T. Weerwag

Integreerbare functies met waarden in ruimtes van continue functies

Bachelorscriptie, 25 juli 2013

Scriptiebegeleider: dr. O.W. van Gaans

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

§1 Inleiding

In deze scriptie onderzoeken we integralen van functies met waarden in een Banachruimte, specifiek met waarden in ruimtes van continue functies. De twee belangrijkste integralen van deze soort zijn de Pettis- en Dunfordintegraal. We vragen ons af of we in het algemeen een functie met waarden in een ruimte van continue functies kunnen construeren die niet Pettis-, maar wel Dunfordintegreerbaar is.
In §2 bekijken we in het algemeen hoe we functies met waarden in een Banachruimte kunnen integreren. Daarna wordt in §3 een voorbeeld gepresenteerd van een functie die niet Pettisintegreerbaar is. Voordat we de hoofdstelling in §6 kunnen behandelen, moeten we eerst wat gereedschap ontwikkelen. In §4 werken we naar een handige representatiestelling van Riesz toe en in §5 bekijken we de nodige topologische voorkennis.

§2 Integralen van functies met waarden in een Banachruimte

Vaak zijn we geïnteresseerd in de integraal van een functie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Vaak is ook de bekende Riemannintegraal voldoende. Voor sommige functies hebben we een krachtiger middel nodig en gebruiken we de Lebesgueintegraal. Met deze integraal kunnen we het domein van de functie ook meteen veralgemeniseren naar een maatruimte. We gaan nu kijken hoe we ook het codomein kunnen veralgemeniseren.
Zij $(X, \|\cdot\|)$ een Banachruimte over $\mathbf{R}$ en $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. We gaan functies $f : \Omega \to X$ bekijken en proberen te integreren. De manier waarop we de Lebesgueintegraal construeren, met simpele functies, meetbare functies die een eindige hoeveelheid verschillende waardes aannemen, kunnen we ook nu gebruiken. Dit is de aanpak die Bochner[3] koos en de resulterende integraal is naar hem vernoemd.
Een andere manier is om naar de duale ruimte van X te kijken. Door functionalen in $x' \in X'$ samen te stellen met f krijgen we functies $x' \circ f : \Omega \to \mathbf{R}$. Van deze functies weten we al hoe we ze kunnen integreren en voorkomen we dat we het wiel opnieuw uitvinden. Echter, de integraal van een $x' \circ f$ (als deze bestaat) geeft een element in $\mathbf{R}$, terwijl we een element in X willen. Het is dus nog steeds niet recht-toe-recht-aan om via deze weg een definitie te geven. Deze aanpak werd overigens gekozen door Gelfand[5] en Pettis[6] en ook wij zullen hem gebruiken.
Ter illustratie van de voorgenoemde problemen met de Bochnerintegraal zullen we hem eerst schetsen.

Definitie 1. Een functie $f : \Omega \to X$ heet *simpel* als er $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ en $x_1, ..., x_n \in X$ bestaan zodanig dat $\mu(A_k) < \infty$ voor alle $1 \leq k \leq n$ en

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}(\omega)\, x_k \qquad \text{voor alle } \omega \in \Omega. \tag{1}$$

Hier is $\mathbb{1}_{A_k}$ de indicatorfunctie van A_k, oftewel $\mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 1$ als $\omega \in A_k$ en in alle andere gevallen 0. Het is duidelijk dat f slechts een eindig aantal verschillende waardes aanneemt als zij simpel is.
We definiëren de Bochnerintegraal van een simpele functie $f : \Omega \to X$ als

$$\int f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) x_k$$

met A_k en x_k als in (1). De oplettende lezer merkt nu op dat er verschillende ontbindingen mogelijk zijn. Het blijkt echter dat de waarde van de integraal niet afhankelijk is van de keuze van de A_k en x_k, maar aangezien dit te ver van het doel van deze scriptie afwijkt, wordt het bewijs hier niet gegeven.

Definitie 2. Een functie $f : \Omega \to X$ heet *sterk meetbaar* als er een rijtje simpele functies (f_n) bestaat, zodanig dat $f_n \to f$ μ-bijna overal.

Definitie 3. Een sterk meetbare functie $f : \Omega \to X$ heet *Bochnerintegreerbaar* als er een rijtje simpele functies (f_n) bestaat, zodanig dat $\int \|f(\omega) - f_n(\omega)\| \, \mu(d\omega) \to 0$. We noemen $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$ de *Bochnerintegraal* van f.

Voor een bewijs dat deze limiet bestaat als f Bochnerintegreerbaar is en voor verdere uitwerking van eigenschappen, zie bijvoorbeeld [3].
Het zal in ieder geval nu duidelijk zijn dat we veel werk dat we al hebben gedaan voor de Lebesgueintegraal opnieuw moeten uitvoeren met net iets andere voorwaarden en functies. Ons doel is om juist voort te borduren op de al bestaande Lebesgueintegraal. Het zal blijken dat deze aanpak zelfs iets algemener is dan de Bochnerintegraal. Zoals eerder gezegd, bekijken we nu niet een functie $f : \Omega \to X$ direct, maar bekijken we haar samengestelde met een functionaal in X'.

Definitie 4. Een functie $f : \Omega \to X$ heet *zwak meetbaar* als voor alle $x' \in X'$ de samenstelling $x' \circ f$ meetbaar is.

Voordat we de Pettis- en Dunfordintegralen zelf definiëren, voeren we voor het gemak een zwakkere definitie in.

Definitie 5. Een zwak meetbare functie $f : \Omega \to X$ heet *zwak integreerbaar* als voor alle $x' \in X'$ de Lebesgueintegraal

$$\int x' \circ f \, d\mu$$

bestaat en eindig is.

Merk op dat dit een erg algemene definitie is. Gelukkig is deze eis wel vaak gemakkelijk na te gaan. Zij $f : \Omega \to X$ zwak meetbaar zodanig dat $\int \|f(\omega)\| \, \mu(d\omega) < \infty$, dan geldt

$$\left| \int x' \circ f \, d\mu \right| \leq \int \|x'\| \cdot \|f(\omega)\| \, \mu(d\omega) = \|x'\| \int \|f(\omega)\| \, \mu(d\omega) < \infty$$

voor alle $x' \in X'$. Dus ook $\int x' \circ f \, d\mu < \infty$.

Definitie 6. Een functie $f : \Omega \to X$ heet *Pettisintegreerbaar* als deze zwak integreerbaar is en er een $x \in X$ bestaat zodanig dat voor alle $x' \in X'$ geldt

$$x'(x) = \int x' \circ f \, d\mu.$$

We noemen x dan een *Pettisintegraal* van f.

We schrijven hier expliciet *een* Pettisintegraal, omdat er a priori geen garantie is dat er niet meerdere verschillende waardes zijn die aan de definitie voldoen. Het bewijs hiervan is tamelijk eenvoudig, maar vanwege het belang stellen we de uniciteit toch als een propositie.

Propositie 7. *De Pettisintegraal van een functie $f : \Omega \to X$ is uniek.*

Bewijs. Stel $x, y \in X$ zijn beide Pettisintegralen van f. Zij $x' \in X'$ willekeurig, dan geldt wegens de definitie $x'(x) = \int x' \circ f \, d\mu = x'(y)$. Uit de lineariteit van x' volgt dan $x'(x - y) = 0$, dus ook $x - y = 0$. We concluderen $x = y$. □

Voorbeeld 8. Zij $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ een willekeurige maatruimte en $f : \Omega \to \mathbf{R}$ een meetbare en integreerbare functie. Beschouw we $\mathbf{R}$ als Banachruimte met de absolute waarde als norm en merk op dat lineaire functionalen $\phi \in \mathbf{R}'$ altijd te schrijven zijn als $\phi(x) = \alpha x$ voor een $\alpha \in \mathbf{R}$. Hieruit volgt $|\phi(x)| = |\alpha| \cdot |x|$ voor alle $x \in \mathbf{R}$ en dus direct $\|\phi\| = |\alpha|$. Het is duidelijk dat αf zowel zwak meetbaar als zwak integreerbaar is. Verder geldt

$$\int \phi \circ f \, d\mu = \int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu = \phi\left(\int f \, d\mu \right)$$

voor alle $\phi \in \mathbf{R}'$, dus $\int f \, d\mu$ is ook de Pettisintegraal van f. De Pettisintegraal veralgemeniseert dus inderdaad de Lebesgueintegraal.

We kunnen de Pettisintegraal nog net iets algemener maken door op zoek te gaan naar een element in de dubbele duale, X'', in plaats van in X. Dit geeft aanleiding tot de Dunfordintegraal.

Definitie 9. Een functie $f : \Omega \to X$ heet *Dunfordintegreerbaar* als deze zwak integreerbaar is en er een $x'' \in X''$ bestaat zodanig dat voor alle $x' \in X'$ geldt

$$x''(x') = \int x' \circ f \, d\mu.$$

We noemen x'' dan een *Dunfordintegraal* van f.

Merk op dat deze definitie direct een voorschrift voor een functie $x'' : X' \to \mathbf{R}$ geeft. De Dunfordintegraal is dus ook *uniek*. Verder eisen we alleen dat x'' begrensd is (want dan geldt $x'' \in X''$). In de volgende stelling zien we dat deze laatste eis volgt uit de zwak-integreerbaarheid van f.

Stelling 10. *Zij $f : \Omega \to X$ zwak integreerbaar, dan is f ook Dunfordintegreerbaar.*

Bewijs. De definitie van de Dunfordintegraal geeft ons maar één kandidaat x''. Aangezien f zwak integreerbaar is, is x'' overal gedefinieerd. De enige vraag die overblijft is of x'' continu is.
We bewijzen dit met de geslotengrafiekstelling [9, p. 115] voor de operator $T : X' \to L_1(\mu)$ gedefinieerd als $x' \mapsto x' \circ f$. Hier is $L_1(\mu)$ de ruimte van integreerbare functies is met norm $\int |\cdot| \, d\mu$. Stel (x'_n) is een rijtje in X' dat in norm convergeert naar een $x' \in X'$, en stel dat het rijtje (Tx'_n) convergeert naar een $g \in L_1(\mu)$.
We merken als eerste op dat $Tx'_n \to Tx'$ μ-bijna overal. Om dat te zien, kies een $\omega \in \Omega$, dan geldt

$$\left|x'_n(f(\omega)) - x'(f(\omega))\right| = \left|(x'_n - x')(f(\omega))\right| \leq \left\|x'_n - x'\right\| \cdot \|f(\omega)\| \to 0 \cdot \|f(\omega)\| = 0.$$

Vervolgens gebruiken we een convergentiestelling uit de integratietheorie [2, p. 84] die zegt dat voor elk rijtje (f_n) in $L_1(\mu)$ dat convergeert naar een $g \in L_1(\mu)$ er een deelrijtje van (f_n) bestaat dat μ-bijna overal convergeert naar g. Passen we dat toe in ons geval, dan convergeert een deelrijtje van (Tx'_n) μ-bijna overal naar g. Echter, we zagen net al dat het rijtje (Tx'_n) μ-bijna overal convergeert naar Tx'.
Er volgt dat $g = Tx'$ en dus dat de grafiek van T gesloten is. Samen met de geslotengrafiekstelling geeft dit dat T continu is. Het integreren op zich is ook een continue afbeelding, dus x'' is continu. □

Als laatste geven we nog een aantal proposities en stellingen die het verband tussen bovenstaande definities weergeven.

Propositie 11. *Zij X een reflexieve Banachruimte en $f : \Omega \to X$ Dunfordintegreerbaar, dan is f ook Pettisintegreerbaar.*

Bewijs. Aangezien X reflexief is, bestaat er een surjectieve isometrie $J : X \to X''$ gegeven door $(Jx)(x') = x'(x)$ voor $x \in X$ en $x' \in X'$. Stel dat x'' de

Dunfordintegraal is van f, dan is $J^{-1}x''$ de Pettisintegraal van f. Dit is te zien door de definitie van J te gebruiken:

$$x'(J^{-1}x'') = (JJ^{-1}x'')(x') = x''(x') = \int x' \circ f \, d\mu$$

voor alle $x' \in X'$. Dus f is Pettisintegreerbaar. $\square$

§3 Een niet-Pettisintegreerbare functie

We nemen als maatruimte $\mathbf{N}$ met de gebruikelijke telmaat en als Banachruimte $C([0,2])$ – de ruimte van continue functies op het gesloten interval $[0,2]$ – met de supremumnorm $\|\cdot\|_\infty$.

Merk op dat de integraal in de definitie van de Pettisintegraal (Definitie 6) verandert in een reeks. Een functie $f : \mathbf{N} \to C([0,2])$ is dus Pettisintegreerbaar als er een $x \in C([0,2])$ bestaat, zodanig dat voor alle $x' \in C([0,2])'$ geldt

$$x'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x'(f(n)).$$

In ons voorbeeld gebruiken we het rijtje functies

$$g_n(s) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq s < 1, \\ n(s-1) & \text{als } 1 \leq s < \frac{1}{n} + 1, \\ 1 & \text{als } \frac{1}{n} + 1 \leq s \leq 2. \end{cases}$$

De puntsgewijze limiet van dit rijtje geven we aan met g_∞. Het is duidelijk te zien dat deze limiet gegeven is door

$$g_\infty(s) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq s < 1, \\ 1 & \text{als } 1 \leq s \leq 2. \end{cases}$$

Verder definiëren we f_n als

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1, \\ f_{n+1} &= g_{n+1} - g_n \qquad \text{voor } n > 1. \end{aligned}$$

Dit geeft ons de handige eigenschap $\sum_{n=1}^{N} f_n = g_N$. De functie $f : \mathbf{N} \to C([0,2])$ zelf wordt gegeven door $f(n) = f_n$.

Om te laten zien dat f niet Pettisintegreerbaar is bekijken we de puntevaluaties op $C([0,2])$. Met ϕ_s duiden we de puntevaluatie in een punt $s \in [0,2]$ aan; voor een $x \in C([0,2])$ is ϕ_s dus gegeven door $\phi_s(x) = x(s)$. Merk op:

$$|\phi_s(x)| = |x(s)| \leq \sup_{s' \in [0,2]} |x(s')| = \|x\|_\infty .$$

Met andere woorden, ϕ_s is begrensd en dus $\phi_s \in C([0,2])'$.
Stel dat f wel Pettisintegreerbaar is, dan is er een $x \in C([0,2])$ zodat voor alle puntevaluaties ϕ_s met $s \in [0,2]$ geldt

$$\phi_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_s(f(n)),$$

oftewel

$$x(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s). \tag{2}$$

We hadden f_n zodanig geconstrueerd dat $\sum_{n=1}^{N} f_n = g_N$ geldt. Nemen we de limiet van $N \to \infty$, dan krijgen we ook $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = g_\infty$. Dit invullen in (2) levert op:

$$x(s) = g_\infty(s).$$

Aangezien dit voor alle $s \in [0,2]$ geldt, moet x dus gelijk zijn aan g_∞. Echter, g_∞ is niet continu en dus $x \notin C([0,2])$. Tegenspraak.

§4 Riesz' representatiestelling

Tijdens het werken met de Pettis- en Dunfordintegralen van een functie $f : \Omega \to X$ is het handig om te weten hoe de functionalen in X' eruit zien. Soms is de duale isomorf met een andere bekende ruimte, en kunnen we elementen in de duale dus representeren met elementen in een bekende ruimte. Voor een flink aantal Banachruimtes is dit over de jaren heen uitgewerkt. We gaan ons hier op de duale van ruimtes van continue functies richten aangezien waar daar ook mee aan het werk gaan later in deze scriptie. Het resultaat is (één van) de representatiestelling van Riesz.
Voor het resultaat hebben we een klein beetje voorkennis nodig over eindige getekende maten. Over het algemeen zijn getekende maten lastiger om mee te werken dan hun niet-negatieve tegenhangers. Waar bij positieve[1] maten alleen de lastige situatie $\infty - \infty$ zich kan voordoen, kunnen we bij getekende maten ook $\infty + (-\infty)$ en alle andere varianten krijgen. We kunnen dus, in tegenstelling tot positieve maten, niet eens meer zonder meer optellen.

[1] Normale, niet-negatieve maten worden vaak positief genoemd, alhoewel dit strikt genomen niet correct is.

Gelukkig zijn we voor de resultaten hier alleen geïnteresseerd in eindige getekende maten. We hoeven dus geen rekening te houden met oneindigheden.

Definitie 12. Zij $\mathcal{A}$ een σ-algebra over een verzameling Ω. Een functie $\mu : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ heet een *eindige getekende maat* als zowel

$$\mu(\emptyset) = 0$$

geldt en voor elk rijtje (A_n) van paarsgewijs disjuncte verzamelingen in $\mathcal{A}$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Dit is precies het zelfde als de definitie van een gewone maat, maar dan met de eis $\mu(A) \geq 0$ voor alle $A \in \mathcal{A}$ weggelaten. Het blijkt zelfs dat we de maatruimte van een eindige getekende maat kunnen ontbinden in een „positief" en „negatief" deel. Dat is waar de volgende stelling over gaat. Een bewijs is te vinden in [2, p. 108].

Stelling 13. (Hahnontbinding) *Zij μ een eindige getekende maat op een σ-algebra $\mathcal{A}$ over een verzameling Ω. Dan bestaan er verzamelingen $\Omega^+, \Omega^- \in \mathcal{A}$ zodanig dat $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ en $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$. Verder geldt $\mu(A) \geq 0$ voor alle $A \in \Omega^+ \cap \mathcal{A}$, en $\mu(A) \leq 0$ voor alle $A \in \Omega^- \cap \mathcal{A}$.*

Een mooi gevolg van deze stelling is het volgende.

Gevolg 14. *Elke eindige getekende maat μ op een σ-algebra $\mathcal{A}$ over een verzameling Ω is the schrijven als het verschil van twee eindige positieve maten op $\mathcal{A}$.*

Bewijs. Laat $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ een Hahnontbinding zijn. Dan definiëren we voor $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap \Omega^+) \quad \text{en} \quad \mu^-(A) = -\mu(A \cap \Omega^-).$$

Het is eenvoudig na te gaan dat dit twee maten oplevert. De Hahnontbinding zorgt ervoor dat ze beide positief zijn. Verder zijn $A \cap \Omega^+$ en $A \cap \Omega^-$ disjunct, dus geldt

$$\mu^+(A) - \mu^-(A) = \mu(A \cap \Omega^+) + \mu(A \cap \Omega^-) = \mu((A \cap \Omega^+) \cup (A \cap \Omega^-)) = \mu(A),$$

voor alle $A \in \mathcal{A}$. Met andere woorden, $\mu = \mu^+ - \mu^-$. □

Een belangrijke stelling binnen de integratietheorie is Lebesgues stelling over gedomineerde convergentie. Alhoewel deze hier wordt gegeven voor een positieve maat, zullen we hem later dankzij de Hahnontbinding alsnog kunnen toepassen op een getekende maat.

Stelling 15. (Gedomineerde convergentie) *Zij $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte met μ een positieve maat en (f_n) een rijtje van integreerbare functies $f_n : \Omega \to \mathbf{R}$*

die μ-bijna overal convergeren. Stel dat er een niet-negatieve integreerbare functie $g : \Omega \to \mathbf{R}$ bestaat zodanig dat $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$ voor alle $\omega \in \Omega$ en $n \in \mathbf{N}$. Dan bestaat er een integreerbare functie $f : \Omega \to \mathbf{R}$ zodanig dat f_n in norm convergeert naar f. Oftewel

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Zie voor een bewijs hiervan bijvoorbeeld [2, p. 83], alhoewel elk goed boek over integratietheorie deze stelling zou moeten noemen.
Onze voorkennis over eindige getekende maten is nu groot genoeg dat we aan de representatiestelling zelf kunnen beginnen, althans eerst een definitie en belangrijk lemma dat we nodig hebben. Zij $C(E)$ de ruimte van continue functies op een topologische ruimte E. Voor twee functies $f, g \in C(E)$ noteren we $f \leq g$ dan en slechts dan als $f(y) \leq g(y)$ voor alle $y \in E$. Merk op dat $\leq$ slechts een partiële ordening is.

Definitie 16. Zij E een compacte Hausdorffse ruimte en $C(E)$ de ruimte van continue functies op E. We noemen een functionaal $F \in C(E)'$ *positief* dan en slechts dan als geldt $F(f) \geq 0$ voor alle $f \geq 0$.

Net als bij eindige getekende maten, blijkt dat we ook lineaire functionalen in sommige gevallen kunnen ontbinden in een positief en negatief deel. Het volgende bewijs is gebaseerd op [7, p. 309-310].

Lemma 17. *Zij E een compacte Hausdorffse ruimte en $C(E)$ de ruimte van continue functies op E. Dan is iedere lineaire functionaal $F \in C(E)'$ te schrijven als verschil van twee positieve lineaire functionalen.*

Bewijs. Definieer voor elke $f \geq 0$

$$F^+(f) = \sup_{0 \leq \phi \leq f} F(\phi).$$

Merk op dat dit een eindig getal is, uit de begrensdheid van F volgt $|F(\phi)| \leq \|F\| \cdot \|\phi\|_\infty \leq \|F\| \cdot \|f\|_\infty$. Aangezien we in het supremum ook $F(0)$ en $F(f)$ meenemen, geldt $F^+(f) \geq 0$ en $F^+(f) \geq F(f)$. Merk ook op dat $F^+(\alpha f) = \alpha F^+(f)$ voor $\alpha \in \mathbf{R}_{\geq 0}$.
Zij $f, g \geq 0$ en $\phi, \psi \in C(E)$ zodanig dat $0 \leq \phi \leq f$ en $0 \leq \psi \leq g$ dan geldt

$$F^+(f + g) \geq F(\phi) + F(\psi).$$

Het supremum nemen over elke van zulke ϕ en ψ geeft dan

$$F^+(f + g) \geq F^+(f) + F^+(g).$$

Laat nu $\phi \in C(E)$ zó dat $0 \leq \phi \leq f + g$ en defineer $\psi \in C(E)$ als $\psi(s) = \min\{\phi(s), f(s)\}$. Dan is snel na te gaan dat $0 \leq \psi \leq f$ en $0 \leq \phi - \psi \leq g$. We krijgen dan de ongelijkheid

$$F(\phi) = F(\psi + \phi - \psi) = F(\psi) + F(\phi - \psi) \leq F^+(f) + F^+(g).$$

Weer het supremum nemen over elke ϕ:

$$F^+(f + g) \leq F^+(f) + F^+(g),$$

oftewel:

$$F^+(f + g) = F^+(f) + F^+(g).$$

We hebben F^+ alleen nog maar gedefinieerd voor positieve functies. Laat nu $f \in C(E)$ willekeurig zijn. Aangezien f begrensd is, kunnen we twee constanten $M, N \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ vinden zodat $f + M \geq 0$ en $f + N \geq 0$. Dan

$$F^+(f + M + N) = F^+(f + M) + F^+(N) = F^+(f + N) + F^+(M),$$

oftewel

$$F^+(f + M) - F^+(M) = F^+(f + N) - F^+(N).$$

De waarde van $F^+(f + M) - F^+(M)$ hangt dus niet af van de specifieke keuze van M. Dus we definiëren $F^+(f) = F^+(f + M) - F^+(M)$. Het is eenvoudig na te gaan dat F^+ nog steeds additief en positief homogeen is.
Laat nu $f \in C(E)$ willekeurig en $M \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ zodanig dat $f + M \geq 0$ èn $-f + M \geq 0$, dan geldt

$$\begin{aligned} F^+(f) + F^+(-f) &= F^+(f + M) - F^+(M) + F^+(-f + M) - F^+(M) \\ &= F^+(f + M - f + M) - F^+(2M) \\ &= F^+(2M) - F^+(2M) = 0. \end{aligned}$$

Dus

$$F^+(-f) = -F^+(f)$$

en daarmee is F^+ ook echt homogeen.
We definiëren nu nog $F^- = F^+ - F$. We zagen al dat $F^+(f) \geq 0$ en $F^+(f) \geq F(f)$ voor $f \geq 0$, dus dit zijn beide positieve lineaire functionalen. Natuurlijk geldt ook $F = F^+ - F^-$. $\square$

Deze splitsing hebben we nodig, omdat de representatiestelling van Riesz meestal voor positieve functionalen wordt bewezen. Het bewijs van deze representatiestelling is vrij lang als alleen klassieke technieken worden gebruikt. Een vrij kort bewijs dat naast de Hahn-Banach-stelling en de Carathéodory-uitbreiding alleen Stone–Čech-compactificatie gebruikt, is te vinden in [4].

Stelling 18. *Zij E een compacte Hausdorffse ruimte en laat $C(E)$ de ruimte van continue functies op E zijn. Voor elke positieve functionaal $F \in C(E)'$ bestaat er een eindige getekende maat μ zodanig dat*

$$F(f) = \int f\, d\mu$$

voor alle $f \in C(E)$.

Uit deze stelling en het bovenstaande lemma volgt meteen het algemene geval.

Gevolg 19. *Zij E een compacte Hausdorffse ruimte en laat $C(E)$ de ruimte van continue functies op E zijn. Voor elke functionaal $F \in C(E)'$ bestaat er een eindige getekende maat μ zodanig dat*

$$F(f) = \int f\, d\mu$$

voor alle $f \in C(E)$.

Bewijs. Volgens Lemma 17 is F te schrijven als verschil van posititieve functionalen F^+ en F^-. Pas op beide Stelling 18 toe om zo respectievelijk μ^+ en μ^- te krijgen zodanig dat

$$F^+(f) = \int f\, d\mu^+ \qquad \text{en} \qquad F^-(f) = \int f\, d\mu^- \qquad \text{voor alle } f \in C(E).$$

We nemen dus $\mu = \mu^+ - \mu^-$ waardoor

$$F(f) = F^+(f) - F^-(f) = \int f\, d\mu^+ - \int f\, d\mu^- = \int f\, d\mu$$

geldt voor alle $f \in C(E)$. □

§5 Compacte Hausdorffse ruimtes

Van de vorige paragraaf weten we nu hoe functionalen van een ruimte van continue functies over een compacte Hausdorffse ruimte eruit zien. In deze paragraaf bekijken we de topologische eigenschappen van zo'n ruimte en vinden we continue functies die aan bepaalde eigenschappen voldoen.
We behandelen eerst de benodigde kennis over samenhangendheid. Aangezien dit bekend hoort te zijn bij iedereen die een college over topologie heeft gevolgd en het

te ver afwijkt van het doel van deze scriptie worden de bewijzen hier niet uitgewerkt. Zie bijvoorbeeld [8] voor de uitwerkingen.
We noemen een topologische ruimte E *samenhangend* als er geen open $U, V \subset E$ bestaan zodanig dat $U \cup V = E$ en $U \cap V = \emptyset$. Het blijkt dat je een willekeurige ruimte E kunt opsplitsen in disjuncte samenhangende deelverzamelingen, welke we *samenhangingscomponenten* noemen.

Definitie 20. Zij E een topologische ruimte, dan heet E *totaal onsamenhangend* als elke samenhangingscomponent een singleton is.

We gebruiken later ook de tussenwaardestelling voor samenhangende ruimtes. Ook het bewijs hiervan wordt open gelaten.

Lemma 21. *Zij E een samenhangende topologische ruimte en $f : E \to \mathbf{R}$ continu. Voor alle $x, y \in E$ en $c \in \mathbf{R}$ met $f(x) \leq c \leq f(y)$ is er een $z \in E$ met $f(z) = c$.*

Naast samenhangendheid hebben we ook wat kennis over normale topologische ruimtes nodig. Op algemene topologische ruimtes weten we niet a priori wat voor continue functies er op die ruimte zijn, en of er überhaupt niet-constante continue functies zijn. Op normale ruimtes kunnen we echter het lemma van Urysohn toepassen, waarmee we gemakkelijk niet-constante continue functie kunnen construeren. Voor dit lemma hebben we normaliteit nodig.

Definitie 22. Zij E een topologische ruimte. We noemen E *normaal* als voor elk paar gesloten deelverzamelingen F en G van E met $F \cap G = \emptyset$, er een paar open deelverzamelingen U en V bestaat zodanig dat $F \subset U$, $G \subset V$ en $U \cap V = \emptyset$.

Gelukkig is normaliteit niet een sterkere eis dan compact en Hausdorff. Dat maakt het volgende lemma hard.

Lemma 23. *Zij E een compacte Hausdorffse ruimte, dan is E tevens normaal.*

Bewijs. Zij $F, G \subset E$ gesloten met $F \cap G = \emptyset$. Kies een punt $x \in F$ en neem die vast.
Omdat E Hausdorffs is, kunnen we woor elk punt $y \in G$ open $U_y, V_y \subset E$ vinden zodanig dat $x \in U_y$, $y \in V_y$ en $U_y \cap V_y = \emptyset$. Uiteraard geldt

$$G \subset \bigcup_{y \in G} V_y,$$

dus de V_y vormen een open overdekking van G. Aangezien E compact is en G gesloten, is G ook compact. Er bestaat dus een eindige deeloverdekking $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ zodanig dat

$$G \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

Tevens hebben we $x \in U_y$ voor alle $y \in G$, dus ook

$$x \in U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}.$$

Laat $U_x' = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ en $V_x' = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_1}$. Merk op dat dit beide open verzamelingen zijn. We hebben vanwege de constructie $x \in U_x'$, $G \subset V_x'$ en $U_x' \cap V_x' = \emptyset$.
We kunnen zulke open verzamelingen vinden voor elke $x \in F$. Dus de U_x' vormen een open overdekking van F nu. Er bestaat dus weer een deeloverdekking $U_{x_1}', \ldots, U_{x_m}'$, zodanig dat

$$F \subset U_{x_1}' \cup \cdots \cup U_{x_m}'.$$

Aangezien $G \subset V_x'$ voor alle $x \in F$, geldt ook

$$G \subset V_{x_1}' \cap \cdots \cap V_{x_m}'.$$

Laat $U'' = U_{x_1}' \cup \cdots \cup U_{x_m}'$ en $V'' = V_{x_1}' \cap \cdots \cap V_{x_m}'$. Merk weer op dat deze beide verzamelingen open zijn. Tevens geldt $F \subset U''$, $G \subset V''$ en $U'' \cap V'' = \emptyset$. $\square$

Nu kunnen we het lemma van Urysohn zelf formuleren. Aangezien dit lemma redelijk bekend is, wordt het bewijs open gelaten.

Stelling 24. (Urysohns Lemma) *Zij E een normale topologische ruimte en zij F en G disjuncte gesloten deelverzamelingen van E. Dan bestaat er een functie $f : E \to \mathbf{R}$ zodanig dat $f(X) \subset [0,1]$, $f|_F = 0$ en $f|_G = 1$.*

§6 Dunfordintegreerbare functies die niet Pettisintegreerbaar zijn

Voordat we het resultaat presenteren en het bewijs daarvan behandelen, formuleren we eerst nog een lemma en een gevolg daarvan.

Lemma 25. *Zij E een samenhangende compacte Hausdorffse ruimte met meer dan één punt. Dan bestaat er een rijtje (f_n) van continue functies $f_n : E \to \mathbf{R}$ diens puntsgewijze limiet, f_∞, niet continu is en zodanig dat $f_k \leq f_\infty$ voor alle $n \in \mathbf{N}$.*

Bewijs. Neem $x, y \in E$ met $x \neq y$. Aangezien E Hausdorffs is, zijn de singletons $\{x\}$ en $\{y\}$ gesloten. Uit Lemma 23 volgt dat E ook normaal is. We mogen dus Urysohns Lemma (Stelling 24) toepassen op $\{x\}$ en $\{y\}$. Zo krijgen we een continue functie $g : E \to \mathbf{R}$ met $g(x) = 0$ en $g(y) = 1$ en $g(E) \subset [0,1]$.
Laat $F = \{z \in E \,|\, g(z) = 0\}$ en $G_n = \{z \in E \,|\, g(z) \geq 1/n\}$ voor $n \in \mathbf{N}$. Aangezien het interval $[1/n, \infty)$ gesloten is en g continu, zijn al deze G_n zelf ook gesloten. We

kunnen weer Urysohns Lemma toepassen, maar nu op F en G_n. We krijgen dan voor elke $n \in \mathbf{N}$ een continue functie f_n zodanig dat $f_n|_F = 0$ en $f_n|_{G_n} = 1$.
We moeten alleen nog laten zien dat de puntsgewijze limiet van (f_n) bestaat en niet continu is. Zij $z \in E$ en stel dat $g(z) = 0$. Vanwege de definitie van F hebben we $z \in F$, dus ook $f_n(z) = 0$ voor alle $n \in \mathbf{N}$. Het rijtje (f_n) convergeert dus in z naar 0.
Stel nu dat $g(z) > 0$, dan is er een $N \in \mathbf{N}$ met $g(z) \geq 1/N$. Dus voor alle $n \geq N$ geldt dan $f_n(z) = 1$. Nu volgt dat het rijte (f_n) in dit punt convergeert naar 1.
We zien dat het rijtje (f_n) convergeert in elk punt, en dat de limiet 0 of 1 is. Stel dat de puntsgewijze limiet van (f_n) continu is. Vanwege de tussenwaardestelling (die geldt vanwege de samenhangendheid van E) zou deze limiet ook andere waarden dan 0 en 1 aannemen. Dat is een tegenspraak, dus de limiet is niet continu. □

Zoals beloofd heeft dit lemma nog een gevolg, namelijk een verzwakking van de eis „samenhangend en bestaande uit meer dan één punt".

Gevolg 26. *Zij E een compacte Hausdorffse ruimte en niet totaal onsamenhangend, dan bestaat er een rijtje (f_n) van continue functies $f_n : E \to \mathbf{R}$ diens puntsgewijze limiet niet continu is en zodanig dat $f_k \leq f_\infty$ voor alle $n \in \mathbf{N}$.*

Bewijs. Omdat E niet totaal onsamenhangend is, volgt meteen uit de definitie (Definitie 20) dat E een samenhangingscomponent $Y \subset E$ heeft dat geen singleton is. Dus Y bevat meer dan één punt en we mogen daarom Lemma 25 toepassen. □

Stelling 27. *Zij E een compacte Hausdorffse ruimte en niet totaal onsamenhangend, dan bestaat er een Dunfordintegreerbare functie $f : \mathbf{N} \to C(E)$ die niet Pettisintegreerbaar is.*

Bewijs. We passen eerst Gevolg 26 toe en krijgen daarmee een rijtje (g_n) van continue functies op E met een niet-continue puntsgewijze limiet. Laat

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1, \\ f_{n+1} &= g_{n+1} - g_n \qquad \text{voor } n > 1. \end{aligned}$$

Er geldt dus $\sum_{k=1}^{n} f_k = g_n$. Door de limiet te nemen van $n \to \infty$ krijgen we zo

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = g_\infty \qquad \text{met } g_\infty \text{ de puntsgewijze limiet van } (g_n). \tag{3}$$

We nemen de functie $f : \mathbf{N} \to C(E)$ als $f(n) = f_n$.
We laten eerst zien dat f niet Pettisintegreerbaar is. Stel dat f dat wel is, dan is er een $I_f \in C(E)$ zodanig dat

$$\phi(I_f) = \sum_{k=1}^{\infty} F(f(n)) \qquad \text{voor alle } F \in C(E)'.$$

In het bijzonder geldt dit ook voor de puntevaluaties ϕ_x. Dus volgt

$$I_f(x) = \phi_x(I_f) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_x(f(k)) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Gebruikmakende van (3) krijgen we $I_f = g_\infty$. Echter, g_∞, en dus ook f, is niet continu. We concluderen dat f niet Pettisintegreerbaar is.
We gaan nu Dunfordintegreerbaarheid aantonen. Vanwege Stelling 10 hoeven we alleen te laten zien dat

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(f_k) \qquad \text{bestaat en eindig is voor alle } F \in C(E)'.$$

Zij $F \in C(E)'$, dan volgt uit de lineariteit van F en de continuiteit van de absolute waarde

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} F(f_k)\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} F(f_k)\right| = \lim_{n\to\infty} \left|F\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)\right| = \lim_{n\to\infty} |F(g_n)|. \tag{4}$$

Volgens Gevolg 19 bestaat er een getekende maat μ zodang dat

$$F(g_n) = \int g_n \, d\mu. \qquad \text{voor alle } n \in \mathbf{N}.$$

Volgens Stelling 13 zijn er twee positieve maten μ^+ en μ^- zodanig dat $\mu = \mu^+ - \mu^-$. We gebruiken echter de maat $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$. Merk op dat dit de som is van twee positieve maten en dus zelf positief is. We kunnen dus Stelling 15 toepassen, waaruit volgt dat er een integreerbare functie $g : \Omega \to \mathbf{R}$ bestaat zodat (g_n) in norm convergeert naar g, dus

$$\lim_{n\to\infty} \int |g_n| \, d|\mu| = \int |g| \, d|\mu| < \infty. \tag{5}$$

Vervolgens schatten we nog af:

$$\begin{aligned} |F(g_n)| &= \left|\int g_n \, d\mu\right| \\ &= \left|\int g_n \, d\mu^+ - \int g_n \, d\mu^-\right| \\ &\leq \left|\int g_n \, d\mu^+\right| + \left|\int g_n \, d\mu^-\right| \end{aligned}$$

$$\leq \int |g_n| \, d\mu^+ + \int |g_n| \, d\mu^-$$
$$= \int |g_n| \, d|\mu| \, .$$

Uit het bovenstaande en (5) volgt dan

$$\lim_{n\to\infty} |F(g_n)| = \lim_{n\to\infty} \int |g_n| \, d|\mu| = \int |g| \, d|\mu| < \infty.$$

Vervolgens volgt samen met (4) dat

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} F(f_k) \right| = \lim_{n\to\infty} |F(g_n)| < \infty.$$

Hiermee is bewezen dat f inderdaad Dunfordintegreerbaar is. $\square$

§7 Dankwoord

Bij dezen wil ik graag mijn begeleider bedanken voor zijn tijd om elke week de voortgang te bespreken, voor de behulpzame en opbouwende kritiek, en zeker ook voor zijn enthousiasme over het onderwerp.

§8 Referenties

[1] C. D. Aliprantis and K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis, A Hitchhiker's Guide.* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006), third ed.
[2] H. Bauer, *Measure and Integration Theory.* (Walter de Gruyter, Berlin, 2001).
[3] S. Bochner, Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorräumes sind, *Fund. Math.* **20** (1933), 262-276
[4] D. J. H. Garling, A „short" proof of the Riesz representation theorem, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **73** (1973), 459-460
[5] I. Gelfand, Sur un lemme de la théorie des espaces linéaires, *Comm. Inst. Sci. Math. Méc. Univ. Kharkoff* **13** (1936), no. 4, 35-40
[6] B. J. Pettis, On integration in vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **44** (1938), no. 2, 277-304
[7] H. L. Royden, *Real Analysis.* (The Macmillan Company, New York, 1968), second ed.
[8] V. Runde, *A Taste of Topology.* (Springer, New York, 2008).
[9] B. P. Rynne and M. A. Youngson, *Linear Functional Analysis.* (Springer-Verlag, London, 2008), second ed.