

K.T.H. Yang

# Patronen met defect.

Bachelorscriptie, 19 juli 2013

Scriptiebegeleider: Prof. Dr. A. Doelman



Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Introductie</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Singuliere Sturm-Liouville theorie</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Algemene reactie-diffusie vergelijking</b>	<b>7</b>
3.1	Stelsel . . . . .	7
3.2	De Hamiltoniaan . . . . .	8
3.3	Aannames voor $F(u)$ . . . . .	9
3.4	Stabiliteit van homocliene banen en heterocliene banen . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Ruimtelijke inhomogeniteit</b>	<b>13</b>
4.1	Existentie . . . . .	13
4.2	Stabiliteit . . . . .	16
4.3	Translatie symmetrie . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Gelokaliseerde defect</b>	<b>19</b>
5.1	Existentie . . . . .	19
5.2	Stabiliteit . . . . .	24
5.3	Even en Oneven . . . . .	24
5.4	Een eenvoudige homocliene baan . . . . .	26
5.5	Voorbeeld met $\lambda = 0$ een eigenwaarde. . . . .	27
5.6	Stabiele homocliene baan? . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Conclusie</b>	<b>38</b>
6.1	Vervolg onderzoek . . . . .	38

# 1 Introductie

Een 'ruimtelijke patroon'  $U(x, t)$  is wiskundige termen een oplossing van een partiële differentiaal vergelijkingen (PDE). Zo'n PDE kan uiteenlopende verschijnselen als watergolven of de elektrische lading van een zenuwcel modelleren. Voor vast  $t$  representeert  $U$  als functie van  $x$  een 'patroon': een doorsnede van een watergolf of de gelocaliseerde lading van een lopende elektrische puls. In deze bachelorscriptie gaan we naar PDE's van de volgende vorm kijken:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(U). \quad (1.1)$$

met daarin  $U(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  (uniform begrensd) en  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  een gladde functie. Helaas is (1.1) te simpel om een realistisch verschijnsel te modelleren, maar het treedt wel vaak op als bouwsteen in geavanceerde modellen.  $F(U)$  is een niet lineaire functie en heet ook wel de reactie term, daarom wordt (1.1) ook wel een reactie diffusie vergelijking genoemd.

De stationaire oplossingen van (1.1) zijn eigenlijk gewone differentiaal vergelijking (ODE). Deze zijn onafhankelijk van de tijd  $t$  en er geldt dan  $U(x, t) = u(x)$ . Onze ODE is dan

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + F(u) = 0. \quad (1.2)$$

Van (1.2) zijn we vooral geïnteresseerd naar de begrensde oplossingen  $u^*(x)$ . Deze kunnen worden gezien als een kritiek punt van (1.1).

Voorbeelden van deze begrensde oplossingen zijn homocliene banen en heterocliene baan. Een homocliene baan  $u_{\text{hom}}(x)$  begint in een vaste punt en eindigt ook weer in datzelfde vaste punt, maar het moet wel ondertussen in een andere punt zijn geweest, oftewel  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_{\text{hom}}(x) = c$  met  $c \in \mathbb{R}$  en er bestaat een  $\hat{x}$  zodanig dat  $u_{\text{hom}}(\hat{x}) \neq c$ . Een heterocliene baan  $u_{\text{het}}(x)$  begint in een vaste punt en eindigt in een andere vaste punt, oftewel  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u_{\text{het}}(x) = c_1$  en  $\lim_{x \rightarrow \infty} u_{\text{het}}(x) = c_2$  met  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  en  $c_1 \neq c_2$ .

Je kunt dus nu afvragen hoe  $U(x, t)$  van (1.1) in de omgeving van  $u^*(x)$  gedraagt. Dit geeft de volgende handige definitie uit [1].

**Definitie 1.** *Een stationaire oplossing van een partiële differentiaal vergelijking is **stabiel** als alle tijdsafhankelijke oplossingen, die dichtbij de stationaire oplossing starten, in een gegeven omgeving rond de stationaire oplossing blijven voor alle tijd  $t > 0$ . Een stationaire oplossing is **instabiel**, als het niet stabiel is.*

Met behulp van Sturm-Liouville theorie (Hoofdstuk 2) is het mogelijk om aan te tonen dat homocliene banen instabiel zijn en heterocliene banen stabiel zijn (Hoofdstuk 3).

Omdat onze PDE (1.1) redelijke eenvoudig is, is daarover al veel om bekend. Daarom gaan we ruimtelijke inhomogeniteit toevoegen aan (1.1). Dit betekent dat de term  $F(U)$  in (1.1) een 'sprong' maakt tussen  $x < 0$  en  $x > 0$ . Dit creëert een onverwachte rijkdom aan patronen, als 'pinned fluxons' spelen dit soort oplossingen een belangrijke rol binnen processen in supergeleiders.

In dat onderzoek over 'pinned fluxons' [2] hebben ze een PDE zonder heterocliene banen bestudeerd. Met behulp van ruimtelijke inhomogeniteit hebben ze uiteindelijk een heterocliene baan kunnen maken. Vervolgens is er ook nog een voorwaarde bepaald waarvoor die heterocliene baan stabiel is. Dus ruimtelijke inhomogeniteit geeft nieuwe mogelijkheden.

Zoals eerder opgemerkt, kan er worden aangetoond dat een homocliene baan in (1.2) instabiel is. Nu is de vraag of het mogelijk is om met behulp van ruimtelijke inhomogeniteit een homocliene baan kan bepalen die stabiel is. Dit geeft in de volgende onderzoeksvraag:

**Is het mogelijk een stabiele homocliene baan te bepalen met  
ruimtelijke inhomogeniteit?**

Nu wordt er in het kort iets verteld over de inhoud van deze bachelorscriptie. In hoofdstuk 2 gaan we de singuliere Sturm-Liouville theorie bestuderen. Deze theorie is essentieel voor het analyseren van de stabiliteit van homocliene banen en heterocliene banen.

In hoofdstuk 3 bekijken we de algemene reactie-diffusie vergelijking. Van deze vergelijking worden de vaste punten bepaald en de banen in het  $(u, u_x)$  vlak worden berekend. Ook worden hier voorwaarden bepaald voor  $F(U)$  zodat er homocliene en heterocliene banen bestaan. En we sluiten dit hoofdstuk af met de stabiliteitsanalyse van homocliene banen en heterocliene banen.

In hoofdstuk 4 behandelen we de reactie-diffusie vergelijking met ruimtelijke inhomogeniteit bij  $x = 0$ . Eerst wordt er gekeken naar de existentie van homocliene banen. Tenslotte wordt de stabiliteit van die homocliene banen bepaald.

In hoofdstuk 5 beschouwen we de reactie-diffusie vergelijking met een gelocaliseerd defect. Dat is een reactie-diffusie vergelijking met ruimtelijke inhomogeniteit op een bepaald domein bijvoorbeeld voor  $|x| < L$  met  $L > 0$ . Hier wordt eerst ook gekeken naar de existentie van homocliene banen. Vervolgens kijken we naar specifieke vergelijkingen en gaan daarvan de stabiliteit van de homocliene banen bepalen.

## 2 Singuliere Sturm-Liouville theorie

In dit hoofdstuk wordt de singuliere Sturm-Liouville theorie behandeld, deze theorie wordt in de andere hoofdstukken vaak gebruikt om de stabiliteit van heterocliene banen en homocliene banen te bepalen. In de singuliere Sturm-Liouville hebben we te maken met randvoorwaarden voor  $x \rightarrow \pm\infty$  in plaats van de Dirichlet, Neumann en Robin randvoorwaarden bij de 'normale' Sturm-Liouville theorie. Dit geeft de volgende stelling.

**Stelling 1.** *Laat een differentiaal operator van de vorm  $-\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x)u = \lambda w(x)u$  zijn met  $p(x), w(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  en  $q(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Veronderstel dat de eigenwaarde probleem de randvoorwaarden  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0$  heeft, nu gelden*

- (i) *Er is een eindig aantal reële eigenwaarden  $\lambda_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, J$  met  $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_J$ .*
- (ii) *De bijbehorende eigenfuncties  $u_j(x)$  hebben  $j$  verschillende nulpunten en zijn even respectievelijk oneven als functie van  $x$  indien  $j$  even respectievelijk oneven is.*

**Stelling 1** lijkt wel op de 'normale' Sturm-Liouville theorie, maar het belangrijkste verschil is dat er nu maar eindig veel eigenwaarden zijn. Net als bij de 'normale' Sturm-Liouville theorie zijn er meer resultaten (zoals orthogonaliteit van de eigenfuncties, etc.), maar in deze bachelorscriptie worden de andere resultaten niet gebruikt. Daarom zijn die resultaten dan ook niet aan de stelling toegevoegd. **Stelling 1** wordt vooral gebruik in hoofdstuk 3. Daar wordt er  $p(x) = w(x) = 1$  en  $q(x) = -F'(u(x))$  gekozen.

In de overige hoofdstukken wordt een **Stelling 2** gebruikt. **Stelling 2** is handiger voor homocliene banen, wat we gaan bestuderen. **Stelling 2** is als **lemma 3.2** aangegeven in [3], maar in plaats van een lemma wordt het in deze bachelorscriptie een stelling genoemd.

**Stelling 2.** *Laat  $H : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  zodat de differentiaal vergelijking  $u_{xx} = \rho u - H(u)$  met  $\rho > 0$  een oplossing  $u_h(x)$  heeft, die een homocliene baan heeft in  $(u, u_x) = (0, 0)$ , en neem  $h(x) = H'(u_h(x))$ . Voor een differentiaal operator van de vorm  $\mathcal{L}(x) = \frac{d^2}{dx^2} + h(x) - \rho$ , veronderstel dat de eigenwaarde probleem de vorm heeft van  $(\mathcal{L}(x) - \lambda)u = 0$  met randvoorwaarden  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0$ . Bovendien, definieer  $\Lambda = \sqrt{\rho + \lambda}$  met  $\arg(\Lambda) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Nu gelden*

- (i) *Er is een eindig aantal reële eigenwaarden  $\lambda_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, J$  met  $\lambda_0 > 0$ ,  $\lambda_1 = 0$  en  $0 > \lambda_2 > \dots > \lambda_J > -\rho$ . Equivalent, er is een eindig aantal reële eigenwaarden  $\Lambda_j$  met  $\Lambda > \sqrt{\rho}$ ,  $\Lambda_1 = \sqrt{\rho}$  en  $\sqrt{\rho} > \Lambda_2 > \dots > \Lambda_J > 0$ .*
- (ii) *De bijbehorende eigenfuncties  $u_j(x)$  hebben  $j$  verschillende nulpunten en zijn even respectievelijk oneven als functie van  $x$  indien  $j$  even respectievelijk oneven is. Bovendien,  $\frac{d}{dx}u_h(x)$  is een eigenfunctie voor  $\lambda_1 = 0$  (of  $\Lambda_1 = 1$ ); met andere woorden,  $u_1(x) \in \text{span}\{\frac{d}{dx}u_h(x)\}$ .*

**Stelling 2** wordt in de hoofdstukken 4 en 5 vaak toegepast op (1.2). In hoofdstuk 3 worden er aannames bepaald voor  $F(u)$ , zodat homocliene banen bestaan voor deze  $F(u)$ . Één van die aannames is dat  $F'(0) < 0$ , dit zorgt ervoor dat de lineaire stabiliteit van  $(0,0)$  een zadel wordt. (1.2) kan nu worden geschreven als

$$u_{xx} = -F(u) = -F'(0)u - (-F'(0)u + F(u)).$$

Dan nemen we  $\rho = -F'(0) > 0$  en  $H(u) = -F'(0)u + F(u)$ . En nu voldoet (1.2) aan de voorwaarden van **Stelling 2** en dus kan deze stelling op (1.2) worden toegepast.

### 3 Algemene reactie-diffusie vergelijking

In dit hoofdstuk wordt de singuliere Sturm-Liouville theorie toegepast om te laten zien dat homocliene banen instabiel zijn en heterocliene banen stabiel zijn. We beschouwen weer dezelfde PDE, namelijk

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(U). \quad (3.1)$$

Als de stationaire oplossingen worden bestudeerd, geldt weer  $U(x, t) = u(x)$ . Nu volgt dan de ODE

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + F(u) = 0. \quad (3.2)$$

Van (3.2) zijn we vooral geïnteresseerd in de begrensde oplossingen  $u_h(x)$ . Merk op dat  $u_h(x)$  alleen de homocliene, heterocliene of periodieke banen kunnen zijn. Maar in dit bachelorscriptie worden de homocliene banen en de heterocliene banen alleen behandeld. Maar eerst moet (3.2) beter worden geanalyseerd om meer de oplossingen beter te begrijpen. Vervolgens moeten er aannames voor  $F(U)$  worden bepaald opdat er homocliene banen of heterocliene banen zijn. Namelijk voor  $F(U) = 0$ , zijn alle niet triviale stationaire oplossingen lineaire lijnen. Deze zijn dan ook niet begrensd en zijn er dus noch homocliene banen noch heterocliene banen.

#### 3.1 Stelsel

Zoals alle hogere ordes differentiaal vergelijkingen omgeschreven kunnen worden naar een stelsel van ODE's, kan dat ook worden gedaan bij (3.2). We introduceren dan  $w = \frac{du}{dx}$ , hierdoor komt uit (3.2) het volgende stelsel

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = w \\ \frac{dw}{dx} = -F(u) \end{cases} .$$

Het handige van het omschrijven naar een stelsel van ODE's is dat de vaste punten makkelijker te bepalen zijn en vervolgens kunnen we de lineaire stabiliteit van die vaste punten berekenen. Voor een vaste punt is er nodig dat  $\frac{du}{dx} = \frac{dw}{dx} = 0$ . Stel er bestaat een  $u^*$  waarvoor  $F(u^*) = 0$ , dan is  $(u^*, 0)$  een vaste punt van dit stelsel. Nu moet de lineaire stabiliteit van de vaste punten nog bepaald worden. Dat kan worden gedaan met de afgeleiden matrix, die is

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} w & \frac{\partial}{\partial w} w \\ -\frac{\partial}{\partial u} F(u) & -\frac{\partial}{\partial w} F(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -F'(u) & 0 \end{pmatrix} .$$

Als er een  $u^*$  is met  $F(u^*) = 0$ , dan is karakteristieke polynoom van deze matrix gelijk aan  $\lambda^2 + F'(u^*) = 0$ . Hieruit volgt dat  $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{-F'(u^*)}$ . Nu kan het volgende geconcludeerd worden:

- Als  $F'(u^*) < 0$ , dan geldt  $\lambda_{\pm} \in \mathbb{R}$  en dus is  $(u^*, 0)$  een zadelpunt.
- Als  $F'(u^*) > 0$ , dan geldt  $\lambda_{\pm} \in i\mathbb{R}$  en dus is  $(u^*, 0)$  een centrum.

### 3.2 De Hamiltoniaan

Om preciezer de banen te bepalen in  $(u, w)$  fase plaatje, kunnen we beter kijken naar de hamiltoniaan. Deze hamiltoniaan geeft een verband tussen  $u$  en  $w = u_x$ . Uit (3.2) kan de hamiltoniaan als volgt worden bepaald: (3.2) wordt aan beide kanten met  $\frac{du}{dx}$  vermenigvuldigd, nu volgt er

$$\frac{du}{dx^2} \frac{du}{dx} + F(u) \frac{du}{dx} = 0.$$

Daarna integreren we over  $x$ , vervolgens geldt

$$\frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \int F(u) du = H \text{ met } H \in \mathbb{R}.$$

Hieruit krijgen we een expliciete functie van  $u_x$  uitgedrukt in  $u$ . Deze is

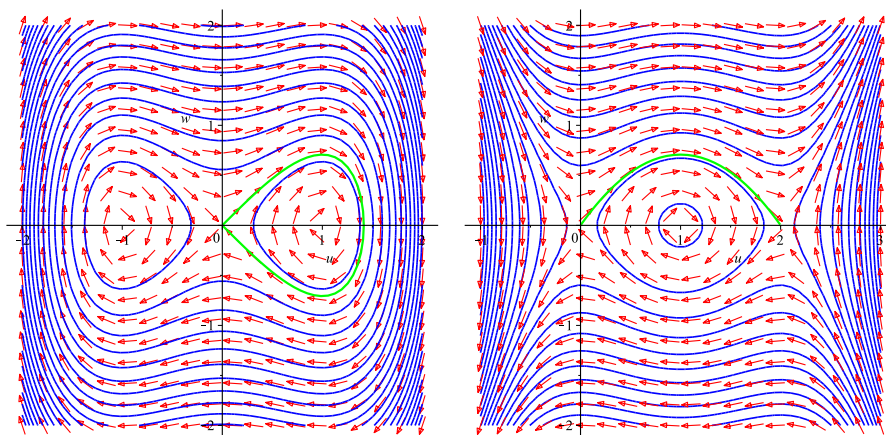
$$u_x = \pm \sqrt{2 \left( H - \int F(u) du \right)}.$$

Merk op dat dit precies de niveaokrommes zijn in het  $(u, w)$  fase plaatje. Nu is er genoeg voorkennis om **lemma 1** te bewijzen.

**Lemma 1.** *Stel er bestaan  $u_i$  met  $1 \leq i \leq N$  met  $N \in \mathbb{N}$  waarvoor geldt dat  $F(u_i) = 0$ , dan geldt dat de zadelpunten en de centra zich onderling afwisselen (zadel, centrum, zadel,  $\dots$  of andersom).*

**Bewijs:** Er is al aangetoond dat  $u_x = \pm \sqrt{2(H - \int F(u) du)}$ . De belangrijkste term hiervan is  $H - \int F(u) du$ , deze bepaalt de vorm van  $u_x$ . De verschillende niveau krommes van  $H - \int F(u) du$  worden bepaald door de  $H$  te gaan variëren. Omdat  $F$  glad is, volgt hieruit dat  $H - \int F(u) du$  minima en maxima heeft. Dus dan heeft  $u_x$  ook minima en maxima. Als  $H$  wordt gevarieerd, zien we dat de maxima de centra geven en de minima de zadelpunten (zie figuur 1). En door de gladheid van  $F$  geldt dat de minima en de maxima elkaar afwisselen. Dus wisselen de zadelpunten en centra elkaar ook af. ■





(a) (3.2) met  $F(u) = -u + u^3$ .

(b) (3.2) met  $F(u) = -u(u-1)(u-2)$ .

Figuur 1: Plot van het faseplaatje van (3.2) met bijbehorende  $F(u)$ . De rode pijlen zijn de richtingen, de blauwe lijnen zijn de niveau krommes en de groene lijn geeft een homocliene baan in (a) en een heterocliene baan in (b).

### 3.3 Aannames voor $F(u)$

Zoals er al eerder is opgemerkt, geeft niet iedere willekeurige  $F(U)$  een homocliene baan of een heterocliene baan. Nu hebben we voldoende voorkennis om eisen aan  $F(U)$  te koppelen opdat we een homocliene baan of een heterocliene baan krijgen.

In figuur 1(a) kunnen we ook zien dat er een homocliene baan is voor  $u < 0$ . Maar we in dit bachelorscriptie gaan we richten op positieve oplossing van  $u(x)$ . Daarom is onze eerste eis dat  $u(x) > 0$ .

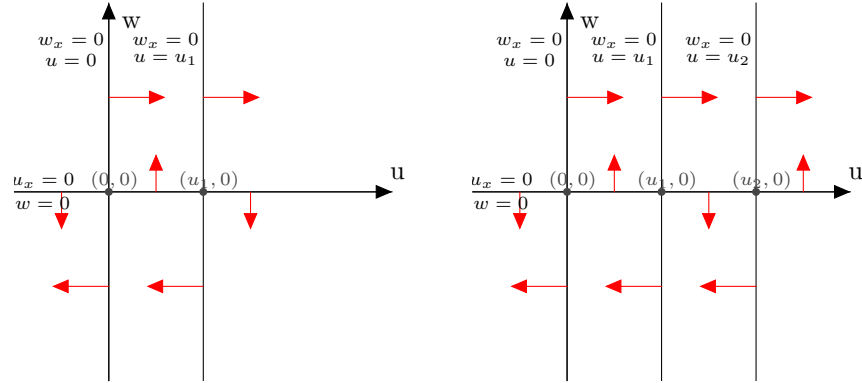
Voor een homocliene baan moet de oplossing vanuit de instabiele manifold van een zadel komen en eindigen in de stabiele manifold van dezelfde zadel eindigen. Dit kan alleen maar als er een centrum in de buurt is die de oplossing weer terugleidt naar de zadel. Uit **lemma 1** volgt dan dat voor een homocliene baan hebben we minstens 2 verschillende oplossingen  $u_1 < u_2$  waarvoor moet gelden dat  $F(u_1) = F(u_2) = 0$ .

Voor een heterocliene baan moet de oplossing vanuit de instabiele manifold van een zadel  $z_1$  komen en eindigen in de stabiele manifold van een zadel  $z_2$  eindigen, hij kan immers nooit in een centrumpunt eindigen. Uit **lemma 1** volgt er dat er dus 3 verschillende oplossingen  $u_1 < u_2 < u_3$  moeten zijn, waarvoor geldt dat  $F(u_1) = F(u_2) = F(u_3) = 0$ . Omdat er 2 verschillende zadels zijn, moeten we ook eisen dat  $F'(u_1), F'(u_3) < 0$  en  $F'(u_2) > 0$ .

Zonder verlies van algemeenheid kan er worden aangenomen dat  $(0, 0)$  een vast punt is en het een zadel is in het  $(u, w)$  faseplaatje. Indien dat niet het geval

zou zijn, kan er zo verschoven worden dat  $(0, 0)$  het vast punt wordt. Dus de aannames voor homocliene baan zijn dat er een  $u_1 > 0$  bestaat met  $F(0) = F(u_1) = 0$  en  $F'(0) < 0$ . En de aannames voor een heterocliene baan zijn dat er  $u_2 > u_1 > 0$  bestaan met  $F(0) = F(u_1) = F(u_2) = 0$  en  $F'(0), F'(u_2) < 0$  en  $F'(u_1) > 0$ .

Van deze aannames kan er nu een fase plaatje worden gemaakt met de nullclines erin zodat we weten welke richtingen de oplossingen naar toe gaan. Zie figuur 2.



(a) Faseplaatje voor (3.2) met  $F$  zodanig gekozen dat  $F(0) = F(u_1) = 0$  met  $F'(0) < 0$  en  $F'(u_1) > 0$ . (b) Faseplaatje voor (3.2) met  $F$  zodanig gekozen dat  $F(0) = F(u_1) = F(u_2) = 0$  met  $F'(0), F'(u_2) < 0$  en  $F'(u_1) > 0$ .

Figuur 2: Illustraties van het faseplaatje met nullclines voor een homocliene baan (a) en een heterocliene baan (b). De rode lijnen zijn de richtingen en zwarte lijnen zijn de nullclines.

### 3.4 Stabiliteit van homocliene banen en heterocliene banen

We zochten naar begrensde oplossingen  $u_h(x)$ . Deze oplossingen  $u_h(x)$  zijn voor deze bachelorscriptie de homocliene banen en heterocliene banen. Nu wordt er bestudeerd hoe  $U(x, t)$  zich gedraagt in de buurt van  $u_h(x)$ . Om antwoord hierop te krijgen introduceren we  $U(x, t) = u_h(x) + \epsilon V(x, t)$  met  $\epsilon$  klein. Als dit wordt ingevuld in (3.1), dan krijgen we

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u_h(x) + \epsilon V(x, t)) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_h(x) + \epsilon V(x, t)) + F(u_h(x) + \epsilon V(x, t)) \\ \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{d^2 u_h}{dx^2} + \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(u_h(x) + \epsilon V(x, t)). \end{aligned}$$

Als  $F$  wordt getaylorde rond  $u_h(x)$ , krijgen we

$$\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{d^2 u_h}{dx^2} + \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(u_h(x)) + \epsilon F'(u_h(x))V + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Omdat  $u_h$  voldoet aan (3.2) geldt

$$\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \epsilon F'(u_h(x))V + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Dan volgt hieruit het volgende PDE van orde  $\epsilon$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F'(u_h(x))V.$$

Door scheiden van variabelen wordt  $V(x, t)$  geschreven als  $V(x, t) = e^{\lambda t} v(x)$  met een eigenwaarde  $\lambda \in \mathbb{C}$  en  $v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  is voldoende glad en begrensd op heel  $\mathbb{R}$ . De functie  $v(x)$  is dan een oplossing van de singuliere Sturm-Liouville vergelijking,

$$\mathcal{L}v = \lambda v \text{ met } \mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + F'(u_h). \quad (3.3)$$

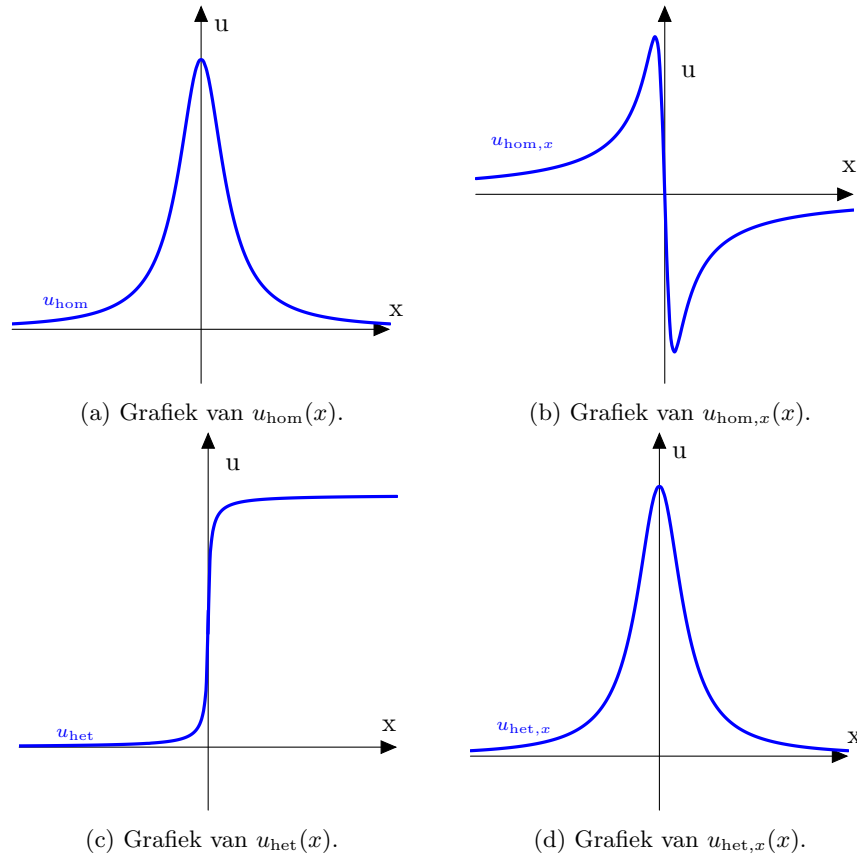
Per definitie van  $u_h$  geldt  $\frac{d^2 u_h}{dx^2} + F(u_h) = 0$ . Als deze wordt gedifferentieerd naar  $x$  aan beide kanten, volgt

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 u_h}{dx^2} + F(u_h) \right) = 0.$$

Deze vergelijking is precies gelijk aan (3.3) met  $v = u_{h,x}$  en  $\lambda = 0$  want

$$\mathcal{L}u_{h,x} = \frac{d^2}{dx^2}(u_{h,x}) + F'(u_h)u_{h,x} = 0 \cdot u_{h,x}.$$

Dus  $u_{h,x}$  is een eigenfunctie van (3.3) met eigenwaarde 0. Laat de homocliene baan en heterocliene baan worden weergegeven met respectievelijk  $u_{\text{hom}}$  en  $u_{\text{het}}$ . Nu moeten  $u_{\text{het},x}$  en  $u_{\text{hom},x}$  worden bepaald, want deze zijn de oplossingen van (3.3) met  $\lambda = 0$ . Deze twee functies zijn te zien op Figuur 3(b) en figuur 3(d).



Figuur 3: Illustraties van een homocliene baan en een heterocliene baan met hun afgeleiden.

Op figuur 3(b) zien we dat  $u_{\text{hom},x}$  precies één snijpunt heeft met de  $x$ -as en op figuur 3(d) zien we dat  $u_{\text{het},x}$  geen snijpunten heeft met de  $x$ -as. Als **Stelling 1** erop wordt toegepast, geldt er:

- Voor de homocliene oplossingen hebben we dat  $u_{\text{hom},x}$  precies één snijpunt nulpunt heeft. Dus volgt hieruit dat  $\lambda_1 = 0$ . Nu weten we dat  $\lambda_0 > 0$ . Als we  $n$  eigenwaarden hebben en  $v_i(x)$  de bijbehorende eigenfuncties zijn, geldt  $V(x, t) = \sum_{i=0}^n v_i(x)e^{\lambda_i t}$ . Uit **Definitie 1** volgt nu dat  $u_{\text{hom}}(x)$  instabiel is omdat  $\lambda_0 > 0$ .
- Voor de heterocliene oplossingen hebben we dat  $u_{\text{het},x}$  geen nulpunten heeft. Dus volgt hieruit dat  $\lambda_0 = 0$ . Als we  $n$  eigenwaarden hebben en  $v_i(x)$  de bijbehorende eigenfuncties zijn, geldt  $V(x, t) = \sum_{i=0}^n v_i(x)e^{\lambda_i t}$ . Uit **Definitie 1** volgt nu dat  $u_{\text{het}}(x)$  stabiel is omdat  $\lambda_i < 0$  voor alle  $0 \leq i \leq n$ .

## 4 Ruimtelijke inhomogeniteit

In dit hoofdstuk gaan we PDE's bestuderen met ruimtelijke inhomogeniteit bij  $x = 0$ . Een simpel voorbeeld hiervan is

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} + F_-(U) & x < 0 \\ U_t = U_{xx} + F_+(U) & x \geq 0 \end{cases}$$

Met  $F_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en  $F_+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gladde functies en  $F_- \neq F_+$ . Voor  $x < 0$  hebben we een oplossing van  $U_t = U_{xx} + F_-(U)$  en voor  $x \geq 0$  hebben we een oplossing van  $U_t = U_{xx} + F_+(U)$ . Merk op dat het omslagpunt gekozen is op  $x = 0$ , maar in principe kunnen we een willekeurige  $x$  coördinaat kiezen. Eerst zal er vooral worden gekeken naar de existentie van de homocliene banen in systemen met ruimtelijk inhomogeniteit en daarna wordt de stabiliteit van de homocliene banen bepaald. Omdat we voornamelijk geïnteresseerd zijn in homocliene banen, hebben we een aantal eisen nodig. Uit paragraaf 3.3 hebben we de volgende eisen;  $F_+(0) = F_-(0) = 0$ ,  $F'_+(0), F'_-(0) < 0$  en er bestaan  $\hat{u}_1, \hat{u}_2 > 0$  met  $F_+(\hat{u}_1) = F_-(\hat{u}_2) = 0$ .

### 4.1 Existentie

Voor de existentie van de homocliene banen, moeten eerst de stationaire oplossingen worden bepaald. Als we  $U(x, t) = u(x)$  nemen, dan voldoen de stationaire oplossingen aan

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} = -F_-(u) & x < 0 \\ \frac{d^2 u}{dx^2} = -F_+(u) & x \geq 0 \end{cases}. \quad (4.1)$$

Deze kan worden geschreven naar het volgende hamiltoniaan,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \int F_-(u) du &= H_- \text{ voor } x < 0 \text{ met } H_- \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \int F_+(u) du &= H_+ \text{ voor } x \geq 0 \text{ met } H_+ \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Laat de 2 vergelijkingen hierboven gelden voor alle  $x \in \mathbb{R}$ , dus we halen de beperkingen  $x < 0$  en  $x \geq 0$  weg. Dan krijgen we 2 hamiltoniaanse systemen. Deze 2 hamiltoniaanse systemen zijn verschillend omdat  $F_- \neq F_+$ . We weten ook dat  $(0, 0)$  een vaste punt is, nu geven  $H_- = 0$  en  $H_+ = 0$  de homocliene baan bij  $(0, 0)$  in respectievelijk  $\frac{d^2 u}{dx^2} = -F_-(u)$  en  $\frac{d^2 u}{dx^2} = -F_+(u)$ . In het  $(u, w)$  fase plaatje zijn er nu dan 3 mogelijkheden, want de homocliene banen snijden elkaar 0, 1 of 2 keer. Als de homocliene banen elkaar niet snijden, dan is er ook geen homocliene baan in (4.1), want er kan dan niet over worden gesprongen naar de andere homocliene baan.

Stel we zitten nu het geval dat er minstens 1 snijpunt is, dan moet er worden gekozen dat een van de snijpunten valt op  $x = 0$ . Zodat het systeem precies op  $x = 0$  van de homocliene baan van  $\frac{d^2u}{dx^2} = -F_-(u)$  naar de homocliene baan van  $\frac{d^2u}{dx^2} = -F_+(u)$  springt.

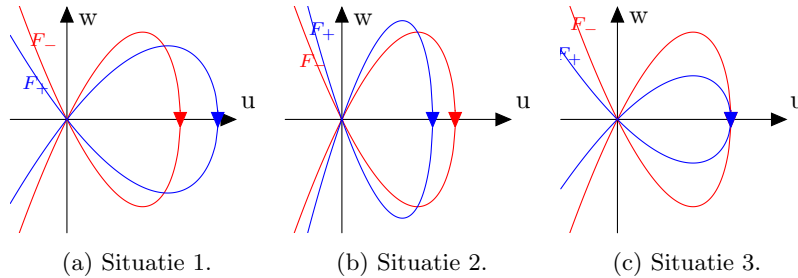
Als de homocliene banen 1 snijpunt hebben, dan moeten ze elkaar snijden bij de top, dus voor  $u_x = 0$ . Laat het snijpunt  $(u^*, 0)$  zijn. Bij dit geval hebben we 2 situaties, want er geldt  $\sqrt{-2 \int F_-(u) du} < \sqrt{-2 \int F_+(u) du}$  of  $\sqrt{-2 \int F_+(u) du} < \sqrt{-2 \int F_-(u) du}$  voor  $0 \leq u \leq u^*$ . Gelijkheid kan niet optreden omdat er aangenomen is dat  $F_- \neq F_+$ .

Beschouw nu het geval dat de homocliene banen 2 snijpunten hebben. Laat  $(u^*, w^*)$  een snijpunt zijn, dan weten we door de symmetrie van de homocliene baan dat  $(u^*, -w^*)$  de andere snijpunt is. Laat  $u_- > 0$  voldoen aan  $\sqrt{-2 \int F_-(u) du} = 0$  en  $u_+ > 0$  voldoen aan  $\sqrt{-2 \int F_+(u) du} = 0$ . Merk op dat  $u_-$  en  $u_+$  bestaan omdat  $F_-(u)$  en  $F_+(u)$  beide 2 verschillende nulpunten hebben. Nu hebben we weer 2 situaties, namelijk er geldt  $u_- < u_+$  of  $u_+ < u_-$ . Gelijkheid kan hier niet optreden omdat dat zou betekenen dat er maar 1 snijpunt is.

Dus we hebben nu 4 mogelijke situaties waarbij er minstens één snijpunt is tussen de homocliene banen. Die zijn:

1. Als  $u_- < u_+$  met  $u_{\pm} > 0$  de oplossing van  $\sqrt{-2 \int F_{\pm}(u) du} = 0$ .
2. Als  $u_+ < u_-$  met  $u_{\pm} > 0$  de oplossing van  $\sqrt{-2 \int F_{\pm}(u) du} = 0$ .
3. Als  $u_- = u_+$  met  $u_{\pm} > 0$  de oplossing van  $\sqrt{-2 \int F_{\pm}(u) du} = 0$  en  $\sqrt{-2 \int F_+(u) du} < \sqrt{-2 \int F_-(u) du}$  voor  $0 < u < u_{\pm}$ .
4. Als  $u_- = u_+$  met  $u_{\pm} > 0$  de oplossing van  $\sqrt{-2 \int F_{\pm}(u) du} = 0$  en  $\sqrt{-2 \int F_-(u) du} < \sqrt{-2 \int F_+(u) du}$  voor  $0 < u < u_{\pm}$ .

Merk op dat situaties 3 en 4 hetzelfde als je  $-x$  in plaats van  $x$ . Daarom zijn de eerste 3 situaties zijn geïllustreerd op figuur 4.

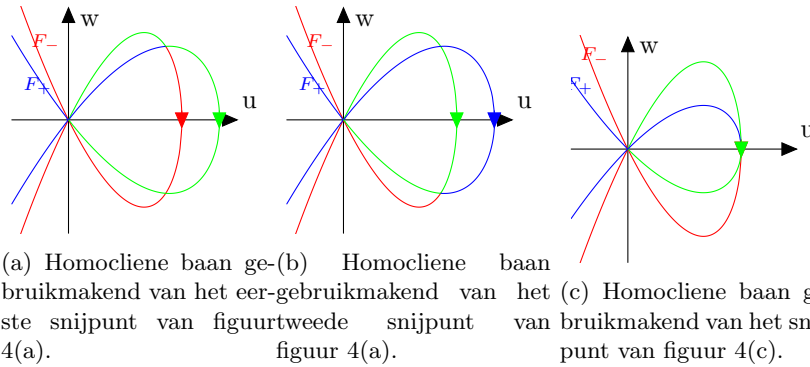


Figuur 4: Illustraties van mogelijke situaties van (4.1) waarbij een homocliene baan bestaat. De rode lijnen zijn de homocliene banen met  $F_-(u)$  en de blauwe lijnen zijn de homocliene banen met  $F_+(u)$ .

Beschouw eerst situatie 1 oftewel figuur 4(a). We gaan nu proberen zoveel mogelijk homocliene banen te vinden in figuur 4(a). Een homocliene baan begint vanuit  $(0, 0)$  op de rode lijn en moet eindigen via de blauwe lijn in  $(0, 0)$ . Hier van zijn maar 2 mogelijkheden, want er zijn precies 2 snijpunten.  $x = 0$  kan alleen maar worden gekozen op één van beide snijpunten. Dus zijn er maar 2 homocliene banen in figuur 4(a). Zie figuur 5(a) en figuur 5(b).

Op precies hetzelfde manier kan situatie 2 worden geanalyseerd. Daar zijn er ook maar 2 mogelijke manieren om een homocliene baan te krijgen, omdat we daar ook 2 snijpunten hebben.

Ook op hetzelfde manier kan situatie 3 worden geanalyseerd. Maar daar is maar 1 mogelijke manier om een homocliene baan te krijgen, omdat we daar 1 snijpunt hebben. Zie figuur 5(c).



Figuur 5: Illustraties van de mogelijke homocliene banen. De rode lijnen zijn de homocliene banen met  $F_-(u)$ , de blauwe lijnen zijn de homocliene banen met  $F_+(u)$  en de groene lijnen zijn de homocliene banen van (4.1).

## 4.2 Stabiliteit

Om de stabiliteit van de homocliene banen te bepalen, moeten we kijken of  $\lambda = 0$  hier een eigenwaarde is en hoeveel nulpunten de bijbehorende eigenfunctie dan heeft. Laat  $u_{\text{hom}}$  een homocliene baan zijn van (4.1). Weer gaan we bestuderen hoe  $U(x, t)$  zich gedraagt in de buurt van  $u_{\text{hom}}(x)$ . Om antwoord hierop te krijgen introduceren we  $U(x, t) = u_{\text{hom}}(x) + \epsilon e^{\lambda t} v(x)$  met  $\epsilon$  klein. Analoog aan paragraaf 3.4 hebben we dat de functie  $v(x)$  een oplossing is van de singuliere Sturm-Liouville vergelijking,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_- v = \lambda v \text{ met } \mathcal{L}_- = \frac{d^2}{dx^2} + F'_-(u_h(x)) \text{ voor } x < 0 \\ \mathcal{L}_+ v = \lambda v \text{ met } \mathcal{L}_+ = \frac{d^2}{dx^2} + F'_+(u_h(x)) \text{ voor } x \geq 0 \end{cases} . \quad (4.2)$$

Beschouw nu eerst homocliene baan van figuur 5(a), noem het  $u_{\text{hom}}$ . Laat  $u_{\text{hom}-}$  de homocliene baan zijn van  $\frac{d^2 u}{dx^2} = -F_-(u)$  en  $u_{\text{hom}+}$  de homocliene baan zijn  $\frac{d^2 u}{dx^2} = -F_+(u)$  voor alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dus

$$u_{\text{hom}} = \begin{cases} u_{\text{hom}-} & x < 0 \\ u_{\text{hom}+} & x \geq 0 \end{cases} .$$

Doordat  $u_{\text{hom}-}$  en  $u_{\text{hom}+}$  homocliene banen zijn, weten we dat

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_- u_{\text{hom}-,x} &= \frac{d^2}{dx^2}(u_{\text{hom}-,x}) + F'_-(u_{\text{hom}})u_{\text{hom}-,x} = 0 \cdot u_{\text{hom}-,x} \text{ voor } x < 0 \\ \mathcal{L}_+ u_{\text{hom}+,x} &= \frac{d^2}{dx^2}(u_{\text{hom}+,x}) + F'_+(u_{\text{hom}})u_{\text{hom}+,x} = 0 \cdot u_{\text{hom}+,x} \text{ voor } x \geq 0. \end{aligned}$$

Dus geldt nu

$$u_{\text{hom},x} = \begin{cases} u_{\text{hom}-,x} & x < 0 \\ u_{\text{hom}+,x} & x \geq 0 \end{cases} .$$

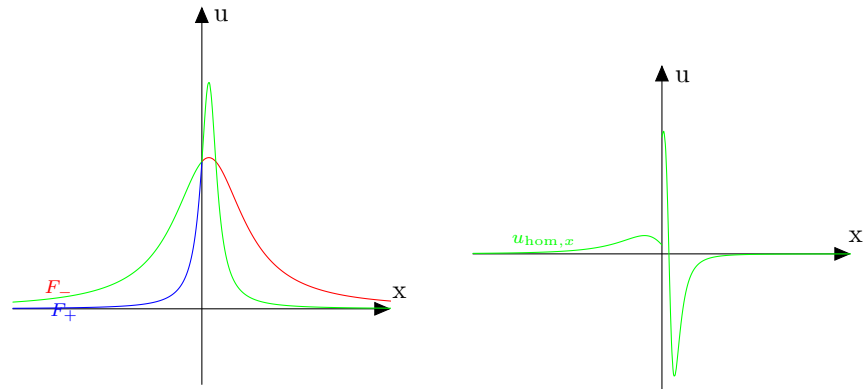
Merk nu op dat  $u_{\text{hom},x}$  voldoet aan (4.2). Maar  $u_{\text{hom},x}$  is niet continu, want  $u_{\text{hom}}$  is niet differentieerbaar op  $x = 0$ . Zie figuur 6(b). Het is alleen mogelijk  $u_{\text{hom}}$  differentieerbaar te krijgen op  $x = 0$  in situatie 3 (of situatie 4) of als  $F_-(U) = F_+(U)$ . Maar bij  $F_-(U) = F_+(U)$  hebben we geen ruimtelijke inhomogeniteit meer en dan is de homocliene baan instabiel. En situatie 3 (en 4) analyseren we later. Dus omdat  $u_{\text{hom},x}$  niet continu meer is, geldt dus dat  $\lambda = 0$  geen eigenwaarde meer is.

Met precies dezelfde reden geldt dat  $\lambda = 0$  geen eigenwaarde is voor de homocliene banen in figuur 4(b). Ook met hetzelfde reden volgen voor de homocliene banen van figuur 4(b) dat  $\lambda = 0$  geen eigenwaarde meer is.

Ook voor situatie 3 en 4 is  $\lambda = 0$  ook geen eigenwaarde. Want de  $u_{\text{hom},x}$  is wel continu voor  $x = 0$ , maar niet differentieerbaar in  $x = 0$ , want de versnelling op  $x = 0$  is anders. Zie figuur 7.

Dus de homocliene banen met ruimtelijke inhomogeniteit zijn niet stabiel.

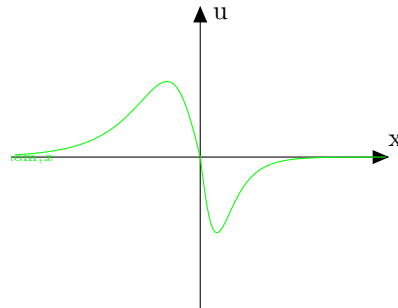




(a) De rode lijn is de homocliene baan van  $F_-(u)$ , de blauwe lijn is de homocliene baan van  $F_+(u)$  en de groene lijn is  $u_{\text{hom}}(x)$ .

(b) Grafiek van  $u_{\text{hom},x}$ .

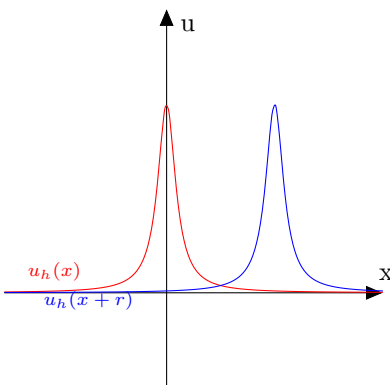
Figuur 6: Illustratie van  $u_{\text{hom}}$  en  $u_{\text{hom},x}$  van (4.2).



Figuur 7: Illustratie van  $u_{\text{hom},x}$  van situatie 3.

### 4.3 Translatie symmetrie

Een andere reden waarom  $\lambda = 0$  geen eigenwaarde meer kan zijn, kan worden gegeven door de translatie symmetrie. Laat  $u_{\text{hom}}$  de homocliene baan zijn van (3.2). De translatie symmetrie is eigenlijk de reden waarom  $u_{\text{hom},x}$  een eigenfunctie is bij  $\lambda = 0$ . De translatie symmetrie zegt dat als  $u_h(x)$  een homocliene baan, dan geldt ook dat  $u_h(x+r)$  een homocliene baan is voor alle  $r \in \mathbb{R}$ . Zie figuur 8.



Figuur 8: Illustratie van translatie symmetrie.

Uit figuur 8 zien we dat de versterking van  $u_h(x)$  naar  $u_h(x+r)$  de vorm niet laat krimpen of groeien. Dit heeft te maken met  $\lambda = 0$ , want  $e^{\lambda t}$  groeit of krimpt niet met  $\lambda = 0$ . Als we nu  $u_h(x+r)$  gaan tayloren rond  $x$  met  $r$  klein, dan volgt

$$u_h(x+r) = u_h(x) + ru_{h,x}(x) + \mathcal{O}(r^2) = u_h(x) + ru_{h,x}(x)e^{0 \cdot t} + \mathcal{O}(r^2).$$

Omdat er is aangenomen dat  $U(x,t) = u_{\text{hom}}(x) + \epsilon e^{\lambda t} v(x)$  met  $\epsilon$  klein, is hier  $v(x) = u_{h,x}(x)$  en  $\lambda = 0$ . Dit gaat niet lukken bij een systeem met ruimtelijk inhomogeniteit bij  $x = 0$ , want er is geen translatie symmetrie meer. Omdat je in dit geval  $x$  niet meer kunt verschuiven.

## 5 Gelokaliseerde defect

In dit hoofdstuk gaan we kijken naar systemen met een gelokaliseerd defect. Deze worden ook wel systemen met defect genoemd. Een voorbeeld hiervan is

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} + F(U) & |x| \geq L \\ U_t = U_{xx} + G(U) & |x| < L \end{cases}$$

Met  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gladde functies,  $F \neq G$  en  $L > 0$ , deze  $L$  is vrij te kiezen zodat er een homocliene baan bestaat. Voor  $|x| \geq L$  hebben we een oplossing van  $U_t = U_{xx} + F(U)$  en voor  $|x| < L$  hebben we een oplossing van  $U_t = U_{xx} + G(U)$ . Eerst zal er vooral worden gekeken naar de existentie van de homocliene banen in systemen met defect en daarna wordt de stabiliteit van een aantal homocliene banen bepaald. Omdat we geïnteresseerd zijn in homocliene banen, hebben we een aantal eisen nodig. Uit paragraaf 3.3 moeten we de volgende eisen hebben;  $F(0) = G(0) = 0$ ,  $F'(0), G'(0) < 0$  en er bestaan  $\hat{u}_1, \hat{u}_2 > 0$  met  $F(\hat{u}_1) = G(\hat{u}_2) = 0$ .

### 5.1 Existentie

Voor de existentie van de homocliene banen, moeten eerst weer de stationaire oplossingen worden bepaald. Als we  $U(x, t) = u(x)$  nemen, dan voldoen de stationaire oplossingen aan

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} = -F(u) & |x| \geq L \\ \frac{d^2 u}{dx^2} = -G(u) & |x| < L \end{cases} \quad (5.1)$$

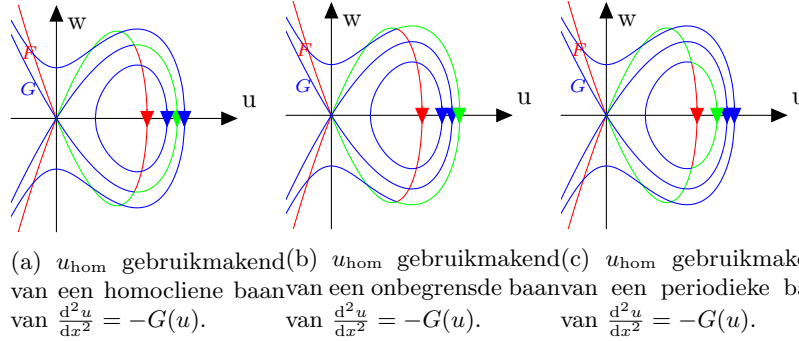
Deze kan worden geschreven naar het volgende hamiltoniaan,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \int F(u) du &= H_F \text{ voor } |x| \geq L \text{ met } H_F \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \int G(u) du &= H_G \text{ voor } |x| < L \text{ met } H_G \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Laat de 2 vergelijkingen hierboven gelden voor alle  $x \in \mathbb{R}$ , dus we halen de beperkingen  $|x| < L$  en  $|x| \geq L$  weg. Nu zijn er 2 verschillende hamiltoniaanse systemen, omdat  $G \neq F$ . Er geldt dat  $(0,0)$  een vaste punt is, nu geven  $H_F = 0$  en  $H_G = 0$  de homocliene baan bij  $(0,0)$  in respectievelijk  $\frac{d^2 u}{dx^2} = -F(u)$  en  $\frac{d^2 u}{dx^2} = -G(u)$ . Laat  $u_{\text{hom}F}$  de homocliene baan zijn van  $\frac{d^2 u}{dx^2} = -F(u)$  en  $u_{\text{hom}G}$  de homocliene baan zijn van  $\frac{d^2 u}{dx^2} = -G(u)$  voor alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Een homocliene baan in een systeem met defect springt van  $u_{\text{hom}F}$  naar een oplossing in  $\frac{d^2 u}{dx^2} = -G(u)$  en springt dan weer terug naar  $u_{\text{hom}F}$ , het moment van de sprongen is afhankelijk van  $L$ . Laat  $u_{\text{hom}}$  de homocliene baan is in (5.1).  $u_{\text{hom}}$  moet nu beginnen en eindigen met een gedeelte van  $u_{\text{hom}F}$ . Maar

nu hoeft het niet per se gebruik te maken van  $u_{\text{hom}G}$ . Want  $u_{\text{hom}}$  kan nu ook gebruik maken periodieke oplossingen, onbegrensde oplossingen of vaste punten in  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$  voor een zeker  $L$ . Zie figuur 9. En als er gebruik wordt gemaakt van de periodieke oplossingen en onbegrensde oplossingen, krijg je een andere  $L$  uit verschillende periodieke oplossing of onbegrensde oplossing. We kunnen zelfs bijvoorbeeld 3 keer langs een periodieke oplossing. En als er gebruikt gemaakt wordt van een vast punt, dan heb je voor iedere  $L > 0$  een homocliene baan. Dus voor één  $L$  kan er verschillende homocliene banen bestaan.



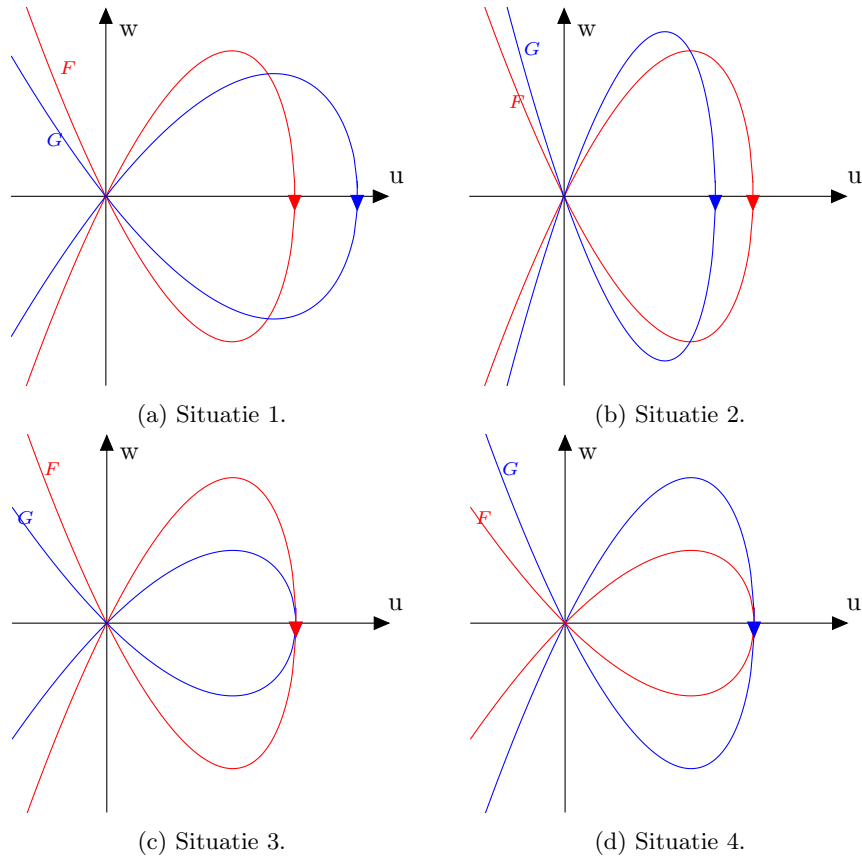
Figuur 9: Illustraties van mogelijke homocliene banen voor figuur 4(a) in (5.1). De rode lijnen zijn de homocliene banen met  $F(u)$ , de blauwe lijnen zijn de banen met  $G(u)$  en de groene lijnen zijn homocliene banen in (5.1).

Neem nu dat  $u_{\text{hom}F}$  en  $u_{\text{hom}G}$  hun maximum aannemen bij  $x = 0$ . Er zijn nu ook 4 mogelijke situaties voor liggingen van  $u_{\text{hom}F}$  en  $u_{\text{hom}G}$ , waarbij er een  $u_{\text{hom}}$  bestaat in (5.1). Deze zijn:

1. Voor  $|x| < L$  geldt dat  $u_{\text{hom}F}$  kleiner is dan  $u_{\text{hom}G}$  en voor  $|x| > L$  geldt dat  $u_{\text{hom}F}$  groter is dan  $u_{\text{hom}G}$ .
2. Voor  $|x| < L$  geldt dat  $u_{\text{hom}F}$  groter is dan  $u_{\text{hom}G}$  en voor  $|x| > L$  geldt dat  $u_{\text{hom}F}$  kleiner is dan  $u_{\text{hom}G}$ .
3. Voor alle  $x \in \mathbb{R}$  geldt dat  $u_{\text{hom}F}$  groter of gelijk is aan  $u_{\text{hom}G}$ .
4. Voor alle  $x \in \mathbb{R}$  geldt dat  $u_{\text{hom}F}$  kleiner of gelijk is aan  $u_{\text{hom}G}$ .

Merk op dat situatie 3 en 4 ook het geval is met wanneer  $u_{\text{hom}F}$  en  $u_{\text{hom}G}$  precies 1 snijpunt hebben bevat. Deze 4 situaties zijn geïllustreerd op figuur 10.

Bij situaties 1 en 2 kan er worden gebruik gemaakt van homocliene baan, periodieke oplossingen, onbegrensde oplossingen en het vaste punt van  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$ . Bij situatie 3 kan er alleen maar de onbegrensde oplossingen worden gebruikt. Bij situatie 4 kan er de periodieke oplossingen en het vaste punt worden gebruikt. Dus bij iedere situaties zijn er willekeurig veel homocliene banen afhankelijk van de keuze van  $L$ .



Figuur 10: Illustraties van mogelijke situaties van (5.1) waarbij een homocliene baan bestaat. De rode lijnen zijn de homocliene banen met  $F(u)$ , de blauwe lijnen zijn de homocliene banen met  $G(u)$ .

Nu gaan we bepalen welke waarde  $L$  er gekozen moet worden als we gebruik maken verschillende mogelijke banen in  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$ .

Stel dat  $u_{\text{onb}}$  een onbegrensde oplossing is van  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$ . We hebben de volgende hamiltoniaanse systemen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_x^2 + \int F(u)du &= 0 \\ \frac{1}{2}u_x^2 + \int G(u)du &= H_G. \end{aligned}$$

Deze is op te lossen en hieruit volgt een  $u^*$  en  $u_x^*$ . Dus  $(u^*, u_x^*)$  is het snijpunt van de onbegrensde oplossing met  $u_{\text{hom}F}$ . Laat nu  $M$  het maximum is de onbegrensde baan. Onze homocliene baan  $u_{\text{hom}}$  verblijft  $2L$  in de onbegrensde

oplossing van  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$ . Ook geldt dat  $u_x = \pm\sqrt{2(H_G - \int G(u)du)}$ . Deze kan worden geschreven naar  $x = \int \frac{du}{\sqrt{2(H_G - \int G(u)du)}}$ . Merk op dat voor  $x = L$  precies van  $u^*$  naar  $M$  geïntegreerd wordt. Dus geldt

$$L = \int_{u^*}^M \frac{du}{\sqrt{2(H_G - \int G(u)du)}}.$$

Dus voor een onbegrensde oplossing van  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$  geldt  $L = \int_{u^*}^M \frac{du}{\sqrt{2(H_G - \int G(u)du)}}$  met en  $u^*$  het snijpunt van de oplossingen en  $M$  het maximum van de onbegrensde oplossing. Zie figuur 11(a).

Stel dat  $u_{\text{per}}$  een periodieke oplossing is van  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$ . Nu hebben we 2 gevallen om verschillende homocliene banen te creëren. We weten dat een periodieke oplossing  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$  twee snijpunten heeft met  $u_{\text{hom}F}$ . Het eerste geval is via het eerste snijpunt erin en eruit gaan, dan is  $2L$  een veelvoud van de periode van periodieke oplossing. Het tweede geval is via het eerste snijpunt erin en via het tweede snijpunt eruit, dan is  $L$  van hetzelfde vorm als bij een onbegrensde oplossing.

Geval 1: Deze  $u_{\text{per}}(x)$  neemt een minimum  $m$  aan en een maximum  $M$ , deze zijn te bepalen via  $0 = H_G - \int G(u)du$ . Omdat er geldt dat  $u_x = 0$  bij het minimum of maximum. Ook geldt dat  $u_x = \pm\sqrt{2(H_G - \int G(u)du)}$ . Laat nu  $x_p$  de periode zijn van de periodieke oplossing van  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$ , dan volgt uit de voorgaande

$$\frac{1}{2}x_p = \int_m^M \frac{du}{\sqrt{2(H_G - \int G(u)du)}}.$$

Een homocliene baan  $u_{\text{hom}}$  verblijft  $2L$  in de periodieke oplossing van  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$ . En bovendien kan  $2L$  dan een veelvoud zijn  $x_p$ , omdat je bijvoorbeeld 3 keer om de periodieke oplossing kan gaan. Dus hieruit volgt

$$2L = kx_p = 2k \int_m^M \frac{du}{\sqrt{2(H_G - \int G(u)du)}} \iff L = k \int_m^M \frac{du}{\sqrt{2(H_G - \int G(u)du)}} \text{ met } k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Zie figuur 11(b).

Geval 2: We hebben de volgende hamiltoniaanse systemen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_x^2 + \int F(u)du &= 0 \\ \frac{1}{2}u_x^2 + \int G(u)du &= H_G. \end{aligned}$$

Deze is op te lossen en hieruit volgt een  $u^*$  en  $u_x^*$ . Dus  $(u^*, u_x^*)$  is het snijpunt van de periodieke oplossing met  $u_{\text{hom}F}$ . En  $u_{\text{per}}(x)$  heeft een maximum  $M$ . Analoog als voor het onbegrensde geval volgt nu

$$L = \int_{u^*}^M \frac{du}{\sqrt{2(H_G - \int G(u)du)}}.$$

Zie figuur 11(c).

Samengevoegd geldt er voor een periodieke oplossing van  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$  dat

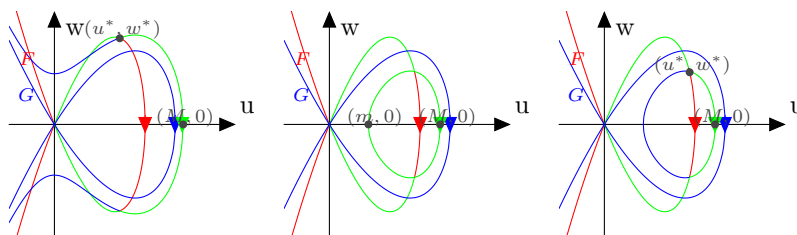
$$L = d \int_{u^*}^M \frac{du}{\sqrt{2(H_G - \int G(u)du)}} + k \int_m^M \frac{du}{\sqrt{2(H_G - \int G(u)du)}}$$

met  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,  $d \in 0, 1$  en  $u^*$  het snijpunt van de oplossingen. En  $m$  het minimum en  $M$  het maximum van de periodieke oplossing.

Stel dat  $u_{\text{hom}G}$  de homocliene baan is van  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$ . Dit is hetzelfde als bij het onbegrensde oplossing met  $H_G = 0$ .

Stel dat  $u^*$  een vaste punt is van  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$ . Nu geldt dat we voor alle  $L > 0$  een homocliene baan hebben.

Merk op dat de meesten allemaal elliptische integralen zijn. Deze zijn dus niet exact op te lossen en alleen met de computer te bepalen.



(a)  $u_{\text{hom}}$  gebruikmakend van een onbegrensde baan van  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$ . (b)  $u_{\text{hom}}$  gebruikmakend van een periodieke baan van  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$ . (c)  $u_{\text{hom}}$  gebruikmakend van een periodieke baan van  $\frac{d^2u}{dx^2} = -G(u)$ .

Figuur 11: Illustraties van mogelijke homocliene banen voor figuur 4(a) in (5.1) met hun belangrijke punten, die handige zijn om  $L$  te bepalen. De rode lijnen zijn de homocliene banen met  $F(u)$ , de blauwe lijnen zijn de banen met  $G(u)$  en de groene lijnen zijn homocliene banen in (5.1)

## 5.2 Stabiliteit

Om de stabiliteit van de homocliene banen te bepalen, moeten we kijken of  $\lambda = 0$  hier een eigenwaarde is en hoeveel nulpunten de bijbehorende eigenfunctie dan heeft. Laat  $u_{\text{hom}}$  een homocliene baan zijn van (5.1). Weer gaan we bestuderen hoe  $U(x, t)$  zich gedraagt in de buurt van  $u_{\text{hom}}(x)$ . Om antwoord hierop te krijgen introduceren we  $U(x, t) = u_{\text{hom}}(x) + \epsilon e^{\lambda t} v(x)$  met  $\epsilon$  klein. Analoog aan paragraaf 3.4 hebben we dat de functie  $v(x)$  een oplossing is van de singuliere Sturm-Liouville vergelijking,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_F v = \lambda v \text{ met } \mathcal{L}_F = \frac{d^2}{dx^2} + F'(u_h(x)) \text{ voor } |x| \geq L \\ \mathcal{L}_G v = \lambda v \text{ met } \mathcal{L}_G = \frac{d^2}{dx^2} + G'(u_h(x)) \text{ voor } |x| < L \end{cases}. \quad (5.2)$$

Laat  $u_{\text{hom}F}$  de homocliene baan zijn van  $\frac{d^2 u}{dx^2} = -F(u)$  en  $u_G$  de oplossing zijn die  $u_{\text{hom}}$  gebruikt in  $\frac{d^2 u}{dx^2} = -G(u)$ . Nu weten we

$$u_{\text{hom}} = \begin{cases} u_{\text{hom}F} & |x| \geq L \\ u_G & |x| < L \end{cases}$$

Hieruit volgt

$$u_{\text{hom},x} = \begin{cases} u_{\text{hom}F,x} & |x| \geq L \\ u_{G,x} & |x| < L \end{cases}$$

We weten nu uit **stelling 2** dat  $u_{\text{hom},x}$  voldoet aan (5.2). Maar  $u_{\text{hom},x}$  hoeft niet continu of differentieerbaar zijn. Dus  $u_{\text{hom},x}$  hoeft niet meteen een eigenfunctie te zijn bij  $\lambda = 0$ . Omdat er te veel mogelijke homocliene banen zijn, moeten er specifiekere keuzes voor  $F(U)$  en  $G(U)$  worden gemaakt zodat  $\lambda = 0$  een eigenwaarde is. Een aantal specifieke keuzes worden in de volgende paragrafen geanalyseerd.

## 5.3 Even en Oneven

In deze paragraaf wordt er alleen gekeken naar de begrensde homocliene baan  $u_{\text{hom}F}(x)$  van  $0 = u_{xx} + F(u)$  voor  $|x| \geq L$ . De Sturm-Liouville vergelijking die hierbij hoort is

$$\mathcal{L}_F v = \lambda v \text{ met } \mathcal{L}_F := \frac{d^2}{dx^2} + F'(u_{\text{hom}}) \text{ voor } |x| \geq L.$$

Deze vergelijking kan worden omgeschreven naar

$$\mathcal{L}_F v = \lambda v \text{ met } \mathcal{L}_F := \frac{d^2}{dx^2} + F'(u_{\text{hom}}) \text{ voor } x \geq L \quad (5.3)$$

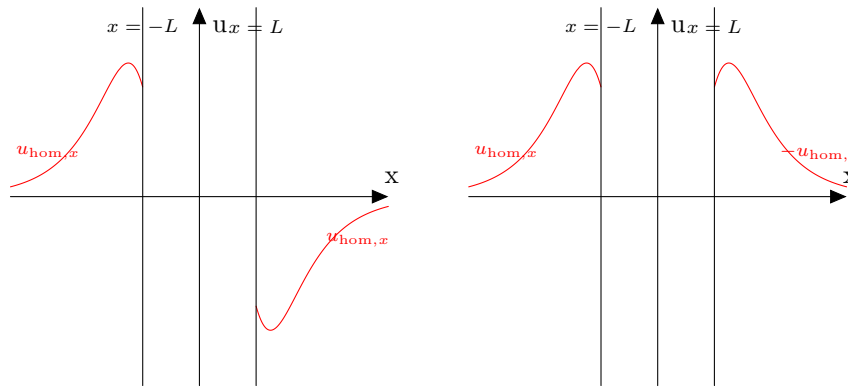
$$\mathcal{L}_F v = \lambda v \text{ met } \mathcal{L}_F := \frac{d^2}{dx^2} + F'(u_{\text{hom}}) \text{ voor } x \leq -L. \quad (5.4)$$



We weten dat  $c \cdot u_{\text{hom}F,x}$  met  $c \in \mathbb{R}$  een oplossing is van de (5.3) en (5.4). Nu worden de oplossingen van (5.3) en (5.4) apart bekeken. Het gebruikelijke was om  $u_{\text{hom}F,x}$  voor  $x \geq L$  en  $x \leq -L$  te nemen, maar dankzij het defect kan ook  $-u_{\text{hom}F,x}$  genomen worden voor  $x \geq L$  en  $u_{\text{hom}F,x}$  genomen worden voor  $x \leq -L$ . Want voor  $c = -1$  geldt dat  $-u_{\text{hom}F,x}$  ook een oplossing is van (5.3) en (5.4). Dus we hebben

$$u_{\text{hom}Fo,x} = \begin{cases} u_{\text{hom}F,x} & x \leq L \\ u_{\text{hom}F,x} & x \geq L \end{cases} \quad \text{en} \quad u_{\text{hom}Fe,x} = \begin{cases} u_{\text{hom}F,x} & x \leq L \\ -u_{\text{hom}F,x} & x \geq L \end{cases}$$

Zie figuur 12.



(a) Keuze met  $u_{\text{hom}F,x}$  voor  $x \geq L$  en  $x \leq -L$   
 (b) Keuze met  $-u_{\text{hom}F,x}$  voor  $x \geq L$  en  $u_{\text{hom}F,x}$  voor  $x \leq -L$ .

Figuur 12: Illustraties van mogelijke keuzes voor  $u_{\text{hom}F,x}$  in bepaalde domeinen.

Voor figuur 12(a) kan er alleen een oneven functie tussen passen voor  $|x| < L$  en voor figuur 12(b) kan er alleen een even functie tussen passen voor  $|x| < L$ . Merk nu op dat als er een geschikte even functie wordt gekozen voor figuur 12(b), dan is er een continue en differentieerbare eigenfunctie  $u_{\text{hom},x}$  met  $\lambda_0 = 0$ . Dus hebben we een stabiele homocliene baan.

Merk op dat we ook nog de spiegeling op de  $x$ -as van figuur 12(a) en figuur 12(b) als mogelijkheden kunnen hebben. Maar deze zijn precies  $-u_{\text{hom}Fo,x}$  en  $-u_{\text{hom}Fe,x}$ . Deze zijn dus hetzelfde met figuur 12(a) en 12(b) met symmetrie van de  $x$ -as. En heb je dus ook een oneven functie nodig bij  $-u_{\text{hom}Fo,x}$  en een even functie nodig bij  $-u_{\text{hom}Fe,x}$ .

## 5.4 Een eenvoudige homocliene baan

In deze paragraaf gaan we specifieke functie voor  $F(U)$  en  $G(U)$  bestuderen met homocliene banen. We beschouwen de volgende ODE

$$0 = u_{xx} \underbrace{-\alpha u + \beta u^3}_{F(u)} \text{ met } \alpha, \beta > 0. \quad (5.5)$$

We gaan eerst (5.5) analyseren en laten zien dat (5.5) een homocliene baan heeft. (5.5) kan worden omgeschreven naar het volgende stelsel

$$\begin{aligned} u_x &= w \\ w_x &= \alpha u - \beta u^3 = u(\alpha - \beta u^2). \end{aligned}$$

De vaste punten zijn dan  $(0, 0)$  en  $(\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, 0)$ . Ook geldt dat  $F'(0) = -\alpha < 0$  en dus is er een zadel bij  $(0, 0)$ . Hieruit volgt dan ook dat  $(\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, 0)$  een centrum is. En dus bestaat er een homocliene baan. Nu gokken we dat  $u(x) = \frac{A}{\cosh(Bx)}$  een oplossing is van (5.1) met  $A, B \in \mathbb{R}$ . Nu hebben we

$$\begin{aligned} u_x &= -AB \frac{\sinh(Bx)}{\cosh^2(Bx)} \\ u_{xx} &= -AB \left( \frac{B \cosh^3(Bx) - 2B \sinh^2(Bx) \cosh(Bx)}{\cosh^4(Bx)} \right) \\ &= -AB^2 \left( \frac{1}{\cosh(Bx)} - 2 \frac{\cosh^2(Bx) - 1}{\cosh^3(Bx)} \right) \quad (\sinh^2(Bx) = \cosh^2(Bx) - 1) \\ &= \frac{AB^2}{\cosh(Bx)} - \frac{2AB^2}{\cosh^3(Bx)} \end{aligned}$$

Als we dit nu invullen in (5.5) krijgen we

$$0 = \frac{AB^2}{\cosh(Bx)} - \frac{2AB^2}{\cosh^3(Bx)} - \frac{\alpha A}{\cosh(Bx)} + \frac{\beta A^3}{\cosh^3(Bx)}$$

Hieruit volgt nu het volgende stelsel

$$\begin{aligned} AB^2 &= \alpha A \\ 2AB^2 &= \beta A^3 \end{aligned}$$

Hieruit volgt  $B = \pm\sqrt{\alpha}$  en  $A = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}$ . Merk eerst op dat  $\cosh(-\sqrt{\alpha}x) = \cosh(\sqrt{\alpha}x)$  (door symmetrie van  $\cosh(x)$ ) en omdat we alleen kijken naar homocliene banen voor  $u(x) > 0$ , hebben we dus

$$u_{\text{hom}}(x) = \frac{\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}}{\cosh(\sqrt{\alpha}x)}. \quad (5.6)$$

### 5.5 Voorbeeld met $\lambda = 0$ een eigenwaarde.

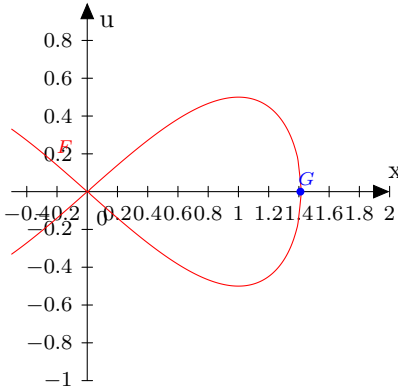
In deze paragraaf gaan we een systeem bekijken met homocliene baan waarvan de eigenwaarde  $\lambda = 0$  wel bestaat voor een geschikt gekozen  $L$ . We beschouwen het volgende systeem

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} \overbrace{-U + U^3}^{F(U)} & |x| \geq L \\ U_t = U_{xx} \underbrace{-2U + U^3}_{G(U)} & |x| < L \end{cases} \quad (5.7)$$

Als we naar de stationaire oplossingen  $u(x) = U(x, t)$  kijken, krijgen we

$$\begin{aligned} 0 &= u_{xx} - u + u^3 \text{ voor } |x| \geq L \\ 0 &= u_{xx} - 2u + u^3 \text{ voor } |x| < L. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Voor (5.8) weten we uit (5.6) dat  $u_{\text{hom}F} = \frac{\sqrt{2}}{\cosh(x)}$  een homocliene baan is. Nu heeft  $u_{\text{hom}F}(x)$  een maximum bij  $x = 0$  met waarde  $u = \sqrt{2}$ . Merk nu op dat  $(\sqrt{2}, 0)$  een vaste punt is van het stelsel van  $0 = u_{xx} - 2u + u^3$  (vorige paragraaf). Dus de homocliene baan van (5.8) gaat precies door het vaste punt  $(\sqrt{2}, 0)$  heen. Dus de homocliene baan door het vaste punt  $u_{\text{hom}}$  verblijft  $2L$  in het vaste punt. Nu geldt voor iedere  $L > 0$  dat we een stationaire homocliene baan in (5.8) hebben. Omdat  $u_{\text{hom}}$  niet altijd differentieerbaar is of continu voor iedere  $L$ , is  $\lambda = 0$  geen eigenwaarde voor iedere  $L$ . Zie figuur 13.



Figuur 13: Plot van het faseplaatje van (5.7) met de homocliene baan door het vaste punt van  $0 = u_{xx} - 2u + u^3$ .

Om de stabiliteit van  $u_{\text{hom}}(x)$  te bepalen kijken we naar de Sturm-Liouville

vergelijkingen. Deze zijn

$$\mathcal{L}_F v = \lambda v \text{ met } \mathcal{L}_F := \frac{d^2}{dx^2} - 1 + 3u_h^2 \text{ voor } |x| \geq L$$

$$\mathcal{L}_G v = \lambda v \text{ met } \mathcal{L}_G := \frac{d^2}{dx^2} + 4 \text{ voor } |x| < L.$$

We weten dat  $\frac{d}{dx} \frac{\sqrt{2}}{\cosh(x)}$  een oplossing is van  $\mathcal{L}_F v = \lambda v$  met  $\lambda = 0$ .  $\mathcal{L}_G v = \lambda v$  is makkelijk oplosbaar voor  $\lambda = 0$ , hieruit volgt  $v(x) = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x)$  met  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Nu moeten we alleen de randvoorwaarden bepalen zodat  $u_{\text{hom},x}$  continu en differentieerbaar is. Merk op dat  $\frac{d}{dx} \frac{\sqrt{2}}{\cosh(x)}$  en  $v(x)$  onderdeel zijn van  $u_{\text{hom},x}$ . De eerste randvoorwaarden zijn  $v(L) = v(-L) = 0$ , want  $u_{\text{hom}}$  springt naar het vaste punt  $(\sqrt{2}, 0)$  wanneer  $u_{\text{hom},x} = 0$ . We weten ook dat  $u_{\text{hom},xx} + F(u_{\text{hom}}) = 0$ . Hieruit volgt dat  $u_{\text{hom},xx}|_{x=\pm L} = -F(u_{\text{hom}}(\pm L)) = -F(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$

Even: Voor het even geval zijn er de volgende randvoorwaarden voor  $v$ ;  $v(-L) = v(L) = 0$ ,  $v'(-L) = -\sqrt{2}$  en  $v'(L) = \sqrt{2}$ . Hieruit volgen 4 vergelijkingen:

$$-c_1 \sin(2L) + c_2 \cos(2L) = 0 \quad (\text{i})$$

$$c_1 \sin(2L) + c_2 \cos(2L) = 0 \quad (\text{ii})$$

$$2c_1 \cos(2L) + 2c_2 \sin(2L) = -\sqrt{2} \quad (\text{iii})$$

$$2c_1 \cos(2L) - 2c_2 \sin(2L) = \sqrt{2}. \quad (\text{iv})$$

Als we (i)+(ii) en (iii)+(iv) doen, dan krijgen we respectievelijk  $2c_2 \cos(2L) = 0$  en  $4c_1 \cos(2L) = 0$ . Hieruit volgt direct dan  $\cos(2L) = 0$  en dit is precies wanneer  $2L = \frac{1}{2}\pi + k\pi$  voor  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , omdat  $L > 0$ . Nu volgt uit (i) en (ii) automatisch dat  $c_1 = 0$ . Uit (iii) en (iv) volgt nu

$$c_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2 \sin(2L)} = -\frac{\sqrt{2}}{2(-1)^k} = (-1)^{k+1} \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Dus we hebben dan

$$v_{e,k} = (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2t) \text{ en } 2L = \frac{1}{2}\pi + k\pi \text{ met } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Oneven: Voor het oneven geval zijn er de volgende randvoorwaarden voor  $v$ ;  $v(-L) = v(L) = 0$  en  $v'(-L) = -\sqrt{2} = v'(L) = -\sqrt{2}$ . Hieruit volgen weer 4 vergelijkingen:

$$-c_1 \sin(2L) + c_2 \cos(2L) = 0 \quad (\text{v})$$

$$c_1 \sin(2L) + c_2 \cos(2L) = 0 \quad (\text{vi})$$

$$2c_1 \cos(2L) + 2c_2 \sin(2L) = -\sqrt{2} \quad (\text{vii})$$

$$2c_1 \cos(2L) - 2c_2 \sin(2L) = -\sqrt{2}. \quad (\text{viii})$$

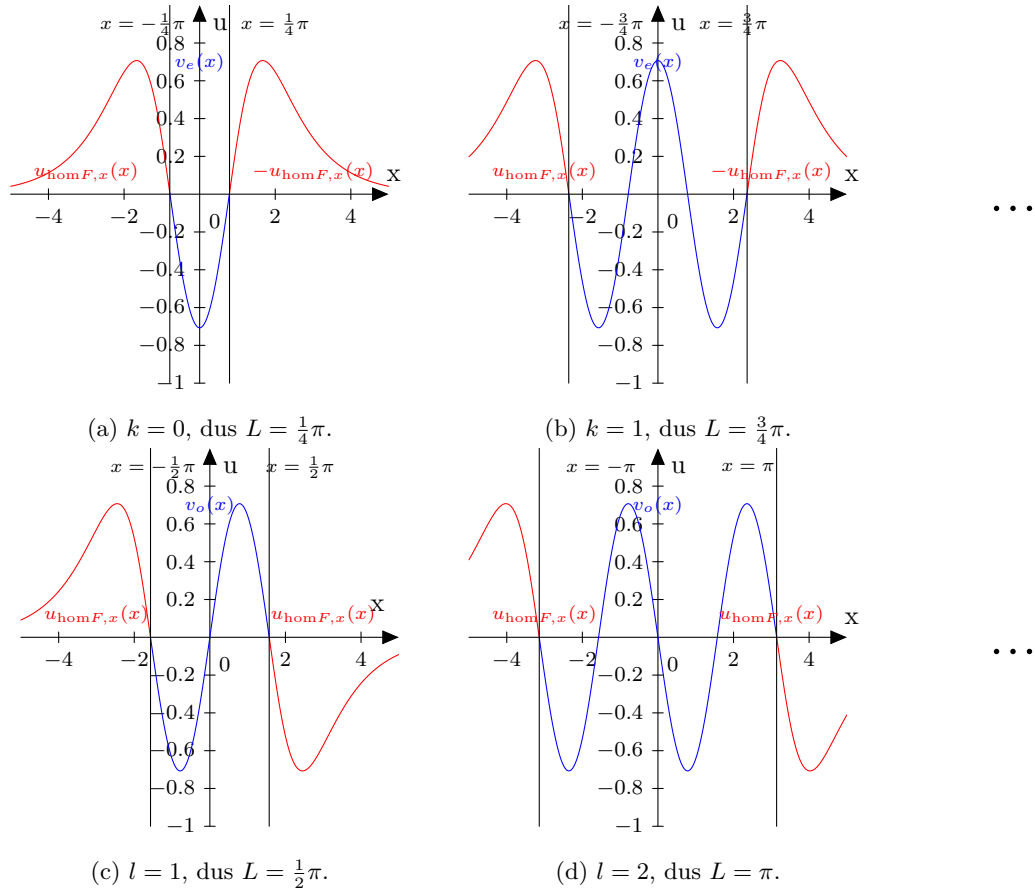
Als we (v)-(vi) en (vii)-(viii) doen, dan krijgen we respectievelijk  $-2c_2 \sin(2L) = 0$  en  $4c_1 \sin(2L) = 0$ . Hieruit volgt direct dan  $\sin(2L) = 0$  en dit is precies wanneer  $2L = l\pi$  voor  $l \in \mathbb{Z}_{>0}$  omdat  $L > 0$ . Nu volgt uit (v) en (vi) automatisch dat  $c_2 = 0$ . Uit (vii) en (viii) volgt nu

$$c_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2 \cos(2L)} = -\frac{\sqrt{2}}{2(-1)^l} = (-1)^{l+1} \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Dus we hebben dan

$$v_{e,k} = (-1)^{l+1} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2t) \text{ en } 2L = l\pi \text{ met } l \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Zie figuur 14 voor de plots met  $v_e$  en  $v_o$ .



Figuur 14: Plots van eigenfunctie  $u_{\text{hom},x}$  van (5.7) met verschillende homocliene banen door andere keuzes voor  $L$ .

Op figuur 14 worden de even en oneven oplossing geplot samen met  $\frac{\sqrt{2}}{\cosh(x)}$ . Uit figuur 14 halen we dat we  $L$  zo kiezen kunnen dat  $\lambda_i = 0$  voor  $i \geq 2$ . Maar voor  $\lambda_i = 0$  met  $i \geq 2$  geldt dat al deze homocliene banen instabiel zijn. Want alleen voor  $\lambda_0 = 0$  kan een homocliene baan stabiel zijn.

## 5.6 Stabiele homocliene baan?

In deze paragraaf gaan we proberen een stabiele homocliene baan te vinden. We beschouwen het volgende systeem

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} \overbrace{-U + 2U^3}^{F(U)} & |x| \geq L \\ U_t = U_{xx} \overbrace{-\alpha U + \beta U^3}^{G(U)} & |x| < L \end{cases} .$$

Met  $\alpha, \beta, L > 0$ . Deze  $\alpha, \beta$  en  $L$  worden straks bepaald zodat er een stabiele homocliene baan is. Als we naar de stationaire oplossingen  $u(x) = U(x, t)$  kijken, krijgen we

$$\begin{cases} 0 = u_{xx} - u + 2u^3 & \text{voor } |x| \geq L \\ 0 = u_{xx} - \alpha u + \beta u^3 & \text{voor } |x| < L \end{cases} . \quad (5.9)$$

Laat  $u_{\text{hom}}$  een homocliene baan zijn van (5.9). Om de stabiliteit van  $u_{\text{hom}}$  te bepalen kijken we naar de Sturm-Liouville vergelijkingen. Deze zijn

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F v &= \lambda v \text{ met } \mathcal{L}_F := \frac{d^2}{dx^2} - F'(u_{\text{hom}}) \text{ voor } |x| \geq L \\ \mathcal{L}_G v &= \lambda v \text{ met } \mathcal{L}_G := \frac{d^2}{dx^2} + G'(u_{\text{hom}}) \text{ voor } |x| < L. \end{aligned}$$

Omdat voor  $u_{\text{hom}}$  veel keuze is, kan dus een willekeurige oplossing van  $0 = u_{xx} - \alpha u + \beta u^3$  gekozen worden. Maar we gaan aannemen dat  $u_{\text{hom}}$  gebruikt maakt van  $u_{\text{hom}G}$ , de homocliene baan in  $0 = u_{xx} - \alpha u + \beta u^3$ . Dan hebben we dat  $u_{\text{hom}G} = u_{\text{hom}}$  voor  $|x| < L$ . Nu voldoet  $u_{\text{hom}G,x}$  met  $\lambda = 0$  aan

$$\mathcal{L}_G v = \lambda v \text{ met } \mathcal{L}_G := \frac{d^2}{dx^2} + G'(u_{\text{hom}G}). \quad (5.10)$$

Merk op dat dit een twee orde differentiaal vergelijking is, dus er zijn twee oplossing. Nu wordt de methode variatie van constante erop toegepast om de tweede oplossing te vinden. Stel dat voor de tweede oplossing  $u_2(x)$  geldt dat  $u_2(x) = c(x)u_{\text{hom}G,x}$  met  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Als  $u_2(x)$  wordt ingevuld in (5.10) met  $\lambda = 0$ , volgt hieruit

$$\begin{aligned} 0 &= c''(x)u_{\text{hom}G,x} + 2c'(x)u_{\text{hom}G,x} + c(x)u_{\text{hom}G,xxx} + c(x)G'(u_{\text{hom}G})u_{\text{hom}G,x} \\ &= c''(x)u_{\text{hom}G,x} + 2c'(x)u_{\text{hom}G,x} + c(x)(u_{\text{hom}G,xxx} + G'(u_{\text{hom}G})u_{\text{hom}G,x}) \\ &= c''(x)u_{\text{hom}G,x} + 2c'(x)u_{\text{hom}G,x}. \end{aligned}$$

Nu geldt

$$\begin{aligned}\frac{c''(x)}{c'(x)} &= -2 \frac{u_{\text{hom}G,xx}}{u_{\text{hom}G,x}} \\ \log|c'(x)| &= -2 \log|u_{\text{hom}G,x}| + C \text{ met } C \in \mathbb{R} \\ c'(x) &= K \frac{1}{u_{\text{hom}G,x}^2} \text{ met } K \in \mathbb{R} \\ c(x) &= K \int^x \frac{1}{u_{\text{hom}G,x}^2(\xi)} d\xi.\end{aligned}$$

Dus we hebben

$$u_2 = c(x)u_{\text{hom}G,x} = K u_{\text{hom}G,x} \int^x \frac{1}{u_{\text{hom}G,x}^2(\xi)} d\xi.$$

Uit (5.6) volgt dat  $u_{\text{hom}G} = \frac{A}{\cosh(Bx)}$  met  $B = \sqrt{\alpha}$  en  $A = \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}$ . Dus  $u_{\text{hom}G,x} = \frac{-AB \sinh(Bx)}{\cosh^2(Bx)}$ . Nu geldt

$$u_2 = \frac{-K \sinh(Bx)}{AB \cosh^2(Bx)} \int^x \frac{\cosh^4(B\xi)}{\sinh^2(B\xi)} d\xi.$$

Nu claimen we dat

$$\int^x \frac{\cosh^4(B\xi)}{\sinh^2(B\xi)} d\xi = \frac{1}{2B} \frac{\cosh^3(Bx)}{\sinh(Bx)} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2B} \frac{\cosh(Bx)}{\sinh(Bx)} + E \text{ met } E \in \mathbb{R}.$$

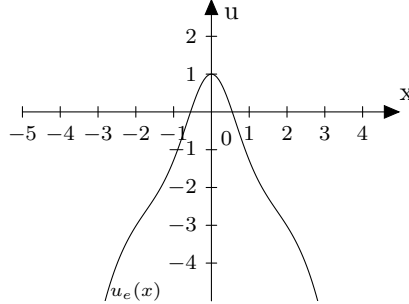
Laat  $\phi(x) = \frac{1}{2B} \frac{\cosh^3(Bx)}{\sinh(Bx)} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2B} \frac{\cosh(Bx)}{\sinh(Bx)} + E$ . Nu geldt

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{1}{2B} \frac{3B \cosh^2(Bx) \sinh^2(Bx) - B \cosh^4(Bx)}{\sinh^2(Bx)} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2B} \frac{B \sinh^2(Bx) - B \cosh^2(Bx)}{\sinh^2(Bx)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{3}{2} \left( \cosh^2(Bx) + 1 + \frac{1}{\sinh^2(Bx)} \right) - \frac{1 \cosh^4(Bx)}{2 \sinh^2(Bx)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{3}{2} \left( \frac{\sinh^4(Bx) + 2 \sinh^2(Bx) + 1}{\sinh^2(Bx)} \right) - \frac{1 \cosh^4(Bx)}{2 \sinh^2(Bx)} \\ &= \frac{3}{2} \left( \frac{(\sinh^2(Bx) + 1)^2}{\sinh^2(Bx)} \right) - \frac{1 \cosh^4(Bx)}{2 \sinh^2(Bx)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{3}{2} \left( \frac{\cosh^4(Bx)}{\sinh^2(Bx)} \right) - \frac{1 \cosh^4(Bx)}{2 \sinh^2(Bx)} \\ &= \frac{\cosh^4(Bx)}{\sinh^2(Bx)}.\end{aligned}$$

$$\text{met } (*) : \cosh^2(Bx) - \sinh^2(Bx) = 1$$

Neem nu  $E = 0$  want anders krijg je weer een  $u_{\text{hom}G,x}$  term erbij. Laat  $u_e(x)$  zijn met  $E = 0$ . Nu geldt

$$u_e = \frac{-K \sinh(Bx)}{AB \cosh^2(Bx)} \int^x \frac{\cosh^4(B\xi)}{\sinh^2(B\xi)} d\xi = -\frac{K}{2AB^2} \cosh(Bx) - \frac{3Kx \sinh(Bx)}{2AB \cosh^2(Bx)} + \frac{3K}{2AB^2} \frac{1}{\cosh(Bx)}.$$

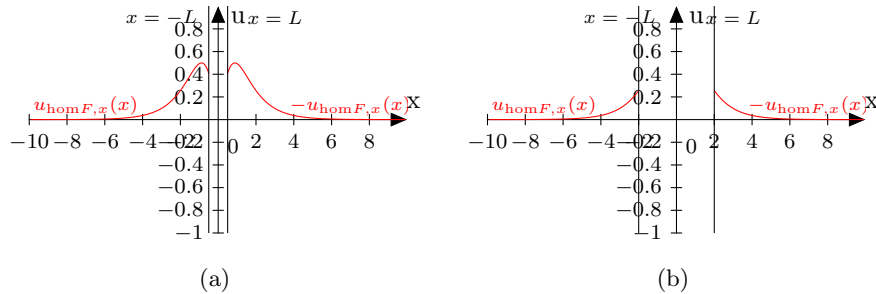


Figuur 15: Plot van  $u_e(x)$  voor  $K = 1$ ,  $A = 1$  en  $B = 1$ .

In figuur 15 is een plot gemaakt van  $u_e(x)$ . Door  $B$  en  $K$  te variëren kunnen respectievelijk de nulpunten en top verschoven worden. Merk ook op dat  $u_e(x)$  even is. Want er geldt

$$\begin{aligned} u_e(-x) &= -\frac{K}{2AB^2} \cosh(-Bx) - \frac{-3Kx \sinh(-Bx)}{2AB \cosh^2(-Bx)} + \frac{3K}{2AB^2} \frac{1}{\cosh(-Bx)} \\ &= -\frac{K}{2AB^2} \cosh(Bx) - \frac{3Kx \sinh(Bx)}{2AB \cosh^2(Bx)} + \frac{3K}{2AB^2} \frac{1}{\cosh(Bx)} = u_e(x). \end{aligned}$$

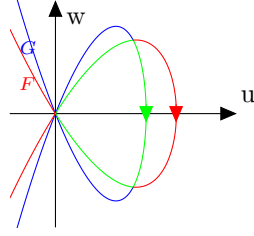
Laat  $u_{\text{hom}F}$  de homocliene baan zijn van  $0 = u_{xx} - u + 2u^3$ . Omdat we opzoek zijn naar een stabiele homocliene baan, moeten we  $u_{\text{hom}F,x}$  hebben voor  $x < -L$  en  $-u_{\text{hom}F,x}$  hebben voor  $x > L$ . Nu zijn er twee gevallen waarbij  $u_e(x)$  kan aansluiten met  $u_{\text{hom},x}$ . De twee gevallen zijn weergegeven op figuur 16.



Figuur 16: Mogelijke aansluiting voor van  $u_e(x)$  in  $u_{\text{hom},x}$ .



In figuur 16(a) kan niet  $K > 0$  kan  $u_e(x)$  niet eraan worden gesloten, want  $u_{\text{hom},x}$  is dan onmogelijk differentieerbaar bij  $x = \pm L$ . Wel kan  $u_e(x)$  passen in figuur 16(a) voor  $K < 0$ , maar dan hebben we sowieso 2 nulpunten en dan is  $u_{\text{hom}}$  niet stabiel. De enige mogelijkheid is om te proberen  $u_e(x)$  in figuur 16(b) te passen met de juiste randvoorwaarden. Dan moet  $u_{\text{hom}F}$  overspringen naar  $u_{\text{hom}G}$  voordat  $u_x$  zijn maximum bereikt heeft. Een faseplaatje hiervan wordt weergegeven op figuur 17.



Figuur 17: Illustratie van de stabiele homocliene baan behorend bij figuur 16(b). De rode lijn is de homocliene baan met  $F(u)$ , de blauwe lijn is de homocliene baan met  $G(u)$  en de groene lijn is  $u_{\text{hom}}$  van (5.9).

Nu gaan we proberen  $u_e(x)$  te matchen met  $u_{\text{hom}F}$  op  $\pm L$  op figuur 16(b). Uit (5.6) volgt dat  $u_{\text{hom}F} = \frac{1}{\cosh(x)}$ . De eerste 2 randvoorwaarden zijn  $u_{\text{hom}F}(\pm L) = u_{\text{hom}G}(\pm L)$ , want de homocliene banen moeten elkaar snijden. De andere 2 randvoorwaarden zijn  $u_{\text{hom}F,x}(-L) = u_e(-L)$  en  $-u_{\text{hom}F,x}(L) = u_e(L)$ , omdat we opzoek zijn naar een stabiele homocliene baan en dus moeten we voor  $x \geq L$   $-u_{\text{hom}F,x}$  hebben. En de laatste 2 randvoorwaarden zijn  $u_{\text{hom}F,xx}(-L) = u_{e,x}(-L)$  en  $-u_{\text{hom}F,xx}(L) = u_{e,x}(L)$ , omdat voor  $x \geq L$  we  $-u_{\text{hom}F,x}$  moeten hebben. Merk op dat

$$u_{e,x} = -\frac{K \sinh(Bx)}{2AB} - \frac{3K \sinh(Bx)}{AB \cosh^2(Bx)} - \frac{3Kx}{2A \cosh(Bx)} + \frac{3Kx \sinh^2(Bx)}{A \cosh^3(Bx)}$$

Nu krijgen we het volgende stelsel van vergelijkingen

$$\frac{1}{\cosh(-L)} = \frac{A}{\cosh(-BL)} \quad (\text{I})$$

$$\frac{1}{\cosh(L)} = \frac{A}{\cosh(BL)} \quad (\text{II})$$

$$-\frac{\sinh(-L)}{\cosh^2(-L)} = u_e(-L) \quad (\text{III})$$

$$\frac{\sinh(L)}{\cosh^2(L)} = u_e(L) \quad (\text{IV})$$

$$\frac{1}{\cosh(-L)} - \frac{2}{\cosh^3(-L)} = u_{e,x}(-L) \quad (\text{V})$$

$$-\frac{1}{\cosh(L)} + \frac{2}{\cosh^3(L)} = u_{e,x}(-L). \quad (\text{VI})$$

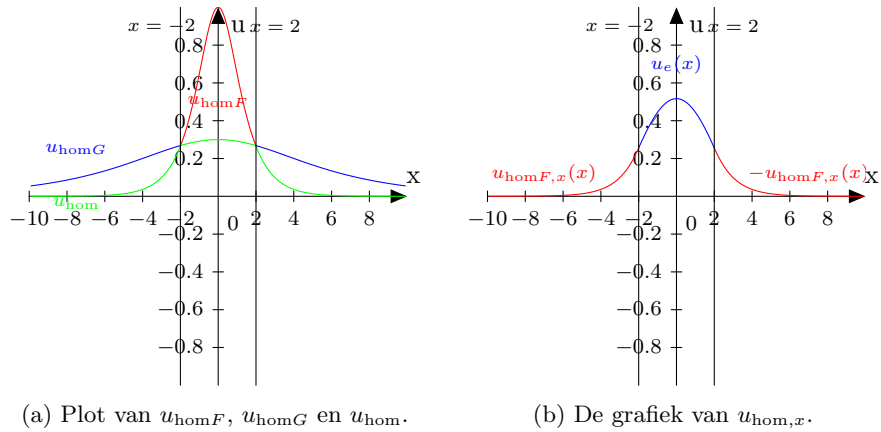
Deze stelsel kan vereenvoudigt worden. (I) en (II) zijn hetzelfde, omdat  $\cosh(x)$  een even functie is. (III) en (IV) zijn hetzelfde, omdat  $\sinh(x)$  oneven is en  $\cosh(x)$  en  $u_e(x)$  even zijn. (V) en (VI) zijn hetzelfde, omdat  $\cosh(x)$  even is en  $u_{e,x}(x)$  oneven is (afgeleide van een even functie). Dus nu volgt

$$\frac{1}{\cosh(L)} = \frac{A}{\cosh(BL)}$$

$$\frac{\sinh(L)}{\cosh^2(L)} = u_e(L)$$

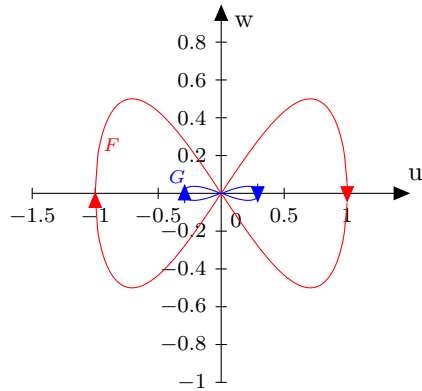
$$\frac{1}{\cosh(L)} - \frac{2}{\cosh^3(L)} = -u_{e,x}(L).$$

Er zijn hier 3 vergelijkingen met daarin 4 onbekenden  $A, B, K$  en  $L$ , daarom kan er 1 onbekende vrij worden gekozen. We nemen dan  $L = 2$  vast, want in figuur 16(b) geldt dan  $L$  na de top van  $u_{\text{hom}F,x}$  gekozen moet worden. Nu kan dit worden opgelost met MATLAB (ook met Maple). MATLAB geeft dan  $A = 0.2970810533$ ,  $B = 0.2402486972$ ,  $K = 0.008872718077$ ,  $L = 2.000000000$ . Deze resultaten zijn geplot op figuur 18.



Figuur 18: Plots van  $u_{\text{hom}}$  en  $u_{\text{hom},x}$  met  $A = 0.2970810533$ ,  $B = 0.2402486972$ ,  $K = 0.008872718077$ ,  $L = 2.000000000$ . De rode lijn is van de homocliene baan met  $F(u)$ , de blauwe lijn is van de homocliene baan met  $G(u)$  en de groene lijn is  $u_{\text{hom}}$  van (5.9).

Figuur 18 voldoet perfect aan onze eisen en lijkt te passen bij figuur 17. Maar als we het faseplaatje proberen te plotten, voldoet het niet. Er geldt namelijk ook  $\alpha = B^2 = 0.05771943651$  en  $\beta = \frac{2\alpha}{A^2} = 1.307983207$ . En als we kijken naar het  $(u, w)$  fase plaatje krijgen we het volgende plaatje.



Figuur 19: Faseplaatje van (5.9) met  $\alpha = 0.05771943651$  en  $\beta = 1.307983207$ .

In figuur 19 snijden de homocliene banen elkaar niet in de  $(u, w)$  faseplaatje. Dus we zijn die voorwaarde vergeten. Merk op dat de homocliene banen wel op figuur 18(a), maar daar hebben we dat  $u_{\text{hom}}(\pm L) = u_{\text{hom}G}(\pm L)$  maar de  $w = u_x$  zijn de niet gelijk voor  $x = \pm L$ . Dus snijden ze elkaar niet op figuur 18. Het snijpunt in het  $(u, w)$  faseplaatje kunnen we bepalen door de hamiltonianen

aan elkaar gelijk te stellen. We krijgen dan de volgende hamiltonianen

$$\begin{cases} u_x^2 = u^2 - u^4 & \text{voor } |x| \geq L \\ u_x^2 = \alpha u^2 - \frac{1}{2}\beta u^4 & \text{voor } |x| < L \end{cases} .$$

Als deze 2 aan elkaar worden gelijkgesteld, volgt hieruit

$$u^2 - u^4 = \alpha u^2 - \frac{1}{2}\beta u^4 \iff 1 - u^2 = \alpha - \frac{1}{2}\beta u^2 \iff (\frac{1}{2}\beta - 1)u^2 = \alpha - 1 \iff u^2 = \frac{\alpha - 1}{\frac{1}{2}\beta - 1} .$$

We hebben ook dat  $\alpha = B^2$  en  $\beta = \frac{2\alpha}{A^2} = \frac{2B^2}{A^2}$ . Dus geldt

$$u^2 = \frac{B^2 - 1}{\frac{B^2}{A^2} - 1} = \frac{A^2(B^2 - 1)}{B^2 - A^2} .$$

Merk ook op dat het tijdstip dat het snijpunt moet vallen is  $x = \pm L$ . Dus  $u(\pm L)^2 = \frac{1}{\cosh^2(L)}$ . Dus onze laatste voorwaarde is dan

$$\frac{1}{\cosh^2(L)} = \frac{A^2(B^2 - 1)}{B^2 - A^2} .$$

Onze stelsel wordt dan

$$\frac{1}{\cosh(L)} = \frac{A}{\cosh(BL)} \tag{X}$$

$$\frac{\sinh(L)}{\cosh^2(L)} = u_e(L) \tag{XI}$$

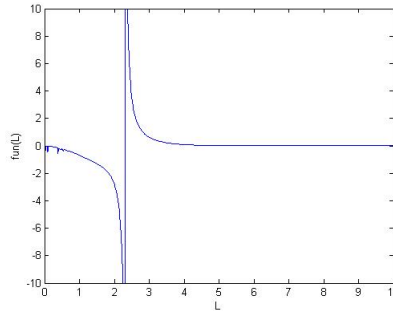
$$\frac{1}{\cosh(L)} - \frac{2}{\cosh^3(L)} = -u_{e,x}(L) \tag{XII}$$

$$\frac{1}{\cosh^2(L)} = \frac{A^2(B^2 - 1)}{B^2 - A^2} . \tag{XIII}$$

Allereerst geven de vergelijkingen (X), (XI), (XII) met een gekozen waarde van  $L$  de functies  $A(L), B(L)$  en  $K(L)$ . Nu kan (XIII) worden geschreven als

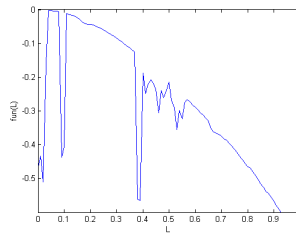
$$fun(L) = \frac{1}{\cosh^2(L)} - \frac{A^2(L)(B^2(L) - 1)}{B^2(L) - A^2(L)} = 0 .$$

Nu kan er met behulp van MATLAB een plot worden gemaakt van  $fun(L)$ . Zie figuur 20.



Figuur 20: Plot van  $\text{fun}(L)$  uitgezet tegen  $L$  van 0 tot 10 met stapgrootte 0.01 in MATLAB.

Uit figuur 20 zien we dat  $\text{fun}(L)$  een verticale asymptoot heeft bij ongeveer  $L = 2.3$  en een horizontale asymptoot bij de  $L$ -as. De stapgrootte is 0.01 en MATLAB verbindt alle puntjes en daarom hebben we rare lijn bij ongeveer  $L = 2.3$ . Deze verticale asymptoot wordt veroorzaakt door de term  $\frac{A^2(L)(B^2(L)-1)}{B^2(L)-A^2(L)}$ , dan geldt er namelijk dat  $B(L) = A(L)$ . Nu kan  $\text{fun}(L)$  alleen nulpunten hebben voor de asymptoot, want na de asymptoot is duidelijk te zien dat  $\text{fun}(L)$  groter is dan 0. Als er wordt ingezoomd wordt op het gebied voor de verticale asymptoot, krijgen we figuur 21.



Figuur 21: Plot van  $\text{fun}(L)$  uitgezet tegen  $L$  van 0 tot 1 met stapgrootte 0.01 in MATLAB.

In figuur 21 is er te zien dat er in 0 tot 1 ook geen nulpunten zijn. Er zijn ook rare schommelingen te zien. Deze ontstaan omdat  $L$  klein wordt, hierdoor worden  $A(L)$  en  $B(L)$  ook heel klein. Deze getallen kunnen te klein worden voor MATLAB. Maar dit heeft niet veel invloed op de nulpunten van  $\text{fun}(L)$ . Dus er bestaat geen  $L$  die voldoet aan de (X), (XI), (XII) en (XIII). Maar hieruit kunnen we concluderen dat  $\lambda_0 \neq 0$ . Dus  $u_{\text{hom}}$  is instabiel.

## 6 Conclusie

In deze bachelorscriptie hebben we als eerst naar de reactie diffusie vergelijking (1.1) gekeken. Deze vergelijking is vrij nauwkeurig geanalyseerd om de niveaurommes te bepalen bij het  $(u, w = u_x)$  faseplaatje. Dankzij de analyse konden er voorwaarden worden gevonden zodat er homocliene banen en heterocliene banen bestaan. Toen is er met behulp van de singuliere Sturm Liouville theorie aangetoond dat homocliene banen instabiel zijn en heterocliene banen stabiel.

Daarna introduceerden we ruimtelijke inhomogeniteit bij  $x = 0$  met als doel een stabiele homocliene baan te vinden. Hierna toonden we de existentie van homocliene banen in een systeem met ruimtelijk inhomogeniteit bij  $x = 0$ . En bij die homocliene banen is er ook gekeken naar de stabiliteit. Maar helaas waren alle homocliene banen instabiel.

Vervolgens beschouwden systemen met een gelokaliseerd defect. Bij systemen met een gelokaliseerd defect bleken er heel veel homocliene banen te zijn. Je kon namelijk in het defect ook gebruik maken van de vaste punten, periodieke oplossingen en onbegrensde banen voor  $|x| < L$ . Hierna keken we naar een systeem met defect met een homocliene baan door een vaste punt, hier vonden we dat  $\lambda = 0$  eigenwaarde is. Bovendien kon de index  $i$  van  $\lambda_i = 0$  verschoven worden naar alle  $i \geq 2$  door te variëren van  $L$ . Maar helaas ging de verschuiving niet de goede richting op en bleken alle homocliene banen door een vaste punt instabiel te zijn. En als laatst werd er gekeken naar mogelijke stabiele homocliene baan. We waren goed op weg, alles ging goed totdat het  $(u, w)$  faseplaatje niet klopt. Er bleek een voorwaarde te missen. Maar na het toevoegen van de laatste voorwaarde kon er met MATLAB geen oplossing worden gevonden. Dus uiteindelijk is er toch geen stabiele homocliene baan gevonden in een systeem met defect.

### 6.1 Vervolg onderzoek

Omdat er geen stabiele homocliene baan in een systeem met defect is gevonden, hebben we onze doelstelling niet gehaald. Dus we moeten verder zoeken naar een stabiele homocliene baan in een systeem met defect. Ondanks dat we in de paragraaf 5.6 geen stabiele homocliene baan hebben gevonden, kunnen we hieruit wel verder werken.  $F(u)$  en  $G(U)$  zijn namelijk daar specifiek in de vorm van  $-\alpha u + \beta u^3$  gekozen, maar er kan ook  $-\alpha u + \beta u^p$  worden genomen met  $p \in \mathbb{R}_{>1}$ . Zoals in [4] met  $-\alpha u + \beta u^p$  een algemene formule bepaald om alle eigenwaarden uit te rekenen in een systeem zonder defect. Merk op dat de vergelijkingen met  $-\alpha u + \beta u^p$  allemaal homocliene banen geven. Dankzij  $-\alpha u + \beta u^p$  is er nu een extra parameter  $p$ . Dan hebben de 4 vergelijking (X), (XI), (XII) en (XIII) nu 5 variabelen  $A, B, K, L$  en  $p$ . En als we nu een  $L$  vast kiezen, hebben we misschien wel een stabiele homocliene baan. Maar voor algemene  $p$  zijn de homocliene banen niet makkelijk expliciet te bepalen. En

helaas is dit te moeilijk voor een bachelorscriptie.

Als er uiteindelijk een  $A = A^*$ ,  $B = B^*$ ,  $K = K^*$ ,  $L = L^*$  en  $p = p^*$  gevonden is met  $\lambda_0 = 0$ , is er dus die homocliene baan die stabiel is in een systeem met defect. Voor vervolg onderzoek hierop kunnen we in buurt van  $(A^*, B^*, K^*, L^*, p^*)$  kijken en zoeken waarden die geven dat  $\lambda_0 < 0$ . Dan hebben we voor alle  $0 \leq i \leq N$  dat  $\lambda_i < 0$  met  $N \in \mathbb{N}$ , dus is onze puls dan spectraal stabiel. En dat zou een heel mooi resultaat zijn.

## Referenties

- [1] Peter Grindrod. *Patterns and Waves, the theory and application of reaction-diffusion equations*. Oxford applied mathematics and computing science series, 1991. p26.
- [2] Gianne Derks, Arjen Doelman, Christopher J. K. Knight, and Hadi Susanto. *Pinned fluxons in a Josephson junction with a finite-length inhomogeneity*. Euro. Jnl of Applied Mathematics (2012), vol. 23, 2012. p201-244.
- [3] Arjen Doelman and Frits Veerman. *An explicit theory for pulses in two component, singularly perturbed, reaction-diffusion equations*. Leiden University, 2012. p17-18.
- [4] Arjen Doelman, Robert A. Gardner, and Tasso J. Kaper. *Large Stable Pulse Solutions in Reaction-diffusion Equations*. Indiana University Mathematics Journal, Vol. 50, No.1, 2001. p17-18.



## MATLAB code voor het bepalen van $\text{fun}(L)$ .

```
function fcns=eqns(z)
    A=z(1);
    B=z(2);
    K=z(3);
    L=z(4);
    l=z(5);
    fcns(1)=1/cosh(L)-A/cosh(B*L);
    fcns(2)=(sinh(L)/((cosh(L))^2)+(1/2)*K*cosh(B*L)/(A*B^2)
        +(3/2)*K*L*sinh(B*L)/(A*B*(cosh(B*L))^2)-(3/2)*K/(A*B^2*cosh(B*L)));
    fcns(3)=1/cosh(L)-2/((cosh(L))^3)+(-(1/2)*K*sinh(B*L)/(B*A)
        -3*K*sinh(B*L)/(A*B*(cosh(B*L))^2)-(3/2)*K*L/(cosh(B*L)*A)
        +3*K*L*sinh(B*L)^2/(A*(cosh(B*L))^3));
    fcns(4)=L-l;
end

clear all;
clc;
tab=[]; %Tabel met benodigde gegevens.
j=1; %Teller van rij in tabel.
lmax=10; %Maximum waarde van L.
lstap=0.01; %Stapgrootte van L.
for i=0:lstap:lmax
    guess=[0.1 0.1 0.1 i i]; %begingok
    result=fsolve(@eqns,guess);
    tab(j,:)=[result(1) result(2) i]; %We maken de volgende kolommen [A(L) B(L) L].
    j=j+1;
end
m=j-1; %Maximum aantal rijen.
for k=1:m
    fun(k)=1/(cosh(tab(k,3)))^2-tab(k,1)^2*(tab(k,2)^2-1)/(tab(k,2)^2-tab(k,1)^2);
end
plot(tab(:,3),fun)
```