Sytske van der Sluis

Groepsacties op bomen

Bachelorscriptie, 4 juni 2009

Scriptiebegeleider: Dr. B. de Smit

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding

In december 1926 promoveerde Otto Schreier met als proefschrift "Die Untergruppen der freien Gruppen" [Sch]. Hij bewees hierin het vermoeden van Jacob Nielsen dat elke ondergroep van een vrije groep vrij is. Het bewijs dat hij geeft is een existentiebewijs, er kunnen dus geen specifieke voortbrengers gegeven worden voor de ondergroep. Wel geeft hij een formule (Schreier index formule) waarmee je kunt bepalen hoeveel voortbrengers een ondergroep van gegeven index heeft. Voor een ondergroep $H \subset G$ van index n geldt:

$$\#\{\text{voortbrengers van H}\} - 1 = n(\#\{\text{voortbrengers van } G\} - 1).$$

Door te bekijken hoe vrije groepen werken op bomen heeft Jean-Pierre Serre [Ser] dit bewijs enorm vereenvoudigd. Hij gebruikt hier hoofdzakelijk het volgende resultaat.

Een groep G werkt vrij op een boom dan en slechts dan als G een vrije groep is.

Het bewijzen dat ondergroepen van vrije groepen vrij zijn is nu beperkt tot de volgende redenatie: Omdat G een vrije groep is werkt G vrij op een zekere boom T. Elke ondergroep $H \subset G$ werkt vrij op deze boom. Dus zijn alle ondergroepen H zelf ook vrij.

Het mooie is dat het bewijs aan de hand van bomen ons niet alleen in staat stelt om te bewijzen dat ondergroepen vrij zijn. We kunnen ook voor een gegeven ondergroep een basis construeren. Daarnaast is het mogelijk om na te gaan hoeveel ondergroepen van een gegeven index een vrije groep heeft. Dit alles zal in deze scriptie worden behandeld.

2 De categorie van grafen

2.1 Grafen

Definitie 2.1. Een graaf Γ bestaat uit een verzameling $V(\Gamma)$ van knopen en een verzameling $E(\Gamma)$ van takken met daarbij een drietal afbeeldingen:

- een functie $o : E \to V$ (origin),
- een functie $t : E \to V$ (terminus),
- een omkering $\bar{\cdot} : E \to E; e \mapsto \bar{e}$,

zodat geldt voor alle $e \in E$: $\bar{\bar{e}} = e$, $e \neq \bar{e}$ en $o(e) = t(\bar{e})$.

De takken e en $\bar{e}$ worden ook wel elkaars inverse genoemd. De knopen $o(e)$ en $t(e)$ heten de extremen van de tak e. Twee knopen heten aangrenzend als ze de extremen zijn van eenzelfde tak e.

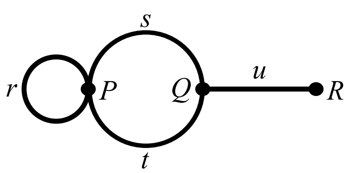
Een oriëntatie van een graaf wordt gegeven door een deelverzameling $E_+ \subset E$ die van elk takkenpaar $\{e, \bar{e}\}$ precies één element bevat. Ofwel, er geldt $E = E_+ \cup \overline{E_+}$ en $E_+ \cap \overline{E_+} = \emptyset$. Een georiënteerde graaf is dus volledig gegeven door zijn knopenverzameling en oriëntatie.

De vereniging van twee grafen $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ heeft knopen verzameling $V = V_1 \cup V_2$ en takkenverzameling $E = E_1 \cup E_2$. Voor $e \in E_1 \subset E$ worden de functies $o, t, \bar{\cdot}$ geinduceerd door deze functies op Γ_1. Evenzo geldt voor $e \in E_2 \subset E$ dat de functies $o, t, \bar{\cdot}$ geinduceerd door deze functies op Γ_2.

Een graaf Γ' heet een deelgraaf van Γ als: $V(\Gamma') \subset V(\Gamma)$, $E(\Gamma') \subset E(\Gamma)$ met $o, t, \bar{\cdot}$ geinduceerd door deze functies op Γ waarbij voor alle $e \in E(\Gamma')$ geldt dat: $\bar{e} \in E(\Gamma')$ en $o(e), t(e) \in V(\Gamma')$.

Grafen worden meestal afgebeeld als diagram. Hierbij worden knopen afgebeeld als een punt, en een takkenpaar $\{e, \bar{e}\}$ als een lijn. In een georiënteerde graaf geeft men een tak in E_+ aan met een pijltje van $o(e)$ naar $t(e)$.

Het onderstaande diagram geeft een graaf Γ weer met $V = \{P, Q, R\}$ en $E = \{r, s, t, u, \bar{r}, \bar{s}, \bar{t}, \bar{u}\}$.

$\Gamma =$ 

2.2 Morfismen

Definitie 2.2. Een morfisme $f : \Gamma \to \Gamma'$ tussen grafen bestaat uit de afbeeldingen $f_V : V \to V'$ en $f_E : E \to E'$ zodat voor alle $e \in E$ geldt dat: $f_V(o(e)) = o(f_E(e))$ en $\overline{f_E(e)} = f_E(\bar{e})$. Voor morfismen tussen gerichte grafen moet tevens gelden dat $f_E(E_+) \subset E'_+$

Een morfisme heet *injectief* als zowel f_V als f_E injectief zijn.

Bij het samenstellen van twee morfismen f en g krijgen we:

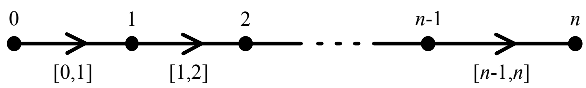
$$(g \circ f)_V(o(e)) = g_V(f_V(o(e))) = g_V(o(f_V(e))) = o(g_V(f_V(e))) = o((g_V \circ f_V)(e))$$
$$\overline{(g \circ f)_E(e)} = \overline{g_E(f_E(e))} = g_E(\overline{f_E(e)}) = g_E(f_E(\bar{e})) = (g_E \circ f_E)(\bar{e})$$

Het samenstellen van twee morfismen geeft dus weer een graafmorfisme. Het is makkelijk in te zien dat er voor elke graaf een identiteitsmorfisme is en dat samenstelling van morfismen associatief is. Hieruit volgt dat grafen een categorie vormen [Lan, I §11].

Het is nu dus mogelijk om op natuurlijke wijze te spreken over een groepswerking $G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ van een groep G op een graaf Γ. Een groepswerking heet *zonder inversie* als er geen paar $g \in G, e \in E$ is met $ge = \bar{e}$. Dit betekent dat er een oriëntatie van Γ bestaat die behouden blijft onder de werking van G. Een groepswerking zonder inversies waar bovendien voor alle $g \neq 1 \in G$ en $e \in E$ geldt dat $ge \neq e$ heet *vrij*.

2.3 Paden

Zij n een niet-negatief geheel getal en beschouw de volgende graaf:

$P_n =$ 

Deze heeft $n+1$ knopen $0, 1, \ldots, n$ en een oriëntatie gegeven door de n takken $[i, i+1]$ met $0 \leq i < n$, $o([i, i+1]) = i$ en $t([i, i+1]) = i+1$.

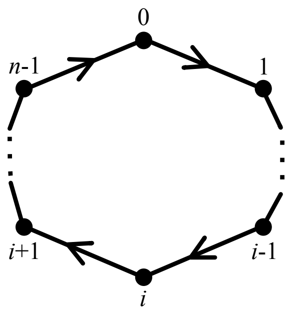
Definitie 2.3. Een pad van lengte n in een graaf Γ is een morfisme $c : P_n \to \Gamma$.

Het pad P_n wordt ook wel weergegeven met de reeks $(e_1, \ldots, e_n)$ van takken $e_i = c([i-1, i])$. De knoop $o(P_n) = o(e_1)$ heet de beginknoop van het pad P_n en $t(P_n) = t(e_n)$ eindknoop. Een paar van de vorm $e_{i+1} = \bar{e}_i$ in een pad heet een *backtracking*. Als een pad van lengte n een backtracking bevat kunnen we daar een pad van lengte $n-2$ uit vormen door de backtracking te verwijderen. Dit geeft het pad $(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+2}, \ldots, e_n)$. Met inductie kunnen we nu concluderen dat als er in een graaf een pad is tussen twee knopen v en v', er ook een pad zonder backtracking bestaat tussen v en v'.

Een graaf heet *samenhangend* als deze niet-leeg is en er tussen elk tweetal knopen ten minste één pad loopt. Het aantal samenhangscomponenten c van een graaf Γ is het minimaal aantal samenhangende grafen dat je moet verenigen om Γ te krijgen. De *afstand* $d(v_1, v_2)$ tussen twee knopen is de lengte van een kortste pad tussen de knopen v_1 en v_2. Als er geen pad bestaat tussen de knopen v_1 en v_2 dan definiëren we $d(v_1, v_2) = \infty$. De *diameter* van een samenhangende niet-lege graaf Γ is $\max\{d(v_1, v_2) | \ v_1, v_2 \in V\}$. Een graaf met eindige diameter heet *begrensd*.

2.4 Cykels

Zij n een positief geheel getal en beschouw de georiënteerde graaf.

$C_n =$ 

Deze heeft als verzameling knopen $V = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ en als oriëntatie $\{[i, i+1]$ met $o([i, i+1]) = i, t([i, i+1]) = i+1 | \ i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\}$.

Definitie 2.4. Een cykel van lengte n in een graaf Γ is een deelgraaf die isomorf is met C_n.

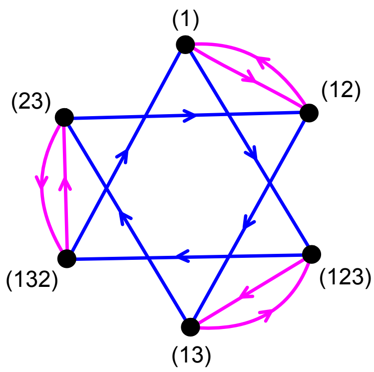
Zo'n cykel kan ook worden gezien als een pad $(e_1, \dots, e_n)$ zonder backtracking waarvoor geldt dat $t(e_i) \neq t(e_j)$ als $i \neq j$ en $o(e_1) = t(e_n)$. Een cykel van lengte 1 wordt ook wel een *kring* genoemd. Een graaf die geen cykels van lengte $n \leq 2$ bevat heet *normaal*.

2.5 De graaf van een groep

Laat G een groep zijn en $S \subset G$ een deelverzameling.

Definitie 2.5. De graaf $\Gamma = \Gamma(G, S)$ is de georiënteerde graaf met G als verzameling knopen en $G \times S = E_+$ als oriëntatie. Voor alle $(g, s) \in E_+$ geldt: $o(g, s) = g$ en $t(g, s) = gs$.

De groep G werkt vrij op $\Gamma(G, S)$ onder linksvermenigvuldiging en behoudt de oriëntatie van $\Gamma(G, S)$.

$\Gamma(S_3, \{(12), (123)\})$ 

Propositie 2.6. *Voor de graaf $\Gamma = \Gamma(G, S)$ gelden de volgende eigenschappen:*

a Het aantal samenhangscomponenten van Γ is gelijk aan $[G : \langle S \rangle]$

b Γ *bevat een kring* $\Leftrightarrow 1 \in S$,

c Γ *is normaal* $\Leftrightarrow S \cap S^{-1} = \emptyset$.

Bewijs.

a Als er een pad bestaat tussen twee knopen g en g' dan bestaan er elementen $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$ zodat $g' = gs_1 \cdots s_n$. In het bijzonder geldt in dat geval dat $g' = gx$ voor een zekere $x \in \langle S \rangle$ dus zitten g en g' in dezelfde restklasse van $G/\langle S \rangle$.Omgekeerd geldt dat als twee knopen g en g' in dezelfde restklasse van $G/\langle S \rangle$ zitten er $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$ bestaan zodat $g' = gs_1 \cdots s_n$. Dus bestaat er een pad tussen g en g'.

b Een kring bestaat uit een tak van een knoop naar zichzelf, het bestaan van een kring betekent dus dat $1 \in S$ en omgekeerd.

c Een normale graaf bevat geen cykels van maximaal lengte 2. Als Γ een kring heeft dan $1 \in S$, dus is $S \cap S^{-1}$ niet leeg. Als er een kring van lengte twee is dan kunnen we deze zo kiezen dat deze cykel in E^+ zit. Dan bestaan er $s_1, s_2 \in S$ zodat $(g, gs_1), (gs, gs_1s_2)$ een cykel is voor zekere g. Hieruit volgt dat $s_1s_2 = 1$, dus $S \cap S^{-1} \neq \emptyset$. Omgekeerd geldt dat als $S \cap S^{-1} \neq \emptyset$ er een cykel van lengte maximaal twee bestaat.

$\square$

3 De categorie van bomen

3.1 Bomen

Definitie 3.1. Een bos is een graaf zonder cykels.

Definitie 3.2. Een boom is een samenhangend bos.

Opmerking. Bomen (evenals bossen) vormen een volle deelcategorie van de categorie grafen.

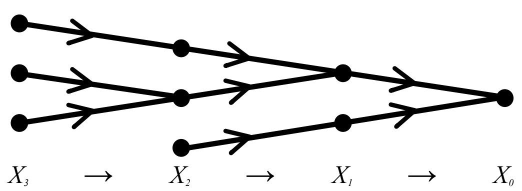
Lemma 3.3. *Tussen twee knopen in een boom Γ bestaat precies één pad zonder backtracking. Dit pad heet 'het pad' tussen deze twee knopen.*

Bewijs. Een boom Γ is samenhangend, dus is er tussen elk tweetal knopen ten minste een pad zonder backtracking. Stel er bestaan twee verschillende paden zonder backtracking tussen de knopen v_1 en v_2, namelijk $p_1 = (e_{11}, \dots, e_{1n})$ en $p_2 = (e_{21}, \dots, e_{2m})$. Omdat Γ een boom is kan een pad zonder backtracking niet tweemaal dezelfde knoop bevatten. Dus bestaat er een j minimaal zodanig dat $t(e_{1j}) \neq t(e_{2j})$, kies deze minimaal. Kies ook $k, l > j$ minimaal met $t(e_{1k}) = t(e_{2l})$, deze bestaan omdat er in ieder geval geldt dat $t(e_{1n}) = t(e_{2m})$. Beschouw nu het pad $(e_{1j}, \dots, e_{1k}, \overline{e_{2l}}, \dots, \overline{e_{2j}})$. Omdat we j minimaal hebben gekozen geldt dat $o(e_{1j}) = t(\overline{e_{2j}})$. Verder weten we dat voor geen enkel tweetal opeenvolgende takken in dit pad geldt dat $e_i = \overline{e_{i+1}}$. Dus hebben we een cykel gevonden in Γ, wat in tegenspraak is met het feit dat Γ een boom is. Dus tussen elk tweetal knopen in een boom Γ bestaat exact één pad zonder backtracking. $\square$

Zij Γ een boom en $V' \subset V$. Elke deelboom van Γ die V' bevat, bevat ook alle kortste paden met eindpunten in V'. Andersom vormen de takken en knopen van alle kortste paden met eindpunten in V' samen een deelboom $\Gamma' \subset \Gamma$. De boom Γ' wordt de boom voortgebracht door V' genoemd.

Een inverse systeem bestaat uit verzamelingen X_n voor $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ en afbeeldingen $f_n : X_n \to X_{n-1}$ voor $n \in \mathbf{Z}_{>0}$. Vanuit dit inverse systeem gaan we een graaf vormen. Neem $V = \bigcup_{i \geq 0} X_i$ en $E_+ = \bigcup_{i>0} X_i$ waarvoor geldt $o(e) = x$ en $t(e) = f(x)$. Merk op dat deze contructie een bos geeft. De geconstrueerde graaf is een boom dan en slechts dan als $\#X_0 = 1$.

Voorbeeld 3.4. Een inversesysteem dat een boom oplevert.



Het is ook mogelijk om voor een gegeven boom Γ een inverse systeem te creëren dat deze boom oplevert. Kies hiervoor een basispunt v_0 en neem $X_0 = \{v_0\}$. Voor $n \in \mathbf{N}$ nemen we: $X_n = \{v \in V \mid d(v, v_0) = n\}$. De functie f_n stuurt $x \in X_n$ naar zijn voorganger in het pad van v_0 naar x. Op deze manier geeft de contructie van een graaf uit de gevormde verzamelingen X_n en de functies f_n (na het weggooien van de oriëntatie) weer de boom Γ terug.

3.2 Eindknopen

De graad van een knoop v is $d(v) = \#\{e|\ t(e) = v\}$. Een knoop met graad nul heet geïsoleerd. Als een knoop graad maximaal 1 heeft noemen we deze een eindknoop. Met $\Gamma - v$ wordt de graaf bedoeld met verzameling knopen $V - v$ en verzameling takken $\{e \in E|\ o(e) \neq v \text{ en } t(e) \neq v\}$.

Lemma 3.5. *Laat $v \in V$ een niet geïsoleerde eindknoop zijn van de graaf Γ. Dan gelden de volgende beweringen:*

a *Γ is samenhangend $\Leftrightarrow$ $\Gamma - v$ is samenhangend.*

b *Elke cykel van Γ is bevat in $\Gamma - v$.*

c *Γ is een boom $\Leftrightarrow$ $\Gamma - v$ is een boom.*

Bewijs. Omdat v het eindpunt is van een unieke tak e volgt (a) onmiddellijk. Ook is het duidelijk dat elke knoop die in een kring zit het eindpunt is van ten minste twee takken en dus geen eindknoop is. Hieruit volgt (b). De laatste bewering volgt direct uit de eerste twee. □

Lemma 3.6. *Zij Γ een boom met eindige diameter n, dan geldt:*

a *De verzameling $t(\Gamma)$ van eindknopen van Γ is niet leeg.*

b *Als $n \geq 2$, dan is $V(\Gamma) - t(\Gamma)$ de knopenverzameling van een deelboom met diameter $n - 2$.*

c *Als $n = 0$, dan $\Gamma = P_0$ en als $n = 1$, dan $\Gamma = P_1$.*

Bewijs. Onderdeel c is direct duidelijk. Onderdeel a volgt uit onderdelen b en c. Het is dus voldoende om alleen onderdeel b te bewijzen.

Zij V' de verzameling knopen $V(\Gamma) - t(\Gamma)$ en neem $v_1, v_2 \in V'$. Geen enkele knoop op het pad tussen v_1 en v_2 is een eindknoop. Er volgt dus dat de deelboom Γ' voortgebracht door V' geen andere knopen bevat dan de elementen van V'. We weten dat een pad tussen v_1 en v_2 in Γ aan beide kanten met een tak kan worden uitgebreid. Als $d(v_1, v_2) = m$, geeft dit een pad van lengte $m + 2$. De diameter van Γ' is dus maximaal $n - 2$. Anderzijds bevat Γ een pad van lengte n, door de twee eindknopen van dit pad te verwijderen vinden we nu een pad van lengte $n - 2$ in Γ'. Dus de diameter van Γ' is $n - 2$. □

3.3 Maximaal opspannende bossen

De verzameling deelbossen van een graaf Γ geordend door inclusie is partieel geordend. Vanwege het Lemma van Zorn heeft deze verzameling een maximaal element. Een maximaal element heet een *maximaal opspanned bos* van Γ.

Opmerking. Een maximaal opspannend bos van een graaf Γ bevat alle knopen van Γ.

Aangezien het maximaal opspannend bos van een samenhangende graaf altijd een boom is spreken we in dat geval van een *maximaal opspannende boom*.

Propositie 3.7. *Zij Γ een graaf met een eindig aantal knopen, en definieer $k = \#V(\Gamma)$, $t = \frac{1}{2}\#E(\Gamma)$ en $c =$ het aantal componenten van Γ. Dan geldt: $t \geq k - c$. Hierbij geldt gelijkheid dan en slechts dan als Γ een bos is.*

Bewijs. Als Γ de lege graaf is dan geldt $k = t = c = 0$, dus geldt de gelijkheid.

Neem aan dat Γ een boom is. Aangezien bomen samenhangend zijn hebben we $c = 1$. Voor een boom met één knoop $(k = 1, t = 0)$ geldt $t = k - 1$. Stel nu dat de gelijkheid geldt voor alle bomen met $k < n$ knopen. Zij Γ een boom met n knopen. Als we van Γ één eindknoop v en het bijbehorende takkenpaar $\{e, \bar{e}\}$ verwijderen vinden we met inductie dat $t - 1 = k - 1 - 1$. Hieruit volgt dat voor een boom met n knopen geldt: $t = k - 1$. Dus voor alle bomen geldt $t = k - c$.

Zij Γ een bos dat de disjuncte vereniging is van bomen $\Gamma_i (i \in I)$. We weten dat voor alle Γ_i geldt $t_i = k_i - 1$. Voor het bos Γ hebben we $t = \sum_{i \in I} t_i$, $k = \sum_{i \in I} k_i$ en $c = \sum_{i \in I} c_i = \sum_{i \in I} 1$. Dus voor elk bos geldt dat $t = k - c$.

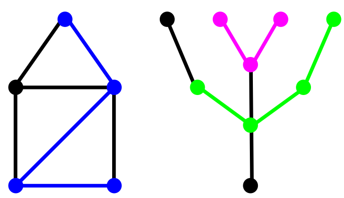
Neem nu Γ een willekeurige niet lege samenhangende graaf dat geen bos is en Γ' een maximaal opspannend bos van Γ. Omdat Γ' alle knopen van Γ bevat weten we dat $k' = k$, ook is het aantal componenten van Γ en Γ' gelijk. Omdat Γ geen bos is geldt: $t' < t$. We weten nu dat $t = k - c + t - t'$, waaruit volgt dat $t > k - c$. □

3.4 Samentrekken van deelbomen

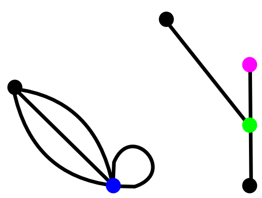
Zij Γ een graaf en Λ een deelbos van Γ dat de disjuncte vereniging is van bomen $\Lambda_i (i \in I)$. Definieer nu de graaf Γ/Λ door elke deelboom Λ_i te identificeren met een knoop. De verzameling knopen van Γ/Λ is het quotiënt van $V(\Gamma)$ met de equivalentierelatie die als equivalentieklassen de verzamelingen $V(\Lambda_i)$ en de elementen van $V(\Gamma)$-$V(\Lambda)$ heeft. De verzameling takken van Γ/Λ bestaat uit de elementen van $E(\Gamma) - E(\Lambda)$, met de omkering $e \to \bar{e}$ geïnduceerd door de omkering op $E(\Gamma)$. De functies $o(e)$ en $t(e)$ op de takken van de graaf Γ/Λ worden gegeven door de functies o en e van de graaf Γ waarbij de quotiënten gevolgd worden.

Merk op dat het samentrekken van deelbossen geen graafmorfisme is omdat er takken zijn die op knopen worden afgebeeld.

Voorbeeld 3.8.



Graaf Γ met een gekleurd deelbos Λ



De graaf Γ/Λ

Stelling 3.9. *Zij Γ een niet lege graaf en $\Lambda \subset \Gamma$ een deelbos. Dan geldt: Γ is een bos dan en slechts dan als Γ/Λ een bos is.*

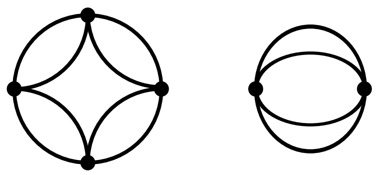
Bewijs. Bij het samentrekken van het deelbos Λ worden k_Λ knopen en t_Λ takken verwijderd en komen daar c_Λ knopen voor in de plaats. Omdat Λ een bos is geldt $t_\Lambda = k_\Lambda - c_\Lambda$. Voor de graaf Γ/Λ geldt nu dus $t = t_\Gamma - k_\Lambda + c_\Lambda$, $k = k_\Gamma - k_\Lambda + c_\Lambda$ en $c = c_\Gamma = c_\Lambda$. We weten dus dat Γ/Λ een bos is dan en slechts dan als geldt dat: $t_\Gamma - k_\Lambda + c_\Lambda = k_\Gamma - k_\Lambda + c_\Lambda - c$ links en rechts gelijke termen wegstrepen geeft: $t_\Gamma = k_\Gamma - c_\Gamma$, dus Γ is een bos. We kunnen nu concluderen dat Γ een bos is dan en slechts dan als Γ/Λ een bos is. $\square$

4 Bomen en vrije groepen

4.1 Boom van representanten

Definitie 4.1. Zij G een groep die zonder inversie werkt op een boom $\Gamma = (V, E)$. De *quotiëntgraaf* $G \setminus \Gamma$ is de graaf met knopenverzameling de quotiëntverzameling $G \setminus V$ en als takkenverzameling de quotiëntverzameling $G \setminus E$. Hierbij volgt de keuze van $o(e)$ en $t(e)$ op natuurlijke wijze.

Voorbeeld 4.2. De groep C_2 werkt op natuurlijke wijze op de graaf Γ hieronder door draaien over een hoek van 180 graden. De graaf ernaast geeft de graaf $C_2 \setminus \Gamma$ weer.



Γ $\qquad\qquad$ $C_2 \setminus \Gamma$

Propositie 4.3. *Zij Γ een samenhangende graaf waarop een groep G werkt zonder inversie. Elke deelboom T' van de quotiëntgraaf $G \setminus \Gamma$ lift naar een deelboom T van Γ.*

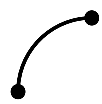
Bewijs. Kies een deelboom T' van de quotiëntgraaf $G \setminus \Gamma$ vast en neem Ω de verzameling van deelbomen van Γ die injectief afbeelden in T'. Deze vormen een partieel geordende verzameling onder inclusie. Kies nu T_0 een maximaal element van Ω, en neem T_0' het beeld van T_0 in T'. We gaan laten zien dat geldt: $T_0' = T'$

Stel dit is niet het geval. Dan bestaat er een tak $e' \in T'$ met $e' \notin T_0'$. Omdat T' samenhangend is, is het mogelijk om e' zo kiezen dat $o(e')$ een knoop is in T_0'. Er geldt nu dat $t(e')$ niet in T_0' zit, anders zou het pad van $t(e')$ naar $o(e')$ gecombineerd met de tak e' een cykel zijn. Wat in tegenspraak is met het feit dat T_0' een boom is.

Laat nu e een lift zijn van e'. Omdat $o(e')$ lift naar een knoop van T_0' kunnen we deze lift e zo kiezen dat $o(e)$ een knoop is in T_0. Zij nu T_1 de graaf verkregen door aan T_0 de knoop $t(e)$ en de takken e en $\bar{e}$ toe te voegen. Volgens lemma 3.5 is T_1 nu een boom. Maar $T_1 \Rightarrow T'$ is injectief, en dat is in tegenspraak met de maximaliteit van T_0. Er geldt dus $T_0' = T'$, waaruit volgt dat elke boom T' in $G \setminus \Gamma$ lift naar een boom in Γ. $\square$

Een *boom van representanten* van $\Gamma \mod G$ is een deelboom T van Γ die de lift is van een maximale boom in $G \setminus \Gamma$. Omdat een maximaal opspannende boom van een samenhangende graaf alle knopen bevat, volgt dat T precies één knoop bevat uit elke baan van G in $V(\Gamma)$.

Voorbeeld 4.4. De boom rechts is een boom van representanten van de graaf uit het vorige voorbeeld.



4.2 De graaf van een vrije groep

Stelling 4.5. *Zij G een groep, $S \subset G$ en $X = \Gamma(G, S)$.*
De volgende twee uitspraken zijn nu equivalent:

(i) *X is een boom.*

(ii) *G is een vrije groep met basis S.*

Bewijs. **(ii) $\Rightarrow$ (i)** Zij G een vrije groep met basis S. We kunnen nu elk element uniek schrijven als: $g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$, met $s_i \in S, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ en $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ als $s_i = s_{i+1}$ [Ser, I.1.2]. Het getal n heet de lengte van g en wordt genoteerd met $l(g) = n$.

Neem nu $G_n = \{g \in G | l(g) = n\}$ voor alle $n \in \mathbf{Z}_{>0}$. Het is duidelijk dat elke $g \in G_n$ in X grenst aan precies een element van G_{n-1}, namelijk het element $s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$. Neem nu de afbeeldingen $f_n : G_n \to G_{n-1}, s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \mapsto s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$. Deze vormen het inverse systeem:

$$\cdots \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 = 1.$$

Na het weggooien van de oriëntatie is de boom verkregen uit dit inverse systeem gelijk aan X, waaruit volgt dat X een boom is.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Zij X een boom, omdat X samenhangend is volgt uit propositie 2.6 dat S een voortbrengende deelverzameling is van G. Verder volgt vanwege de normaliteit van X dat $S \cap S^{-1} = \emptyset$.

We gaan nu laten zien dat $G = F(S)$. Stel dit is niet zo, dan bestaat er een $\hat{g} \neq 1 \in F(S)$ met 1 als beeld in G. Kies een $\hat{g}$ met minimale lengte n en laat $\hat{g} = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$ zijn gereduceerde vorm zijn in $F(S)$. Omdat $S \cap S^{-1} = \emptyset$ weten we dat n minimaal 3 moet zijn. Laat nu P_i $(0 \leq i \leq n)$ het beeld zijn van $s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_i^{\varepsilon_i}$ in X. Omdat n minimaal is weten we dat de knopen $P_0, \ldots, P_{n-1}$ allemaal verschillend zijn. Merk verder op dat P_i en P_{i+1} aan elkaar grenzen in X en dat $P_0 = P_n = 1$. Dit geeft een cykel van lengte n in de graaf X. Maar dat is in tegenspraak met het feit dat X een boom is. Dus volgt: $G = F(S)$. $\square$

4.3 Vrije acties op een boom

Stelling 4.6. *Een groep G werkt vrij op een boom dan en slechts dan als G een vrije groep is.*

Dat elke vrije groep vrij werkt op een boom volgt uit stelling 4.5. Van het bewijs de andere kant op zal ik een schets geven van het bewijs van J.P. Serre [Ser, I.3.4′.a].

Stelling 4.7. *Zij G een groep die vrij werkt op een boom $\Gamma = (V, E)$. Kies een orriëntatie $E_+ \subset E$ die bewaard blijft onder de werking van G en noem de verkregen georriënteerde graaf Γ_+. Beschouw nu de graaf $\Lambda = G \setminus \Gamma_+$ en kies een maximaal opspannende boom T van Λ. Neem T' een lift van T in Γ_+. Nu geldt:*

De verzameling S van elementen $g \neq 1 \in G$ waarvoor er een tak $e \in E_+$ is met $o(e) \in T'$ en $t(e) \in g \circ T'$ vormt een basis voor G.

Bewijsschets. Merk op dat de deelbomen gT' voor $g \in G$ disjunct zijn. Stel dit geldt niet. Dan bestaan er knopen $v_1, v_2 \in V(T)$ en elementen $g_1 \neq g_2 \in G$ zodat $g_1 v_1 = g_2 v_2$. Dit betekent dat v_1 en v_2 in dezelfde equivalentieklasse modulo G zitten en dus dat $v_1 = v_2$. Hieruit volgt dat $g_1 = g_2$ wat een tegenspraak oplevert. De vereniging $\bigcup_{g \in G} gT$ bevat alle knopen van Γ en is dus een maximaal opspannend deelbos. Het samentrekken van dit deelbos levert wegens stelling 3.9 een boom X op.

In zijn bewijs laat Serre zien dat de boom X isomorf is met de graaf $\Gamma(G, S)$ waarbij S is gekozen als in de stelling.

Vanwege stelling 4.5 kunnen we nu concluderen dat G een vrije groep is met basis S. $\square$

Aan de hand van dit bewijs van Serre kunnen we nu ook wat zeggen over het aantal voortbrengers van G.

Stelling 4.8. *Zij G, Γ, Λ, T en S als in stelling 4.7. Als Λ eindig is dan geldt: $\#S = t_\Lambda - k_\Lambda + 1$.*

Bewijs. Voor elke tak $e \in E(\Lambda)$ met $e \notin E(T)$ bestaat er een lift met $o(e) \in T$ en $t(e) \notin T$. Omdat $\bigcup_{g \in G} gT$ alle knopen van Γ bevat en alle gT paargewijs disjunct zijn bestaat er dus een unieke $s \in S$ zodanig dat $t(e) \in sT$. Omgekeerd zal voor elke $s \in S$ de bijbehorende tak in de quotiëntgraaf op een tak buiten T terecht komen. Dus het aantal elementen van S is gelijk aan het aantal elementen van $\{e \in E(\Lambda) \text{ met } e \notin E(T)\}$, dit is $t_\Lambda - t_T = t_\Lambda - k_\Lambda + 1$. Hieruit volgt dat $\#S = t_\Lambda - k_\Lambda + 1$. $\square$

5 Toepassingen

5.1 Schreiers Stelling

Stelling 5.1. *Elke ondergroep van een vrije groep is vrij.*

Bewijs. Zij G een vrije groep en H een ondergroep van G. Wegens stelling 4.5 is het mogelijk een boom Γ te maken waarop G vrij werkt. Het is direct duidelijk dat H vrij werkt op de boom Γ. Dus vanwege stelling 4.7 is de ondergroep H vrij. $\square$

Zij G een vrije groep , de cardinaliteit van een basis van G is onafhankelijk van de gekozen basis. Dit noemen we de rang r_G van G.

Lemma 5.2. *Zij G een groep en $H \subset G$ een ondergroep van eindige index n. Dan geldt:*

$$r_H - 1 = n(r_G - 1).$$

Bewijs. Neem $G_1 = G$ en $G_2 = H$ en laat Γ een boom zijn waarop G vrij werkt. Zij $\Gamma_i = G_i \setminus \Gamma$, $k_i = \#V(\Gamma_i)$ en $t_i = \frac{1}{2}\#E(\Gamma_i)$ voor $i \in \{1, 2\}$. Er geldt nu $k_2 = nk_1$ en $t_2 = nt_1$. Kies Γ zo dat k_1 eindig is, neem bijvoorbeeld $\Gamma = \Gamma(G, S)$, deze geeft k_1=1. Gebruik makend van de formule $r_{G_i} - 1 = t_i - k_i$ $(i = 1, 2)$ uit 4.8 volgt nu:

$$r_H - 1 = t_2 - k_2 = n(t_1 - k_1) = n(r_G - 1).$$ $\square$

5.2 Basis van een ondergroep

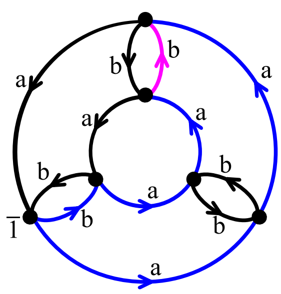
Propositie 5.3. *Zij G een vrije groep met basis S, en $H \subset G$ een ondergroep. Neem $\Lambda = H \setminus \Gamma(G, S)$ en T een maximaal opspannende boom van Λ. Beschouw de paden P_i in Λ zonder backtracking van $\bar{1}$ naar $\bar{1}$ die exact één tak buiten T bevatten. Lift deze paden naar P_i' in Γ zodat $o(P_i') = 1$. Dan is de verzameling $R = \{t(P_i)\} \subset G$ een voortbrengende verzameling van H.*

Bewijs. Omdat $t(T_i) = \bar{1}$ in Λ weten we dat $r_i \in H$ voor alle i. Beschouw nu de boom T' een lift van T in Γ zodat $1 \in T$. Er geldt nu dus dat: $o(P_i') = 1 \in T'$ en $t(P_i') = r_i \in r_i T'$. Omdat P_i maar een tak bevat die niet in T zit , bevat P_i' exact een tak die niet in een lift van T zit. Dus volgt dat er een tak bestaat die T' met rT' verbindt. Uit stelling 4.7 volgt nu dat de r_i een basis van H vormen. $\square$

Opmerking. De verkregen basis voor H is afhankelijk van de gekozen opspannende boom van Λ.

Voorbeeld 5.4. Zij $G = F(a, b)$ de vrije groep met als voortbrengende verzameling $S = \{a, b\}$ en H de kern van de projectie $G \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Vanwege lemma 5.2 geldt er $r_H = 1 + 6(r_G - 1) = 7$.

We beschouwen nu zoals in stelling 5.3 de graaf $\Lambda = H \setminus \Gamma(G, S)$ met opspannende boom T (blauw). We kiezen een boom van representanten T' zo dat deze de knopen $\{1, a, a^2, b, ba, ba^2\}$ bevat.



Beschouw nu het pad P van $\bar{1}$ naar $\bar{1}$ dat de roze tak bevat. Dit pad lift naar het pad $P' = \big((1,b), (b,ba), (ba,ba^2), (ba^2,ba^2b), (ba^2b,ba^2ba^{-1}), (ba^2ba^{-1}, ba^2ba^{-2})\big)$.

Doen we hetzelfde voor de andere takken in Λ buiten T dan vinden we de basis: $\{b^2, aba^{-1}b^{-1}, a^2ba^{-2}b^{-1}, a^3, baba^{-1}, ba^2ba^{-2}, ba^3b^{-1}\}$.

5.3 Ondergroepen van gegeven index

Aan de hand van de quotientgraaf $H \setminus \Gamma(G,S)$ kunnen we zien welke voortbrengers de groep heeft. We kunnen dus door alle mogelijke quotientgrafen die een ondergroep van de gegeven index geven te beschouwen nagaan hoeveel ondergroepen er van deze index zijn.

Voorbeeld 5.5. Ondergroepen $H \subset G = F(a,b)$ van index 3.

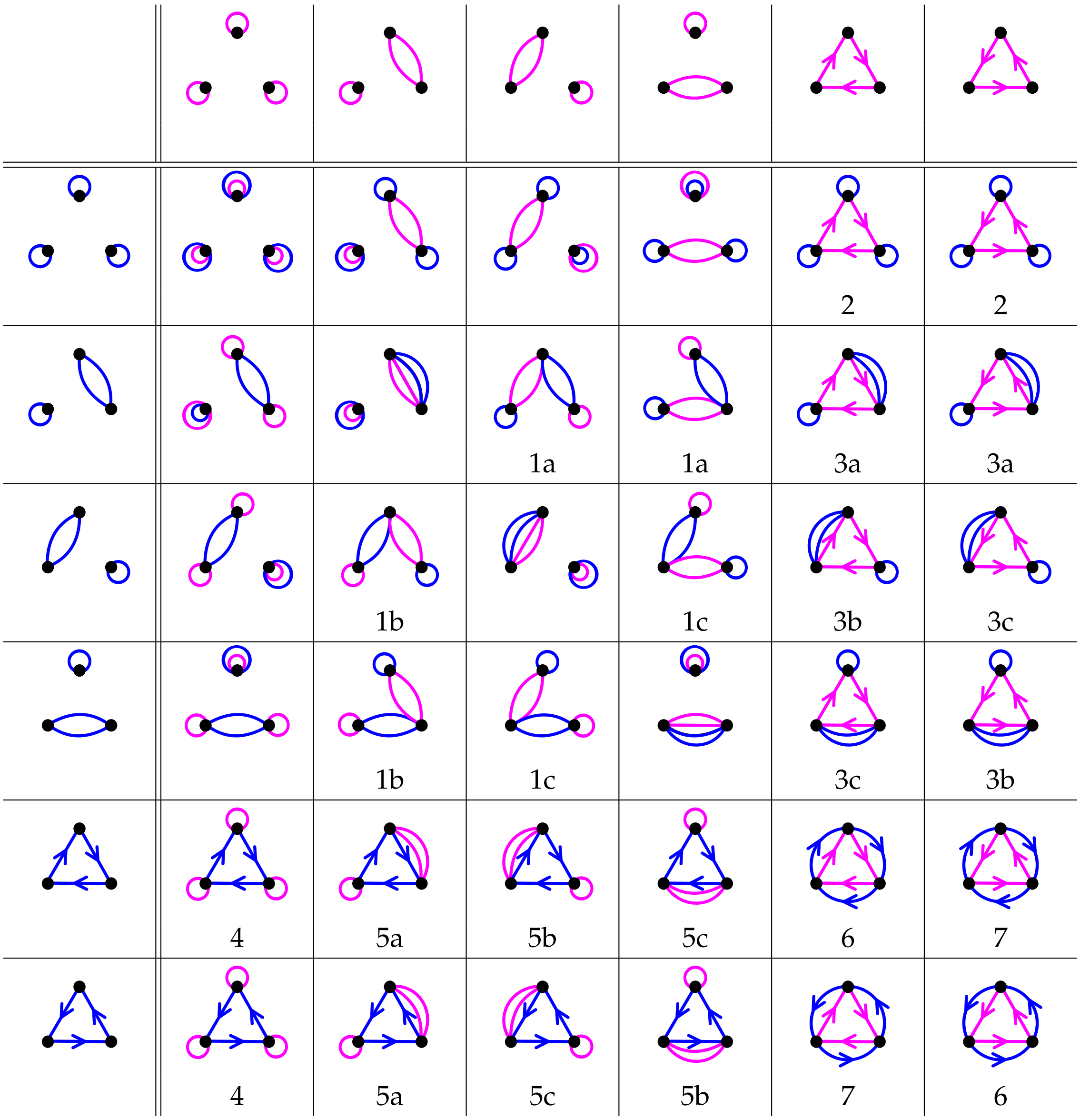
We weten dat de quotiëntgraaf $H \setminus \Gamma(G, \{a,b\})$ 3 knopen bevat. En dat alle ondergroepen H vrij zijn op 4 voortbrengers.

Omdat alle takken in G van de vorm (g,gs) voor $s \in \{a,b\}$, kunnen we de quotiëntgraaf achterhalen door voor a en b apart te bekijken waar de takken van de vorm (g,gs) in de quotiëntgraaf worden afgebeeld. Dit zijn precies de permutaties die elementen van de S_3 op de knopen van de quotiëntgraaf kunnen uitvoeren. Deze zijn gecombineerd in de tabel op de volgende pagina. Bij de grafen in deze tabel zit de knoop van restklasse $\bar{1}$ linksonder. Daar waar de oriëntatie van de takken duidelijk is (omdat er een kring is of twee takken in tegengestelde richting lopen) zijn de pijlen weggelaten.

De niet samenhangende grafen leveren geen ondergroepen van index 3 op, deze worden dus buiten beschouwing gelaten. Alle andere ondergroepen komen in tweetallen voor, waarbij de een verkregen wordt uit de ander door de twee knopen ongelijk aan $\bar{1}$ te verwisselen. Dit levert dus 13 verschillende ondergroepen op.

Twee ondergroepen H_1, H_2 zijn geconjungeerd in G als de georrieënteerde gekleurde quotientgrafen $\Lambda_1 = H_1 \setminus \Gamma(G,S)$ en $\Lambda_2 = H_2 \setminus \Gamma(G,S)$ isomorf zijn. Laat $f : \Lambda_1 \to \Lambda_2$, $\bar{1} \mapsto \bar{g}$ het graafisomorfisme zijn. Omdat de kleuring en orriëntatie van de takken behouden blijft, bewaart dit isomorfisme G-acties . Dus $H_1 = \mathrm{stab}_G(\bar{1}) = \mathrm{stab}_G(\bar{g}) = gH_2g^{-1}$. Dus de ondergroepen H_1 en H_2 zijn geconjungeerd in G. Andersom weten we dat als $H_1 = gH_2g^{-1}$ de functie $f : \Lambda_1 \to \Lambda_2$, $\bar{1} \mapsto \bar{g}$ een graafisomorfisme is dat G-acties bewaart. De grafen Λ_1 en Λ_2 zijn dus isomorf met behoud van kleur en orriëntatie. Het is nu direct duidelijk dat er op conjugatie na 7 ondergroepen $H \subset \Gamma(G,S)$ zijn.

We kunnen ook voor al deze ondergroepen makkelijk een basis geven. Kiezen we bijvoorbeeld voor 5b de opspannende boom bestaande uit de takken $(\bar{1}, \bar{a})$ en $(\bar{a}, \bar{a}^2)$, dan vinden we de voortbrengers: $\{a^3, a^2ba^{-2}, ab, ba^-1\}$.


2 2
1a 1a 3a 3a
1b 1c 3b 3c
1b 1c 3c 3b
4 5a 5b 5c 6 7
4 5a 5c 5b 7 6

Referenties

[Lan] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Science + Business Media LLC, New York, revised third edition, 2002.

[OR] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. Otto Schreier. MacTutor History of Mathematics archive, December 1996. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Schreier.html.

[Sch] Otto Schreier. Die Untergruppen der freien Gruppen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*.

[Ser] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation.