en dat N' heel $\mathcal{N}$ doorloopt als N dat doet. Zodoende kunnen we bovenstaande gelijkheid omschrijven tot

$$\min_{\substack{D' \sim D \\ N \in \mathcal{N}}} \left(\deg^+(D' - N)\right) - \min_{\substack{D' \sim D \\ N' \in \mathcal{N}}} \left(\deg^+((K - D) - N')\right) = \deg(D) + 1 - g.$$

We passen nu lemma 4.2 toe om de volgende identiteit te verkrijgen:

$$r(D') - r(D' - K) = \deg(D) + 1 - g.$$

Aangezien uit de definitie van dimensie meteen volgt dat voor alle $D' \sim D$ de dimensie gelijk is, kunnen we D' in het linkerlid vervangen door D om het gewilde resultaat te vinden. $\square$

4.2 Deelstelling II

Zoals in het plan van aanpak al genoemd werd, is de volgende stap in het bewijs om aan te tonen dat de voorwaarden (RR1) en (RR2) altijd gelden. Voordat we dat kunnen doen is we echter nog wat voorwerk vereist, zoals de introductie van het begrip van een gereduceerde divisor. Hiervoor moeten we eerst de volgende definitie formuleren.

Definitie 4.5. Zij A een niet-lege deelverzameling van $V(G)$. Voor elke $v \in A$ definiëren we dan $\text{outdeg}_A(v) := |\{w \in V(G) \setminus A : \{v, w\} \in E(G)\}|$, het aantal knopen $w \in V(G) \setminus A$ dat een kant met v deelt.

Definitie 4.6. Zij $D \in \text{Div}(G)$ een divisor en kies $v_0 \in V(G)$ vast. We noemen D dan v_0-gereduceerd als

(1) voor alle $v \in V(G) \setminus \{v_0\}$ geldt $D(v) \geq 0$

(2) voor alle niet-lege deelverzamelingen $A \subseteq V(G) \setminus \{v_0\}$ geldt dat er een $v \in A$ bestaat met $D(v) < \text{outdeg}_A(v)$.

Lemma 4.7. *Kies $v_0 \in V(G)$ vast. Voor elke $D \in \text{Div}(G)$ bestaat er een unieke v_0-gereduceerde $D' \in \text{Div}(G)$ zodanig dat $D' \sim D$.*

In plaats van het bewijs van lemma 4.7 eerst te geven en dit resultaat vervolgens te concretiseren door te verwijzen naar de *Dollar Game*, zullen we de existentie van gereduceerde divisoren eerst schetsen aan de hand van de Dollar Game. Daarna pas zullen we existentie en uniciteit formaliseren in een daadwerkelijk bewijs. Het intuïtieve bewijs van de existentie van v_0-gereduceerde divisoren bestaat uit een aantal stappen:

> **Stap 1:** De eerste stap is om ervoor te zorgen dat van alle knopen alleen nog v_0 in het rood staat. Dit is in feite vrij makkelijk: we kunnen v_0 immers zonder beperking laten schieten. Het geld dat de buurknopen van v_0 zo verkrijgen kunnen ze op hun beurt verder door de graaf verspreiden door te schieten en zo door. Omdat v_0 geen minimale waarde heeft en dus net zo lang kan schieten tot er genoeg geld over de overige knopen verdeeld is, lukt dit altijd.
>
> **Stap 2:** Omdat G eindig is, zijn er ook een eindig aantal niet-lege deelverzamelingen van $V(G) \setminus \{v_0\}$. Noem deze $A_1, A_2, \ldots, A_s$ voor zekere $s \in \mathbb{N}$. Bekijk eerst A_1. Zolang er geldt dat elke knoop in A_1 tegelijkertijd kan schieten zonder dat er een knoop van deze knopen in het rood komt, dan doen we dit. Zodra er op gegeven moment een knoop in A_1 ontstaat die *niet* aan dit criterium voldoet (dus: een knoop die minder geld bezit dan buren buiten A_1), bekijken we A_2 en doen we hetzelfde: schieten als het kan en anders door naar A_3 enzovoort. Elke keer als de knopen uit een A_i geschoten hebben, beginnen we weer bij A_1 en vervolgen we de strategie. Dit proces stopt. Dit zullen we niet bewijzen, aangezien dit slechts een intuïtief bewijs is en het formele bewijs hierna volgt.
>
> **Stap 3:** De verkregen configuratie is v_0-gereduceerd. Er geldt namelijk voor alle $v \in E(G)$ met $v \neq v_0$ dat $D(v) \geq 0$ en bovendien geldt er voor alle niet lege deelverzamelingen A_i dat er een $v \in A_i$ bestaat met $D(v) < \text{outdeg}_{A_i}(v)$ - dat is namelijk de knoop die niet meer kan schieten.

Nu we aannemelijk hebben gemaakt dat v_0-gereduceerde divisoren bestaan, is het tijd om het formele bewijs te geven.

Bewijs. Voor elke $v \in E(G)$ definiëren we $d(v)$ als de lengte van het kortste pad van v_0 naar v. Bovendien stellen we $d := \max_{v \in V(G)} d(v)$ en definiëren we voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de verzameling $S_n := \{v \in V(G) : d(v) = n\}$. Voor elke $D \in \mathrm{Div}(G)$ beschouwen we de volgende twee vectoren:

$$p_1(D) := \left(\sum_{\substack{v \in S_d \\ D(v)<0}} D(v), \sum_{\substack{v \in S_{d-1} \\ D(v)<0}} D(v), \ldots, \sum_{\substack{v \in S_1 \\ D(v)<0}} D(v) \right) \in \mathbb{Z}^d,$$
$$p_2(D) := \left(\sum_{v \in S_0} D(v), \sum_{v \in S_1} D(v), \ldots, \sum_{v \in S_d} D(v) \right) \in \mathbb{Z}^{d+1}.$$

Zij nu $D \in \mathrm{Div}(G)$ en definieer $P := \{p_1(D') \in \mathbb{Z}^d : D' \sim D\}$. Merk op dat deze verzameling niet-leeg is, aangezien $p_1(D) \in P$. Tevens is P coördinaatsgewijs van boven begrensd door $0 \in \mathbb{Z}^d$, dus er bestaat een lexicografisch maximum $x \in P$.

Bekijk nu de verzameling $Q := \{p_2(D') \in \mathbb{Z}^{d+1} : D' \sim D \text{ en } p_1(D') = x\}$. Merk op dat deze verzameling niet-leeg is: omdat P een maximum heeft is er immers minstens één $D' \sim D$ zodanig dat $p_2(D') \in Q$. Merk bovendien op dat voor alle $D' \sim D$ met $p_2(D') \in Q$ geldt dat de graad van D' vastligt (omdat $\deg(D') = \deg(D)$) en $\deg^-(D')$ ook vastligt aangezien $p_1(D') = x$. Hieruit volgt dat voor alle elementen in $D' \in Q$ de waarde van $\deg^+(D') = \deg(D') - \deg^-(D')$ vastligt en dus dat Q eindig is. We concluderen dat Q ook een lexicografisch maximaal element heeft en noemen dit F. Merk op dat voor F dus geldt:

$$p_1(F) = \max_{D' \sim D} p_1(D')$$
$$p_2(F) = \max_{\substack{D' \sim D \\ p_1(D') = p_1(F)}} p_2(D').$$

Claim: deze F is v_0-gereduceerd. We bewijzen dat F voldoet aan de twee eisen voor een v_0-gereduceerde divisor en tonen vervolgens aan dat F uniek is.

$\mathbf{v_0}$-gereduceerd:

(*i*) We bewijzen eerst dat voor alle $v \in V(G) \setminus \{v_0\}$ geldt dat $F(v) \geq 0$. Stel namelijk dat er een $v \in E(G) \setminus \{v_0\}$ bestaat met $F(v) < 0$. Laat $w \in V(G)$ zodanig dat $\{w, v\} \in E(G)$ en $d(w) < d(v)$. Laat nu ook

$$F' := F - \Delta\left(\chi_{\{w\}}\right),$$

waarbij $\chi_{\{w\}} : V(G) \to \{0, 1\}$ de indicatorafbeelding is op w is (In de *Dollar Game* is F' de verdeling die je vanuit F krijgt als w schiet). Uit de aanname $\{v, w\} \in E(G)$ en de definitie van de *Laplace-afbeelding* volgt dat $F'(v) = F(v) + 1$, dus $F'(v) > F(v)$. Tevens geldt er dat $F'(x) \geq F(x)$ voor alle $x \in V(G)$ met $d(x) \geq d(v)$, met een strikte relatie $F'(x) > F(x)$ dan en slechts dan als $\{w, x\} \in E(G)$. Er volgt nu $p_1(F') > p_1(F)$, wat in tegenspraak is met de maximaliteit van F. We concluderen dus dat $F(v) \geq 0$ voor alle $v \in V(G) \setminus \{v_0\}$.

(*ii*) Nu bewijzen we dat er voor alle niet-lege $A \subseteq V(G) \setminus \{v_0\}$ geldt dat er een $v \in A$ bestaat zodanig dat $F(v) < \text{outdeg}_A(v)$. Stel dat dit niet geldt. Dan bestaat er een niet-lege deelverzameling $A \subseteq V(G) \setminus \{v_0\}$ zodanig dat voor alle $v \in A$ geldt dat $F(v) \geq \text{outdeg}_A(v)$. Definieer nu

$$F' := F - \Delta(\chi_A),$$

waarbij $\chi_A : V(G) \to \{0,1\}$ de indicatorafbeelding is op A is. (In de *Dollar Game*: alle $v \in A$ schieten). Merk op dat er nu voor alle $v \in V(G) \setminus A$ geldt dat $F'(v) \geq F(v)$. Bovendien geldt er voor alle $v \in A$ dat $F'(v) = F(v) - \text{outdeg}_A(v)$. Uit onze aanname dat $F(v) \geq \text{outdeg}_A(v)$ voor alle $v \in A$ volgt er nu dat $F'(v) \geq 0$ voor alle $v \in A$.

Merk op dat uit deel *(i)* van het bewijs volgt dat $F(v) \geq 0$ voor alle $v \in V(G) \setminus \{v_0\}$ en dus $p_1(F) = 0$. We hebben nu aangetoond dat

- $F'(v) \geq 0$ voor alle $v \in A$
- $F'(v) \geq F(v) \geq 0$ voor alle $v \in V(G) \setminus A$

Dus $F'(v) \geq 0$ voor alle $v \in V(G)$ en ook $p_1(F') = 0$. Dus $p_1(F) = p_1(F')$.

Zij $w \in A$ zodanig dat $d(w) = \min_{v \in A} d(v)$. Zij k het kortste pad van v_0 naar w, dus

$$k := \{\{v_0, v_1\}, ..., \{v_{n-1}, w\}\} \text{ en } n = d(w).$$

Er geldt dat $v_{n-1} \notin A$, maar v_{n-1} deelt wel een kant met $w \in A$. Hieruit concluderen we dat $F'(v_{n-1}) > F(v_{n-1})$. Voor alle $v \in V(G)$ met $d(v) < d(v_{n-1})$ geldt bovendien dat $F'(v) = F(v)$, aangezien ze geen tak delen met w. We concluderen $p_2(F') > p_2(F)$. Dit is echter in tegenspraak met de maximaliteit van $p_2(F)$, dus we hebben een tegenspraak en concluderen dat er voor elke niet-lege $A \subseteq V(G) \setminus \{v_0\}$ geldt dat er een $v \in A$ bestaat met $F(v) < \text{outdeg}_A(v)$.

Aan allebei de voorwaarden van v_0-gereduceerdheid is dus voldaan, dus voor elke $D \in \text{Div}(G)$ bestaat er een $F \sim D$ zodanig dat F een v_0-gereduceerde divisor is.

Uniciteit: We willen bewijzen dat elke $D \in \text{Div}(G)$ slechts equivalent aan één v_0-gereduceerde divisor is. Zij dus $v_0 \in V(G)$ vast en stel dat $D, D' \in \text{Div}(G)$ twee equivalente maar verschillende v_0-gereduceerde divisoren zijn. Omdat D en D' equivalent zijn, bestaat er een $f \in \mathcal{M}(G)$ zodanig dat $D' - D = \Delta(f)$. Merk op dat deze f niet constant is, aangezien $D \neq D'$. Zonder verlies van algemeenheid bestaat er een $v \in V(G)$ zodanig dat $f(v) > f(v_0)$ (anders wisselen we D en D' simpelweg om). Zij $A := \{v \in V(G) : f(v) \text{ maximaal}\}$. Merk op dat A dan een niet lege deelverzameling van $V(G) \setminus \{v_0\}$ is. Merk op dat voor alle $v \in A$ en alle $w \in V(G) \setminus A$ geldt dat $f(v) - f(w) \geq 1$, aangezien f maximaal is op A. We kunnen dus voor elke $v \in A$ schrijven

$$\sum_{\substack{w \in V(G) \\ \{v,w\} \in E(G)}} (f(v) - f(w)) \geq \sum_{\substack{w \in V(G) \setminus A \\ \{v,w\} \in E(G)}} 1 \ = \ \text{outdeg}_A(v).$$

Omdat D een v_0-gereduceerde divisor is en we aannamen dat $D' - D = \Delta(f)$, kunnen we bovenstaand resultaat gebruiken om de volgende ongelijkheid te vinden:

$$0 \leq D(v) = D'(v) - \sum_{\substack{w \in V(G) \\ \{v,w\} \in E(G)}} (f(v) - f(w)) \leq D'(v) - \text{outdeg}_A(v).$$

Merk op dat hieruit volgt dat $D'(v) \geq \text{outdeg}_A(v)$ voor alle $v \in A$, wat in tegenspraak is met het feit dat D' een v_0-gereduceerde divisor is. Dus twee ongelijke equivalente divisoren kunnen niet allebei v_0-gereduceerd zijn.

$\square$

We hebben nu bewezen dat er voor elke $D \in \text{Div}(G)$ en elke $v_0 \in V(G)$ een unieke v_0-gereduceerde divisor $D' \sim D$ bestaat. We zullen het begrip van gereduceerde divisoren en dit lemma later in het bewijs van deelstelling II gebruiken, maar eerst bekijken we een aantal definities en resultaten die te maken hebben met lineaire ordeningen op de verzameling knopen.

Voor elke lineaire ordening $\prec$ op $V(G)$ definiëren we een bijbehorende divisor

$$N_\prec := \sum_{v \in V(G)} \Big(|\{\{v,w\} \in E(G) : w \prec v\}| - 1 \Big) \cdot v.$$

Lemma 4.8. *Voor elke lineaire ordening $\prec$ geldt er $N_\prec \in \mathcal{N}$*

Bewijs. Zij $\prec$ een lineaire ordening op $V(G)$. Merk op dat $\deg(N_\prec) = E(G) - V(G) = g - 1$ direct uit de definitie volgt. Het rest ons nog te bewijzen dat $N_\prec$ aan geen enkele effectieve divisor equivalent is. We gaan laten zien dat voor willekeurige $f \in \mathcal{M}(G)$ geldt dat er een $x \in V(G)$ bestaat zodanig dat $\Big(N_\prec - \Delta(f)\Big)(x)$ negatief is.

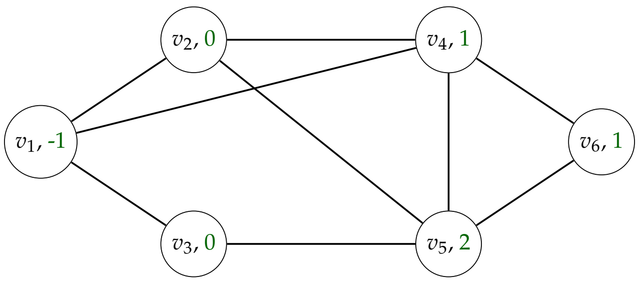
Zij $f \in \mathcal{M}(G)$ willekeurig. Zij $V_{\max} \subseteq V(G)$ de verzameling knopen waarop f maximaal is. Zij $x \in V_{\max}$ het minimale element in $V_{\max}$ onder de ordening $\prec$. Dan geldt er dat $f(v) \leq f(x)$ voor alle $v \in V(G)$ en een strikte relatie als

$v \prec x$. We zetten nu $D := N_\prec - \Delta(f)$ en schrijven:

$$\begin{aligned}
D(x) &= (|\{\{x,v\} \in E(G) : v \prec x\}| - 1) - \sum_{\substack{v \in V(G) \\ \{x,v\} \in E(G)}} (f(x) - f(v)) \\
&= -1 + |\{\{x,v\} \in E(G) : v \prec x\}| + \sum_{\substack{v \in V(G) \\ \{x,v\} \in E(G)}} (f(v) - f(x)) \\
&= -1 + \sum_{\substack{v \prec x \\ \{x,v\} \in E(G)}} 1 + \left(\sum_{\substack{v \prec x \\ \{x,v\} \in E(G)}} (f(v) - f(x)) + \sum_{\substack{x \prec v \\ \{x,v\} \in E(G)}} (f(v) - f(x)) \right) \\
&= -1 + \sum_{\substack{v \prec x \\ \{x,v\} \in E(G)}} (f(v) - f(x) + 1) + \sum_{\substack{x \prec v \\ \{x,v\} \in E(G)}} (f(v) - f(x)) \\
&\leq -1
\end{aligned}$$

We zien dus dat voor alle $f \in \mathcal{M}(G)$ geldt dat er in de divisor $N_\prec - \Delta(f)$ een knoop met negatieve coëfficiënt bestaat. Dus $N_\prec - \Delta(f)$ is nooit effectief. $\square$

Voorbeeld 4.9. Merk op dat we aan de hand van dit lemma voor een willekeurige graaf nu altijd een onwinbare verdeling van graad $g - 1$ voor de *Dollar Game* kunnen geven. Bekijk bijvoorbeeld de graaf in figuur 4. We hebben daar de relatie $\prec$ gedefinieerd door $v_i \prec v_j \iff i < j$ en vervolgens de verdeling $N_\prec$ ingevoerd.



Figuur 4: *Dollar Game*: Een onwinbare configuratie $N_\prec$

Voor we nu *Riemann-Roch voor grafen* daadwerkelijk kunnen bewijzen, hebben we nog één stelling en een gevolg daarvan nodig. Merk op dat deze stelling erg lijkt op (RR1). De kwantoren staan echter anders, waardoor stelling 4.10 een sterkere uitspraak is.

Stelling 4.10. *Zij $D \in \mathrm{Div}(G)$. Dan geldt precies één van de volgende beweringen:*

(1) $r(D) \geq 0$

(2) $r(N_\prec - D) \geq 0$ *voor een zekere lineaire ordening* $\prec$

Bewijs. Zij $D \in \mathrm{Div}(G)$ gegeven. We laten eerst zien dat minstens één van de voorwaarden (1) of (2) geldt. Kies $v_0 \in V(G)$ willekeurig. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we met lemma 4.7 aannemen dat D een v_0-gereduceerde divisor is. We zullen inductief nu een ordening $v_0 \prec v_1 \prec ... \prec v_{|V(G)|-1}$ op $V(G)$ definiëren. Zijn $k \in \mathbb{N}$ met $0 < k < |V(G)|$ en neem aan dat $v_0, ...v_{k-1}$ gegeven zijn. Definieer dan de verzameling $A_k = V(G) \setminus \{v_0, ..., v_{k-1}\}$. Merk op dat A_k een niet-lege deelverzameling van $V(G) \setminus \{v_0\}$ is. Omdat D een v_0-gereduceerde divisor is, kunnen we nu $v_k \in A_k$ kiezen zodanig dat $D(v_k) < \text{outdeg}_{A_k}(v_k)$. We zetten dan $v \prec v_k$ voor alle $v \in A_k$. Als we dit doorvoeren voor alle $k \leq |V(G)| - 1$, verkrijgen we een lineaire ordening op $V(G)$.

Voor alle k met $1 \leq k \leq |V(G)| - 1$ geldt nu:

$$\begin{aligned} D(v_k) &\leq \text{outdeg}_{A_k}(v_k) - 1 \\ &= |\{w \in V(G) \setminus A_k : \{v_k, w\} \in E(G)\}| - 1 \\ &= |\{w \prec v_k : \{v_k, w\} \in E(G)\}| - 1 \\ &= N_\prec(v_k) \end{aligned}$$

Stel nu ten eerste dat $D(v_0) \geq 0$. Omdat D een v_0-gereduceerde divisor is, geldt voor alle $v \in V(G) \setminus \{v_0\}$ tevens $D(v) \geq 0$. Daaruit volgt $D \geq 0$, dus $r(D) \geq 0$ en we voldoen aan bewering (1). Stel nu dat $D(v_0) < 0$, ofwel $D(v_0) \leq -1$. Uit bovenstaande ongelijkheid volgt dat $D \leq N_\prec$, dus $N_\prec - D \geq 0$ en we voldoen aan bewering (2).

Merk ten slotte op dat we slechts aan één van de twee voorwaarden kunnen voldoen. Stel namelijk dat (1) en (2) allebei gelden. Dan volgt er met lemma 2.11 dat $r(N_\prec) \geq 0$, maar dat is in tegenspraak met lemma 4.8. □

Gevolg 4.11. *Zij $D \in \text{Div}(G)$ met $\deg(D) = g - 1$. Dan geldt er dat $D \in \mathcal{N}$ dan en slechts dan als er een lineaire ordening $\prec$ op $V(G)$ bestaat zodanig dat $D \sim N_\prec$.*

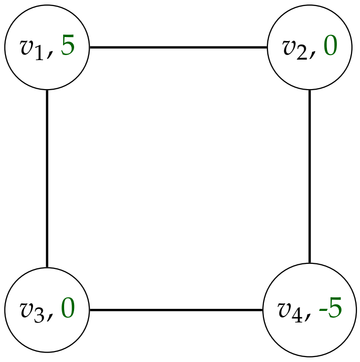
Bewijs. Stel dat $D \in \mathcal{N}$. Dan geldt er, per definitie van $\mathcal{N}$, dat $r(D) = -1$. Er volgt met stelling 4.10 dat er een lineaire ordening $\prec$ bestaat zodanig dat $r(N_\prec - D) \geq 0$, dus er bestaat een effectieve divisor $E \in \text{Div}(G)$ zodanig dat $N_\prec - D \sim E$. Merk echter op dat $\deg(N_\prec) - \deg(D) = 0$, dus $\deg(E) = 0$ en dus $E = 0$. Hieruit volgt $N_\prec \sim D$. Het bewijs de andere kant op volgt direct uit lemma 4.8. □

Voorbeeld 4.12. We zullen nu terugkomen op een kwestie uit het tweede hoofdstuk. We hebben daar namelijk beweerd dat de dimensie van de verdeling in figuur 3 gelijk is aan 0. We hebben al vastgesteld dat die verdeling zelf winbaar was maar nog niet bewezen dat er na het wegnemen van 1 dollar uit v_1 een verdeling overblijft die onwinbaar is. Dit zullen we nu doen. We beschouwen de verdeling in figuur 5: dit is de verdeling die we hoofdstuk 2 in figuur 3 al zagen, maar dan met een dollar minder in v_1. We tonen aan dat deze verdeling onwinbaar is.

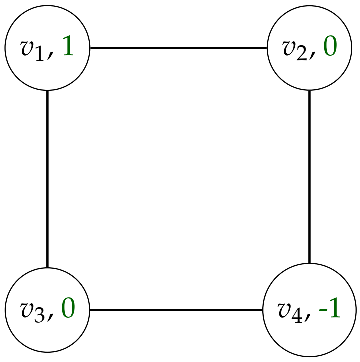
Merk namelijk op dat we deze verdeling door twee keer te schieten met v_1 en twee keer te innen met v_4 kunnen omvoeren naar verdeling in figuur 6.

We definiëren nu de ordening $\prec$ op de knopen als volgt:

$$v_4 \prec v_3 \prec v_2 \prec v_1$$



Figuur 5: Het spel uit figuur 3 met een dollar minder op v_1



Figuur 6: Verdeling verkregen uit 5

Merk op dat de bijbehorende divisor $N_{\prec}$ precies de verdeling in figuur 6 is. Met gevolg 4.11 volgt er dan dan de originele verdeling een element van $\mathcal{N}$ is en dus niet te winnen is.

We zullen nu de stelling van *Riemann-Roch voor grafen* bewijzen. Merk op dat het wegens stelling 4.4 voldoet om de voorwaarden (RR1) en (RR2) te bewijzen, die we hier voor de volledigheid nogmaals zullen herhalen.

(RR1): Voor alle $D \in \text{Div}(G)$ bestaat er een $N \in \mathcal{N}$ zodanig dat
D winbaar $\iff N - D$ niet-winbaar

(RR2): Voor alle $D \in \text{Div}(G)$ van graad $g - 1$ geldt er dat
D winbaar $\iff K - D$ winbaar.

Stelling 4.13. (Deelstelling II) *Zij G een graaf een $D \in \text{Div}(G)$ een divisor op deze graaf. Dan gelden de voorwaarden* (RR1) *en* (RR2).

Bewijs.

(RR1): Stel dat $r(D) \geq 0$. Met stelling 4.10 volgt er dan dat er voor alle lineaire ordeningen $\prec$ geldt dat $r(N_{\prec} - D) < 0$. Met gevolg 4.11 kunnen we nu concluderen dat voor alle $N \in \mathcal{N}$ geldt dat $r(N - D) < 0$ en (RR1) volgt. Stel nu dat $r(D) < 0$. Met stelling 4.10 volgt nu dat $r(N_{\prec} - D) \geq 0$ voor een zekere lineaire ordening $\prec$ en met eenzelfde redenatie als zo-even concluderen we dat (RR1) volgt. Dus (RR1) geldt altijd.

(RR2): Zij D van graad $g-1$. Omdat $K-(K-D) = D$, volstaat het om de bewering slechts één kant op te bewijzen. We bewijzen $K-D$ winbaar $\implies$ D winbaar en werken met contrapositie. Zij dus $D \in \mathcal{N}$. Met gevolg 4.11 volgt er dat er een lineaire ordening $\prec_1$ op $V(G)$ bestaat zodanig dat $N_{\prec_1} \sim D$. Zij $\prec_2$ nu de omgekeerde van $\prec_1$, dus $v \prec_1 w \iff w \prec_2 v$. Merk op dat de ordening $\prec_2$ tevens een divisor induceert. We schrijven nu voor alle $v \in V(G)$:

$$\begin{aligned} N_{\prec_1}(v) + N_{\prec_2}(v) &= |\{\{v,w\} \in E(G) : w \prec_1 v\}| - 1 \\ &\quad + |\{\{v,w\} \in E(G) : w \prec_2 v\}| - 1 \\ &= \deg(v) - 2 \\ &= K(v). \end{aligned}$$

Omdat dit voor alle $v \in V(G)$ geldt, concluderen we $K - N_{\prec_1} = N_{\prec_2}$. Daaruit volgt $K - N_{\prec_1} \in \mathcal{N}$ en dus $K - D \in \mathcal{N}$. $\square$

Hiermee is de *stelling van Riemann-Roch voor grafen* bewezen.

5 Resultaten voor de *Dollar Game*

Met de *stelling van Riemann-Roch voor grafen* en de gevolgen daarvan hebben we nu een aantal resultaten verkregen die een uitspraak doen over de winbaarheid van de *Dollar Game*. Geen van deze resultaten doet echter een specifieke uitspraak over speltactiek - hóe we het spel kunnen winnen. In dit hoofdstuk bewijzen we twee beweringen die zich hierop concentreren.

Lemma 5.1. *Zij D een verdeling van de Dollar Game en neem aan dat we D kunnen winnen met een zekere strategie, dat wil zeggen, een opeenvolging van schieten en innen met zekere knopen. Dan maakt de volgorde van deze zetten niet uit bij het winnen van het spel.*

Bewijs. Dit volgt direct uit het feit dat $\mathrm{Div}(G)$ een abelse groep is. □

Stelling 5.2. *Zij $D \in \mathrm{Div}(G)$ en beschouw de Dollar Game met beginverdeling D. Als D winbaar is, dan bestaat er in het bijzonder een winnende spelstrategie van alleen inzetten op knopen met een negatief bedrag.*

Bewijs. We nemen aan dat D winbaar is, dus $D + \Delta(f) =: E \geq 0$ voor zekere $f \in \mathcal{M}(G)$. Aan de hand hiervan kiezen we nu een $f' \in \mathcal{M}(G)$ en stellen we $D + \Delta(f') =: E' \in \mathrm{Div}(G)$, zodanig dat E en f' aan de volgende voorwaarden voldoen:

(i) E' kan vanuit D verkregen worden door een serie in-zetten vanuit negatieve knopen.

(ii) voor alle $v \in V(G)$ met $f(v) \geq 0$ geldt $f'(v) \leq f(v)$.

(iii) $\sum_{v \in V(G)} f'(v)$ is maximaal onder de bovenstaande voorwaarden

Er geldt dat $E'(v) \geq 0$ voor alle $v \in V(G)$ waarvoor geldt $f'(v) < f(v)$. Stel namelijk van niet. Dan bestaat er een $w \in V(G)$ zodanig dat $f'(w) < f(w)$ en $E'(w) < 0$. Bekijk nu de afbeelding $g \in \mathcal{M}(G)$ gegeven door $g = f' + \chi_{\{w\}}$, waarbij $\chi_{\{w\}}$ de indicatorafbeelding op w is (*Dollar Game:* w int). Merk op dat g duidelijk voldoet aan eis (i), aangezien $g(w) = f'(w) + 1$ en $g(v) = f'(v)$ voor alle $v \in V(G) \setminus \{w\}$. Aan eis (ii) is ook voldaan, omdat uit $f'(w) < f(w)$ en $g(w) = f'(w) + 1$ volgt dat $g(w) \leq f(w)$. Bovendien geldt voor alle $v \in V(G) \setminus \{w\}$ dat $g(v) = f'(v) < f(v)$.

Merk nu echter op dat $\sum_{v \in V(G)} g(v) > \sum_{v \in V(G)} f'(v)$, wat eis (iii) tegenspreekt. Dus $E'(v) \geq 0$ voor alle $v \in V(G)$ met $f'(v) < f(v)$.

Het rest ons nog te bewijzen dat $E'(v) \geq 0$ voor alle $v \in V(G)$ met $f'(v) = f(v)$. Zij dus $v \in V(G)$ zodanig dat $f'(v) = f(v)$. Merk echter op dat per aanname (ii) geldt $f'(w) \leq f(w)$ voor alle $w \in V(G)$ met $\{v, w\} \in E(G)$. Merk op dat voor elk van deze knopen w dus geldt dat $f'(v) - f'(w) \geq f(v) - f(w)$. Uit de definitie van de *Laplace-afbeelding* volgt nu direct dat

$$E'(v) = \Big(D + \Delta(f')\Big)(v) \geq \Big(D + \Delta(f)\Big)(v) = E(v) \geq 0$$

Deze redenering geldt voor alle $v \in V(G)$ met $f'(v) = f(v)$. We concluderen $E' \geq 0$ en daarmee is het bewijs klaar. □

Referenties

[1] Matthew Baker and Serguei Norine. Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph. *Adv. Math.*, 215(2):766–788, 2007.