J.B. Blackshaw

Een bewijs van Boolos voor de onvolledigheid van de Peano rekenkunde

Bachelorscriptie, 4 juli 2012

Scriptiebegeleider: prof.dr. K.P. Hart

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1. De stelling van Boolos 2
1.1. Algoritme en uitvoer 3
1.2. Recursiviteit en representeerbaarheid 6
1.3. Gödelgetallen 7
1.4. Interpretaties en waarheid 9
2. Het bewijs voor de stelling van Boolos 11
2.1. De lengte van een welgevormde formule 13
2.2. De representeerbaarheid van omschrijven 15
2.3. Omschrijving door een welgevormde formule van minimale lengte 16
2.4. Boolos en Gödel 17
3. Voorbeeld van een Gödelstelling: de stelling van Goodstein 19
Referenties 21

1. De stelling van Boolos

De eerste onvolledigheidsstelling van Gödel geeft o.a. de onvolledigheid van de *Peano rekenkunde*. Dat wil zeggen, er is een uitspraak te formuleren in de taal van de Peano rekenkunde die niet bewezen kan worden in deze zelfde taal, maar wel waar is voor de standaard natuurlijke getallen. We zien meteen al dat begrippen als *taal van de Peano rekenkunde* en *waar voor de standaard natuurlijke getallen* een uitleg behoeven. Wat het begrip *waar voor de standaard natuurlijke getallen* betreft volstaat het nu nog even om kort te zijn: dat is alles wat wij waar achten aangaande de natuurlijke getallen en de axioma's van Peano. Wat betreft de *taal van de Peano rekenkunde* volstaat het om deze voorlopig te beschouwen als de verzameling van eindige rijtjes die men kan maken met symbolen uit de volgende verzameling:

$$S_A := \{+, \times, =, 0, \Rightarrow, \neg, \forall, x, a, f, A, ',), (\}$$

Opmerking 1.1. Voortaan zullen we met de *rekenkunde* de *Peano rekenkunde* bedoelen.

Voor deze scripite behandelen we een bewijs van George Boolos, gegeven omstreeks 1998, voor de onvolledigheid van de Peano rekenkunde. De formulering van dit resultaat, gegeven door Boolos, is als volgt:

Stelling 1.1 (Boolos)**.** *Er is geen algoritme wiens uitvoer alle en enkel alle ware uitspraken over de rekenkunde bevat.*

Het bewijs van Boolos maakt gebruikt van de zogeheten *paradox van Berry.*

Paradox van Berry. *Het kleinste getal dat niet te omschrijven is in minder dan vijfentwintig lettergrepen.*

Ten opzichte van de formulering van de eerste onvolledigheidsstelling van Gödel, waarvan alle onbekende begrippen en symbolen onderweg in dit hoofdstuk allemaal gedefinieerd worden, lijkt de stelling van Boolos een stuk eenvoudiger:

Stelling 1.2 (Eerst onvolledigheidsstelling van Gödel)**.** *Zij K een eerste-orde theorie met gelijkheid in de taal der rekenkunde welk voldoet aan de volgende drie eigenschappen:*

- *K heeft een recursieve axiomatisering.*
- $\vdash_K 0 \neq \overline{1}$.
- *Elke recursieve functie is representeerbaar in K.*

Dan is er een gesloten welgevormde formule $\mathfrak{G}$ van K zodanig dat geldt:

- *Als K consistent is, niet-$\vdash_K \mathfrak{G}$.*
- *Als K ω-consistent is, niet-$\vdash_K \neg\mathfrak{G}$.*

Het verschil in de lengte van beide stellingen zit hem in het begrip *algoritme* en *uitvoer* die in de stelling van Boolos voorkomen. In de loop van mijn scriptie zal ik het volgende doen:

- H1: Een algoritme definiëren in termen van begrippen uit de formele logica.
- H2: Een bewijs geven van de stelling van Boolos en het verband tussen de stelling van Boolos en de eerste onvolledigheidsstelling van Gödel nader onderzoeken.
- H3: Een voorbeeld geven van een zogenaamde *Gödelstelling.*

1.1. **Algoritme en uitvoer.** Om tot een beschrijving te komen van algoritme in termen van begrippen uit de formele logica, beginnen we met de definitie van een *eerste-orde theorie* die we nodig zullen hebben. Allereerst moeten we een aantal andere zaken definiëren.

Definitie 1.1. Een *eerste-orde taal* $\mathcal{L}$ bevat de volgende symbolen:
- De *logische operatoren* $\neg$ en $\Rightarrow$, en de universele quantor $\forall$.
- De *leestekens* linkerhaak (, rechterhaak), en de komma ,.
- Aftelbaar oneindig veel *individuele variabelen* $x_1, x_2, ...$
- Een aftelbare verzameling *functieletters*.
- Een aftelbare verzameling *individuele constanten*.
- Een niet-lege aftelbare verzameling *predikaatletters*.

Voorbeeld 1.1. De *taal der rekenkunde* $\mathcal{L}_A$ bevat het volgende:
- Een enkele predikaatletter A_1^2, en we schrijven $t = s$ voor $A_1^2(t, s)$.
- Een enkele individuele constante a_1, en we schrijven 0 voor a_1.
- Een drietal functieletters f_1^1, f_1^2 en f_2^2. We schrijven t' voor $f_1^1(t)$, $(t + s)$ voor $f_1^2(t, s)$, en $(t \cdot s)$ voor $f_2^2(t, s)$.

Opmerking 1.2. Zij E de verzameling van uitdrukkingen in de taal der rekenkunde. We definiëren de volgende afbeelding:

$$\bar{\cdot} : \mathbb{N}_0 \to E$$
$$\overline{0} = 0 \text{ en } \overline{n+1} = f_1^1(\overline{n})$$

Voorbeeld 1.2. $\overline{3}$ is de uitdrukking bestaande uit driemaal f_1^1 toegepast op 0:
$$\overline{3} = f_1^1(\overline{2}) = f_1^1(f_1^1(\overline{1})) = f_1^1(f_1^1(f_1^1(\overline{0}))) = f_1^1(f_1^1(f_1^1(0)))$$
Het bijzondere van een eerste-orde taal is, is dat deze ons in staat stelt om te quantificeren met behulp van de universele quantor. We hebben nog het begrip van *begrensde* en *vrije variabelen* nodig, alvorens over te kunnen gaan op het definiëren van een *eerste-orde theorie*.

Definitie 1.2. Zij $\mathcal{L}$ een eerste-orde taal. Zij y een individuele variabele van $\mathcal{L}$. In een expressie van de vorm $(\forall y)\mathfrak{B}$, met $\mathfrak{B}$ een expressie in $\mathcal{L}$, heet $\mathfrak{B}$ het *bereik* van de quantor $(\forall y)$.

Definitie 1.3. Zij $\mathcal{L}$ een eerste-orde taal. Een voorkomen van een individuele variabele x heet *begrensd* in een wf $\mathfrak{B}$ van $\mathcal{L}$, als x voorkomt in een quantor $(\forall x)$ in $\mathfrak{B}$, of als het betreffende voorkomen van x in het bereik ligt van een quantor $(\forall x)$. Anders heet het betreffende voorkomen van x *vrij*. Een individuele variabele x heet *vrij/begrensd* in een wf $\mathfrak{B}$ van $\mathcal{L}$ als het een vrije/begrensde voorkomen heeft in $\mathfrak{B}$.

Opmerking 1.3. Een individuele variabele x kan dus zowel vrij als begrensd zijn in éénzelfde wf.

Definitie 1.4. Zij $\mathcal{L}$ een eerste-orde taal. Onder een *term* van $\mathcal{L}$ verstaan we het volgende:
- Variabelen en individuele constanten zijn termen van $\mathcal{L}$.
- Als f_k^n een functieletter van $\mathcal{L}$ is, en $t_1, ..., t_n$ zijn termen van $\mathcal{L}$, dan is $f_k^n(t_1, ..., t_n)$ een term van $\mathcal{L}$.

Definitie 1.5. Zij $\mathcal{L}$ een eerste-orde taal. Zij A_k^n een predikaatletter van $\mathcal{L}$, en $t_1, ..., t_n$ termen van $\mathcal{L}$, dan is $A_k^n(t_1, ..., t_n)$ een *atomaire formule* van $\mathcal{L}$.

Definitie 1.6. Zij $\mathcal{L}$ een eerste-orde taal. Onder een *welgevormde formule*, of kortweg *wf*, van $\mathcal{L}$ verstaan we het volgende:

- Atomaire formules zijn wf's van $\mathcal{L}$.
- Als $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{C}$ wf's zijn van $\mathcal{L}$, en y een variabele van $\mathcal{L}$ is, dan zijn $(\neg\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{C})$, en $((\forall y)\mathfrak{B})$ wf's van $\mathcal{L}$.

Definitie 1.7. Zij $\mathcal{L}$ een eerste-orde taal, zij $\mathfrak{B}$ een wf van $\mathcal{L}$, zij t een term van $\mathcal{L}$, en zij x_i een variabele van $\mathcal{L}$. Dan heet t *vrij voor* x_i in $\mathfrak{B}$ als geen vrije voorkomen van x_i in $\mathfrak{B}$ in het bereik ligt van een quantor $(\forall x_j)$, met x_j een variabele in t.

Voorbeeld 1.3. Zij $\mathcal{L}$ een eerste-orde taal met de variabelen x_1 en x_2, een functieletter f_1^2 en een predikaatletter A_1^2. Gegeven is dat $\mathfrak{B}_i$ gegeven door $(\forall x_i)A_1^2(x_1, x_2)$, met $i \in \{1, 2\}$, een wf is van $\mathcal{L}$. Beschouw de term t gegeven door $f_1^2(x_1, x_2)$:

- Dan is t vrij voor x_1 in $\mathfrak{B}_1$, aangezien $\mathfrak{B}_1$ geen vrije voorkomens van x_1 heeft.
- Dan is t niet vrij voor x_1 in $\mathfrak{B}_2$, aangezien een vrije voorkomen van x_1 in $\mathfrak{B}_2$ in het bereik ligt van de quantor $(\forall x_2)$, en x_2 is een variabele in t.

In het geval $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A$, en noteer x_1 met x en x_2 met y, zien we dus dat de term $x + y$ vrij is voor x in de wf $(\forall x)x = y$, omdat als we iedere vrije voorkomen van x in deze wf vervangen door $x + y$, geen enkele variabele in $x + y$ een begrensde voorkomen heeft in de resulterende wf. In dit geval komt dat omdat de wf waar we mee beginnen geen vrije voorkomen van x heeft. We zien dus ook dat de term $x + y$ niet vrij is voor x in de wf $(\forall y)x = y$, omdat na substitutie van alle vrije voorkomens van x in de wf voor $x + y$ we de wf $(\forall y)x + y = y$ krijgen. Hierin is y een variabele van $x + y$ en begrensd in de resulterende wf.

Definitie 1.8. Zij $\mathcal{L}$ een eerste-orde taal. Een *eerste-orde theorie* K in de taal $\mathcal{L}$ heeft als symbolen en wf's die van $\mathcal{L}$ zijn, en als *axioma's* een aangewezen deelverzameling van de verzameling van deze wf's. De axioma's worden in twee soorten verdeeld, en de een eerste-orde theorie heeft de volgende *afleidingsregels*:

- Zij $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ wf's van $\mathcal{L}$. Dan zijn de volgende wf's *logische axioma's* van K:
  - (A1) $\mathfrak{B} \Rightarrow (\mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{B})$
  - (A2) $(\mathfrak{B} \Rightarrow (\mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{D})) \Rightarrow ((\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{C}) \Rightarrow (\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{D}))$
  - (A3) $(\neg\mathfrak{C} \Rightarrow \neg\mathfrak{B}) \Rightarrow ((\neg\mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{B}) \Rightarrow \mathfrak{C})$
  - (A4) $(\forall x_i)\mathfrak{B}(x_i) \Rightarrow \mathfrak{B}(t)$ als $\mathfrak{B}(x_i)$ een wf is van $\mathcal{L}$ en t een term is van $\mathcal{L}$ die vrij is voor x_i in $\mathfrak{B}(x_i)$.
  - (A5) $(\forall x_i)(\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{C}) \Rightarrow (\mathfrak{B} \Rightarrow (\forall x_i)\mathfrak{C})$ als $\mathfrak{B}$ geen vrije voorkomens van x_i bevat.
- De *proper axioma's*, verschilt van theorie tot theorie. Een eerste orde theorie welke geen proper axioma's heeft, heet een eerste orde *predikatencalculus*.
- De *afleidingsregels* van elke eerste-orde theorie worden gegeven door:
  - (MP) Modus ponens: $\mathfrak{C}$ volgt uit $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{C}$.
  - (Gen) Generalisatie: $(\forall x_i)\mathfrak{B}$ volgt uit $\mathfrak{B}$.

Opmerking 1.4. De begrippen *eerste-orde theorie* en *theorie* zullen door elkaar gebruikt worden en verwijzen allemaal naar het begrip *eerste-orde theorie*.

Voorbeeld 1.4. De *Peano rekenkunde* is een eerste-orde theorie in de taal de rekenkunde (zie voorbeeld 1.1). De proper axioma's (S1) tot en met (S9) van de zogeheten *Peano rekenkunde* S zijn als volgt:

(S1) $x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 = x_3)$
(S2) $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1' = x_2'$
(S3) $0 \neq x_1'$
(S4) $x_1' = x_2' \Rightarrow x_1 = x_2$
(S5) $x_1 + 0 = x_1$
(S6) $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$
(S7) $x_1 \cdot 0 = 0$
(S8) $x_1 \cdot (x_2)' = (x_1 \cdot x_2) + x_1$
(S9) $\mathfrak{B}(0) \Rightarrow ((\forall x)(\mathfrak{B}(x) \Rightarrow \mathfrak{B}(x')) \Rightarrow (\forall x)(\mathfrak{B}(x))$ voor elke wf $\mathfrak{B}(x)$ van S.

Definitie 1.9. Zij K een theorie. Een *bewijs* in K is een rij $\mathfrak{B}_1, ..., \mathfrak{B}_k$ van wf's van K zodanig dat voor elke $i \in \{1, ..., k\}$ geldt:

- $\mathfrak{B}_i$ is een axioma van K, of,
- $\mathfrak{B}_i$ is een directe gevolg van voorgaande wf's in de rij, volgend uit één van de afleidingsregels van K.

Definitie 1.10. Zij K een theorie. Een *stelling* van K is een wf $\mathfrak{B}$ van K zodanig dat $\mathfrak{B}$ de laatste wf is in een bewijs binnen K. Zo'n bewijs heet een *bewijs van* $\mathfrak{B}$ *binnen* K.

Opmerking 1.5. Zij K een theorie en zij $\mathfrak{B}$ een stelling van K. Dan noteren we dat $\mathfrak{B}$ een stelling is van K met $\vdash_K \mathfrak{B}$.

Definitie 1.11. Zij K een theorie, zij $\mathfrak{C}$ een wf van K, en zij Γ een verzameling van wf's van K. Dan heet $\mathfrak{C}$ een *gevolg* in $\mathfrak{T}$ van Γ dan en slechts dan als er een rij $\mathfrak{B}_1, ..., \mathfrak{B}_k$ van wf's is met $\mathfrak{B}_k$ gelijk aan $\mathfrak{C}$, en voor alle $i \in \{1, ..., k-1\}$ geldt verder dat $\mathfrak{B}_i$ een axioma is van K, of $\mathfrak{B}_i \in \Gamma$, of $\mathfrak{B}_i$ is een direct gevolg van voorgaande wf's in de rij, volgend uit één van de afleidingsregels van K.

Opmerking 1.6. Zij K een theorie, zij $\mathfrak{C}$ een wf van K, en zij Γ een verzameling van wf's van K. Dan noteren we dat $\mathfrak{C}$ een gevolg is in K van Γ met $\Gamma \vdash_K \mathfrak{C}$.

Voorbeeld 1.5. Zij K een eerste-orde theorie met wf's $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$. Beschouw dan de volgende rij $(\mathfrak{B}_i)_{i=1}^7$ van wf's in K:

$\mathfrak{B}_1$: $\mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{D}$
$\mathfrak{B}_2$: $(\mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{D}) \Rightarrow (\mathfrak{B} \Rightarrow (\mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{D}))$
$\mathfrak{B}_3$: $\mathfrak{B} \Rightarrow (\mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{D})$
$\mathfrak{B}_4$: $(\mathfrak{B} \Rightarrow (\mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{D})) \Rightarrow ((\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{C}) \Rightarrow (\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{D}))$
$\mathfrak{B}_5$: $(\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{C}) \Rightarrow (\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{D})$
$\mathfrak{B}_6$: $\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{C}$
$\mathfrak{B}_7$: $\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{D}$

Nemen we $\Gamma = \{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_6\}$, dan geldt $\Gamma \vdash_K \mathfrak{B}_7$. Hierboven staat namelijk een bewijs (hierbij staat Ver voor *Veronderstelling*):

1. $\mathfrak{B}_1$ Ver
2. $\mathfrak{B}_2$ (A1)
3. $\mathfrak{B}_3$ 1, 2, MP
4. $\mathfrak{B}_4$ (A2)
5. $\mathfrak{B}_5$ 3, 4, MP
6. $\mathfrak{B}_6$ Ver
7. $\mathfrak{B}_7$ 5, 6, MP

Definitie 1.12. Zij K een eerste-orde theorie waarvan in elk geval de predikaatletter A_1^2 aanwezig is, te noteren met het gelijkheidsteken $=$. Dan heet K een *eerste-orde theorie met gelijkheid* als we de volgende stellingen hebben in K:

(A6) $(\forall x_1)x_1 = x_1$
(A7) $x = y \Rightarrow (\mathfrak{B}(x,x) \Rightarrow \mathfrak{B}(x,y))$

Waarbij x_1, x en y variabelen zijn, $\mathfrak{B}(x,x)$ een wf, en $\mathfrak{B}(x,y)$ ontstaat uit $\mathfrak{B}(x,x)$ door een aantal vrije voorkomens van x te vervangen voor y onder de voorwaarde dat y vrij is voor x in $\mathfrak{B}(x,x)$.

We willen natuurlijk dat een algoritme geen tegenstrijdige uitvoer produceert. Hiervoor eisen we *consistentie* en *ω-consistentie.*

Definitie 1.13. Een theorie K heet *consistent* als voor elke wf $\mathfrak{B}$ niet geldt dat zowel $\mathfrak{B}$ als $\neg\mathfrak{B}$ bewijsbaar zijn.

Definitie 1.14. Zij K een eerste-orde theorie in een taal met de individuele constante 0 en de functieletter f_1^1. Dan heet K *ω-consistent* als voor elke wf $\mathfrak{B}(x)$ met precies één vrije variabele geldt, als $\vdash_K \neg\mathfrak{B}(\overline{n})$ voor elk natuurlijk getal n, dan geldt niet $\vdash_K (\exists x)\mathfrak{B}(x)$.

Voorbeeld 1.6. De Peano rekenkunde is een voorbeeld van een theorie welke niet ω-consistent is, en de verzamelingenleer is een theorie welke wel ω-consistent is, zie ook hoofdstuk 3 en opmerking 3.2.

Opmerking 1.7. Zij K een eerste-orde theorie in een taal met de individuele constante 0 en de functieletter f_1^1. Als K ω-consistent is, dam is K ook consistent.[2]

We zijn nu bijna zover om het begrip algoritme te definiëren. Wat we nu nog nodig hebben is de begrippen *recursiviteit* en *representeerbaarheid*, en we moeten de zogeheten *Gödelnummering* definiëren. Dit gebeurt in de volgende twee deelparagraven.

1.2. **Recursiviteit en representeerbaarheid.** Een algoritme voert *berekenbare* operaties uit, wat wil zeggen dat de operaties *recursief* zijn.

Definitie 1.15. De volgende functies met als domein een product van $\mathbb{N}_0^n$, met $n \in \mathbb{N}$, en als codomein $\mathbb{N}_0$, heten *initiële functies*:

- De *nulfunctie*, $Z(x) = 0$ voor alle x.
- De *opvolgerfunctie*, $N(x) = x + 1$ voor alle x.
- De *projectie*, $U_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ voor alle x_i.

De volgende functies zijn *primitief recursief*:

- Alle initiële functies zijn primitief recursief.
- Functies verkregen middels substitutie: als $g(y_1, \ldots, y_m), h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)$ primitief recursief zijn, dan is de volgende functie primitief recursief:
$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$$
- Functies verkregen middels recursie: als $g(x_1, \ldots, x_n)$, $h(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ primitief recursief zijn, dan is $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ als volgt gedefinieerd ook primitief recursief:
$$f(x_1, \ldots, x_n, 0)$$
$$f(x_1, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$$

De volgende functies zijn *recursief*:

- Alle primitief recursieve functies zijn recursief.
- Functies verkregen middels substitutie met recursieve functies.
- Functies verkregen middels recursie met recursieve functies.
- Functies verkregen met de beperkte μ-operator: zij $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ recursief en zodanig dat voor elke $x_1, \ldots, x_n$ geldt dat er tenminste één y is waarvoor geldt $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$. Dan is de volgende functie recursief:

$$\mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0) := \min\{z : g(x_1, \ldots, x_n, z) = 0\}$$

Kortom, we stellen dat de verzameling primitief recursieve functies gesloten is onder substitutie en recursie, en dat de verzameling recursieve functies gesloten is onder substitutie, recursie en samenstelling met de beperkte μ-operator. Beide verzamelingen bevatten per definitie de initiële functies.

Opmerking 1.8. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ noemen we functies $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ en n-voudige relaties op $\mathbb{N}_0$ respectievelijk *getaltheoretische functies* en *getaltheoretische relaties.*

We stellen dat een getaltheoretische relatie $R(x_1, ..., x_n)$ (primitief) recursief is, als zijn karakteristieke functie $C_R(x_1, ..., x_n)$ dat is:

$$C_R(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 0 & x_1, ..., x_n \text{ staan in relatie tot elkaar m.b.t. } R \\ 1 & x_1, ..., x_n \text{ staan niet in relatie tot elkaar m.b.t. } R \end{cases}$$

We zullen verder willen dat de recursieve operaties die ons algoritme uitvoert leidt tot toegestane uitvoer. Hiervoor hebben we de definitie van *representeerbaarheid* nodig.

Definitie 1.16. Zij K een eerste-orde theorie met gelijkheid in de taal der rekenkunde. Zij f een getaltheoretische functie in $n \in \mathbb{N}$ variabelen. Dan heet f *representeerbaar* in K d.e.s.d.a. er een wf $\mathfrak{B}(x_1, ..., x_n, y)$ van K is met vrije variabelen $x_1, ..., x_n, y$ zodanig dat geldt:

$$f(k_1, ..., k_n) = m \text{ d.e.s.d.a. } \vdash_K \mathfrak{B}(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{m})$$

Definitie 1.17. Zij K een eerste-orde theorie met gelijkheid in de taal der rekenkunde zodanig dat $\vdash_K 0 \neq \overline{1}$. Een getaltheoretische relatie R heet *uit te drukken* in K d.e.s.d.a. zijn karakteristieke functie C_R representeerbaar is in K.

We zullen voor ons algoritme eisen dat recursieve functies representeerbaar zijn in ons algoritme. In dat geval zullen de operaties van ons algoritme toegepast op toegestane invoer, toegestane uitvoer produceren. Allereerst moeten we van een eerste-orde theorie symbolen, wf's en bewijzen uniek weten te nummeren.

1.3. **Gödelgetallen.** We zijn nu zover om de zogeheten *Gödelnummering* te definiëren. De Gödelnummering stelt ons in staat om ieder symbool, iedere wf en elke rij wf's in een eerste-orde theorie uniek te nummeren, gebruik makende van unieke priemfactorisatie.

Definitie 1.18. Zij $\mathcal{L}$ een eerste-orde taal en zij K een eerste-orde theorie in de taal $\mathcal{L}$. Zij $\mathcal{E}$ de verzameling expressies van $\mathcal{L}$ en zij $\mathcal{S}$ de verzameling eindige rijen van expressies. Dan definiëren we $g : \mathcal{L} \sqcup \mathcal{E} \sqcup \mathcal{S} \to \mathbb{N}$ als volgt:

$$g(() = 3, \quad g()) = 5, \quad g(,) = 7 \quad g(\neg) = 9, g(\Rightarrow) = 11, g(\forall) = 13,$$

$$g(x_k) = 13 + 8k \quad k \geq 1 \quad g(a_k) = 7 + 8k \quad k \geq 1$$

$$g(f_k^n) = 1 + 8(2^n 3^k) \quad k, n \geq 1 \quad g(A_k^n) = 3 + 8(2^n 3^k) \quad k, n \geq 1$$

Voor $u \in \mathcal{L}$ heet $g(u)$ het *Gödelgetal* van u. Zij p_i het i-de priemgetal voor $i \geq 0$ en $p_0 := 2$, en zij $(u_i)_{i=0}^m \in \mathcal{E}$. Dan definiëren we

$$g((u_i)_{i=0}^m) = \prod_{i=0}^m p_i^{g(u_i)}$$

Zij nu $(e_i)_{i=0}^m \in \mathcal{S}$. Dan definiëren we:

$$g((e_i)_{i=0}^m) = \prod_{i=0}^m p_i^{g(e_i)}$$

Opmerking 1.9. We beschouwen een symbool $u \in \mathcal{L}$ ongelijk aan de expressie $(u) \in \mathcal{E}$, dus (u) is de expressie met als enige symbool u. Net zo beschouwen we $e \in \mathcal{E}$ ongelijk aan $(e) \in \mathcal{S}$. We hebben dus dat $\mathcal{L}$, $\mathcal{E}$ en $\mathcal{S}$ paarsgewijs disjunct zijn.

We zijn dus nu in staat om, dankzij bovenstaande Gödelnummering, symbolen, wf's en rijen van wf's uniek te nummeren. We willen dat het voor een algoritme makkelijk te achterhalen is of men met het Gödelgetal van een individuele constante, functieletter, predikaatletter of proper axioma te maken heeft.

Definitie 1.19. Een eerste-orde theorie K heeft een *(primitief) recursieve vocabulaire* als de volgens eigenschappen (primitief) recursief zijn:

(a) IC(y): y is het Gödelgetal van een individuele constante in K.
(b) FL(y): y is het Gödelgetal van een functieletter van K.
(c) PL(y): y is het Gödelgetal van een predikaatletter van K.

Voorbeeld 1.7. Zij K een eerste-orde theorie met precies twee individuele constanten a_1 en a_2, met precies één functieletter f_1^1 en met precies één predikaatletter A_1^1. In dit geval zijn de drie relaties IC, FL en PL primitief recursief. Merk daartoe op dat de getaltheoretische functies $x \cdot y$, $|x - y|$ en $\mathrm{sg}(x)$ primitief recursief zijn (zie Mendelson), met $\mathrm{sg}(x)$ gegeven door

$$\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

De karakteristieke functies van de relaties IC, FL en PL worden dan gegeven door:

$$C_{\mathrm{IC}}(y) = \mathrm{sg}(|y - g(a_1)|) \cdot \mathrm{sg}(|y - g(a_2)|)$$
$$C_{\mathrm{FL}}(y) = \mathrm{sg}\left(|y - g\left(f_1^1\right)|\right)$$
$$C_{\mathrm{PL}}(y) = \mathrm{sg}\left(|y - g\left(A_1^1\right)|\right)$$

We concluderen dus dat K een primitief recursieve vocabulaire heeft.

Definitie 1.20. Een eerste-orde theorie K heeft een *(primitief) recursieve axiomatisering* als de volgende eigenschap (primitief) recursief is:

$$\mathrm{PrAx}(y) : y \text{ is het Gödelgetal van een proper axioma van } K$$

Een groot aantal relaties en functies dat onder bovenstaande voorwaarden ook (primitief) recursief is treft men aan in Mendelson. We zijn nu eindelijk zo ver om ons *algoritme* en de *uitvoer* ervan te definiëren!

Definitie 1.21. Ons *algoritme* M is een eerste-orde theorie in de taal der rekenkunde, met gelijkheid, welke recursief axiomatiseerbaar is, waar $\vdash_M 0 \neq \overline{1}$ geldt, waar elke recursieve functie ook representeerbaar is in M, en waar voor elk tweetal natuurlijke getallen r, s geldt: als $\vdash_M \overline{r} = \overline{s}$, dan geldt $r = s$.

Opmerking 1.10. De invoer van ons algoritme zijn dus zijn *logische en proper axioma's*, zijn recursieve operaties zijn de *afleidingsregels*, en de uitvoer bestaat uit alle stellingen van ons algoritme.

Opmerking 1.11. We willen dus dat een algoritme rekenprocedures kan uitvoeren, en die procedures moeten berekenbaar/recursief zijn. In dat geval is het wenselijk als de invoer, de axioma's in dit geval, recursief genummerd zijn. En als we ons algoritme zien als iets wat we aan de computer kunnen voeren, dan is het nodig dat in ieder geval geldt $0 \neq \overline{1}$.

1.4. **Interpretaties en waarheid.** Wat zijn *ware* uitspraken? In deze context bedoelen we met een uitspraak van een algoritme simpelweg een expressie van het betreffend algoritme, dus een eindige rij symbolen in de taal van het algoritme in kwestie. Wat we natuurlijk willen is dat voor een algoritme M in ieder geval geldt dat alles in zijn uitvoer *waar* is. Dan rijst meteen de vraag, zijn er algoritmes K waarvoor er *ware* expressies van K zijn die niet in de uitvoer van K zitten? Het antwoord is ja, en wordt gegeven door de stelling van Boolos. Om deze twee vragen te beantwoorden hebben we een aantal definities nodig, en een zogenaamde *volledigheidsstelling*. Allereerst definiëren we het begrip *interpretatie*.

Definitie 1.22. Zij $\mathcal{L}$ een eerste-orde taal. Een *interpretatie* I van $\mathcal{L}$ bestaat uit het volgende:

- Een verzameling $D \neq \varnothing$, het *domein* van I.
- Voor elk predikaatletter A_j^n van $\mathcal{L}$ is er precies één n-voudige relatie $(A_j^n)^I$ op D.
- Voor elk functieletter f_j^n van $\mathcal{L}$ is er precies één functie $(f_j^n)^I : D^n \to D$.
- Voor elk individuele constante a_i van $\mathcal{L}$ is er precies één element $(a_i)^I \in D$.

Voorbeeld 1.8. Wij kunnen de axioma's van Peano interpreteren met domein $\mathbb{N}_0$ en alle andere symbolen net zoals in voorbeeld 1.1. We noemen dit ook wel de *standaardinterpretatie* van S.

We kunnen nu een notie van *waar voor een interpretatie* definiëren, alvorens tot de definitie van *ware* uitspraken te komen. Allereerst hebben we de definitie van *voldoen aan* nodig. We definiëren allereerst de functie s^*.

Definitie 1.23. Zij I een interpretatie van een eerste-orde taal $\mathcal{L}$ met domein D. Zij Σ de verzameling van alle aftelbare rijtjes van elementen van D. Zij $\mathcal{T}$ de verzameling van termen van L, en zij $s = (s_1, s_2, ...) \in \Sigma$. Dan definiëren we $s^* : \mathcal{T} \to D$ recursief als volgt:

$$s^*(t) = \begin{cases} s_j & \exists j \in \mathbb{N} : t = x_j \\ (a_j)^I & \exists j \in \mathbb{N} : t = a_j \\ (f_k^n)^I(s^*(t_1), ..., s^*(t_n)) & \exists n, k \in \mathbb{N} : \exists t_1, ..., t_n \in K : t = f_k^n(t_1, ..., t_n) \end{cases}$$

Definitie 1.24. Zij I een interpretatie van een eerste-orde taal $\mathcal{L}$ met domein D. Zij Σ de verzameling van alle aftelbare rijtjes van elementen van D. Zij $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{C}$ wf's van $\mathcal{L}$ en zij $s = (s_i)_{i=1}^{\infty} \in \Sigma$. In de volgende gevallen zeggen we dat *s voldoet aan* $\mathfrak{B}$:

- Als $\mathfrak{B}$ een atomaire formule $A_k^n(t_1, ..., t_n)$ is, en $(A_k^n)^I$ de corresponderende n-voudige relatie van I, dan voldoet s aan $\mathfrak{B}$ d.e.s.d.a. $s^*(t_1), ..., s^*(t_n)$ in relatie tot elkaar staan met betrekking tot $(A_k^n)^I$.
- s voldoet aan $\neg\mathfrak{B}$ d.e.s.d.a. s niet voldoet aan $\mathfrak{B}$.
- s voldoet aan $\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{C}$ d.e.s.d.a. s niet voldoet aan $\mathfrak{B}$ of s voldoet aan $\mathfrak{C}$.
- s voldoet aan $(\forall x_i)\mathfrak{B}$ d.e.s.d.a. alle $r = (r_j)_{j=1}^{\infty} \in D$, met de eigenschap dat voor alle $k \in \mathbb{N}\backslash\{i\}$ geldt $r_k = s_k$, voldoen aan $\mathfrak{B}$

Definitie 1.25. Zij I een interpretatie van een eerste-orde taal $\mathcal{L}$ met domein D. Zij Σ de verzameling van alle aftelbare rijtjes van elementen van D. Zij $\mathfrak{B}$ een wf van $\mathcal{L}$. Zij Γ een verzameling van wf's van $\mathcal{L}$. Dan definiëren we de volgende begrippen:

- $\mathfrak{B}$ heet *waar voor de interpretatie* I d.e.s.d.a. elk rijtje van Σ voldoet aan $\mathfrak{B}$.
- $\mathfrak{B}$ heet *niet waar voor de interpretatie* I d.e.s.d.a. er een rijtje van Σ niet voldoet aan $\mathfrak{B}$.
- I heet een *model* voor Γ d.e.s.d.a. elke wf in Γ waar is voor de interpretatie I.

Opmerking 1.12. De waarheid van een wf binnen een theorie is onlosmakelijk verbonden met een interpretatie van de betreffende eerste-orde taal. In principe kan men alleen gegeven een interpretatie van een eerste-orde taal beoordelen of een wf waar is of niet, voor díe interpretatie! Voor wf's in een eerste-orde taal die voor elke interpretatie waar zijn is er nog een manier om dit (sneller) in te zien zonder alle interpretaties af te gaan, zie opmerking 1.13.

Definitie 1.26. Zij $\mathcal{L}$ een eerste-orde taal en zij K een theorie in de taal $\mathcal{L}$. Een interpretatie I van $\mathcal{L}$ heet een *model van* K als alle axioma's van K waar zijn voor de interpretatie I.

Voorbeeld 1.9. Beschouwen we de theorie S en de wf $\mathfrak{B}$ gegeven door $f_2^2(x_1, x_2) = f_2^2(x_2, x_1)$ (er geldt per propositie 3.2 (h) van Mendelson dat $(\forall x_1)(\forall x_2)\mathfrak{B}$ een stelling is van S: de commutativiteit van S), dan hebben we dat $\mathfrak{B}$ waar is voor de standaardinterpretatie van S, welk ook een model is voor S. Beschouwen we echter de eerste-orde theorie van de groepen G additief genoteerd met f_1^1 en beschouwen we een willekeurige niet-abelse groep H, dan is H een model voor G, maar is $\mathfrak{B}$ niet waar voor de interpretatie H.

Definitie 1.27. Zij $\mathcal{L}$ een eerste-orde taal. Een wf $\mathfrak{B}$ van $\mathcal{L}$ heet *logisch geldig* als deze waar is voor iedere interpretatie van $\mathcal{L}$.

We zullen nu gevolg 2.18 en de opmerking onderaan bladzijde 62 uit Mendelson geven en later gebruiken om het verband tussen de stelling van Boolos en de eerste-onvolledigheidsstelling van Gödel te onderzoeken.

Stelling 1.3 (Volledigheid)**.** *Zij K een eerste-orde theorie en zij $\mathfrak{B}$ een wf van K. Dan is $\mathfrak{B}$ logisch geldig dan en slechts dan als $\mathfrak{B}$ een stelling van K is.*

Opmerking 1.13. Als we dus een bewijs hebben voor $\mathfrak{B}$, dan weten we ook dat $\mathfrak{B}$ waar is voor iedere interpretatie in K, en is het niet meer nodig om iedere interpretatie van K nog na te gaan.

We kunnen nu dus zeggen wat *waar* in de stelling van Boolos wil zeggen: *waar* voor de standaardinterpretatie van de Peano rekenkunde.

2. Het bewijs voor de stelling van Boolos

In dit hoofdstuk geven we een bewijs voor de stelling van Boolos. Het bewijs is gebaseerd op een artikel van George Boolos uit 1989. We zullen elk detail en onduidelijkheid die dit artikel in zich draagt uitdiepen en uitwerken om tot een volledig correct bewijs te komen voor de stelling van Boolos. Het bewijs van Boolos berust op de volgende paradox:

Paradox van Berry. *Het kleinste getal dat niet te omschrijven is in minder dan vijfentwintig lettergrepen.*

Merk op dat de paradox is dat dit getal zojuist is omschreven in 24 lettergrepen! Voor het bewijs van Boolos hebben we de volgende definitie nodig van *omschrijven*:

Definitie 2.1. Zij $n \in \mathbb{N}_0$. Zij M een algoritme zoals in definitie 1.21. We zeggen dat een wf $F(x_1)$ van M met als enige vrije variabele x_1 het getal n *omschrijft in* M als de volgende wf in de uitvoer van M zit:

$$(*) \quad (\forall x_1)\Big(\big(F(x_1) \Rightarrow A_1^2(x_1, f_1^1(\cdots f_1^1(a_1)\cdots))\big) \Rightarrow$$

$$\neg\big(\neg A_1^2(x_1, f_1^1(\cdots f_1^1(a_1)\cdots)) \Rightarrow \neg F(x_1)\big)\Big)$$

Wat hierboven staat kan ook verkort worden tot de volgende uitdrukking:

$$(\forall x_1)(F(x_1) \iff x_1 = \overline{n})$$

Opmerking 2.1. We zullen met wf $(*)$ werken, omdat deze wf enkel bestaat uit symbolen van de taal der rekenkunde $\mathcal{L}_A$, en dus voorzien kan worden van een Gödelgetal.

Opmerking 2.2. Voortaan bedoelen we met algoritme een algoritme zoals gegeven in definitie 1.21.

Voorbeeld 2.1. In verkorte notatie, neem $F(x_1)$ als volgt:

$$x_1 + x_1 = \overline{4}$$

Als nu $(\forall x_1)(x_1 + x_1 = \overline{4} \iff x_1 = \overline{2})$ in de uitvoer van M voorkomt, dan omschrijft $F(x_1)$ het getal 2.

Zij nu K een algoritme. Beschouw nu de volgende getaltheoretische relatie $C(x, z)$ gegeven door: x is een natuurlijk getal dat omschreven wordt door een wf van K met lengte z. Voordat we kunnen bewijzen dat $C(x, z)$ uit te drukken is in K, hebben we het lemma nodig dat zegt dat het *omschrijven* representeerbaar is:

Lemma 2.1. *Zij K een algoritme. Dan is de volgende getaltheoretische relatie recursief:*

- *$Om(z, n)$: z is het Gödelgetal van een formule die n omschrijft.*

Bewijs. We bouwen $\mathrm{Om}(z, n)$ op, en per constructie zal volgen dat $\mathrm{Om}(z, n)$ recursief is, en per aanname op K dus ook uit te drukken is in K. Allereerst maken we de volgende relatie:

- $1\mathrm{Fr}_{x_1}(y)$: y is het Gödelgetal van een wf van K met x_1 als enige vrije variabele.

De variabele x_1 heeft Gödelgetal 21. Beschouw de volgende getaltheoretische functies en relaties:

- $\mathrm{Fr}(y, x)$: y is het Gödelgetal van een wf of term van K met een vrije voorkomen van de individuele variabele met Gödelgetal x.
- $\ell\hbar(y)$: het aantal afzonderlijke priemgetallen in de priemfactorisatie van y.
- $\mathrm{rm}(y, x)$: de rest na deling van y door x.
- p_j: het j-de priemgetal, met $p_0 = 2$.
- $(y)_i$: de maximale a_i zodanig dat geldt $p_i^{a_i}$ een deler is van y in $\mathbb{N}$.

Deze zijn alle volgens Mendelson op pagina 178, 179 en propositie 3.26 recursief. Het symbool $(\forall i)_{i \leqslant k}$ staat voor $(\forall i)(i \leqslant k)$. Uit Mendelson pagina 177 volgt dat $<$ primitief recursief is. Uit propositie 3.18 volgt eveneens dat relaties verkregen middels samenstellingen van (primitief) recursieve relaties met begrensde quantoren zelf weer (primitief) recursief zijn. We maken $1\mathrm{Fr}_{x_1}(y)$ als volgt:

$$\mathrm{Fr}(y, 21) \wedge$$
$$\big((\exists j)_{j \leqslant \ell\hbar(y)}\big(\big((\forall i)_{i \leqslant \ell\hbar(y)}(i = j \iff \mathrm{rm}((y)_i, 8) = 5)\big) \wedge ((y)_j = 21)\big)\big)$$

Vervolgens maken we de volgende functie:

- $\mathrm{Eq}_{x_1}(n)$: het Gödelgetal van de wf $A_1^2(x_1, f_1^1(\cdots f_1^1(a_1)\cdots))$, ofwel $x_1 = n$.

Beschouw de wf $f_1^1(x_2)$. Deze heeft Gödelgetal $f := 2^{47} \cdot 3^3 \cdot 5^{29} \cdot 7^5$. De wf $A_1^2(x_1, x_3)$ heeft Gödelgetal $a := 2^{99} \cdot 3^3 \cdot 5^{21} \cdot 7^7 \cdot 11^{37} \cdot 13^5$. De variabelen x_2 en x_3 hebben respectievelijk Gödelgetal 29 en 37, en a_1 heeft Gödelgetal 15. Beschouw nu:

- $\mathrm{Sub}(y, u, v)$: het Gödelgetal van het resultaat van het substitueren van de term met Gödelgetal u voor alle vrije voorkomens in de expresse met Gödelgetal y van de variabele met Gödelgetal v.

Deze is per Mendelson propositie 3.26 (10) recursief. Definieer nu $\mathrm{Add}(y)$ als volgt:

$$\mathrm{Add}(y) = \mathrm{Sub}(y, f, 29)$$

We verkrijgen $\mathrm{Eq}_{x_1}(n)$ als volgt:

$$\mathrm{Eq}_{x_1}(n) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Add}^n(15), a, 37)$$

Waarbij Add^n staat voor de n-voudige compositie van Add met zichzelf. Er geldt dat $\mathrm{Eq}_{x_1}(n)$ als samenstelling van recursieve functies zelf ook recursief is. Dus $\mathrm{Eq}_{x_1}(n)$ is representeerbaar is K. We maken nu de volgende functie:

- $\mathrm{Out}(y, n)$: het Gödelgetal van een wf in K die zegt dat de formule met Gödelgetal y het getal n omschrijft.

Zij nu $B_1 = 2^3 \cdot 3^{13} \cdot 5^{21} \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^3$ het Gödelgetal van de expressie $(\forall x_1)\Big(\big($; zij $B_2 = 2^{11}$ het Gödelgetal van de expressie $\Rightarrow$; zij $B_3 = 2^5 \cdot 3^{11} \cdot 5^9 \cdot 7^3 \cdot 11^9$ het Gödelgetal van de expressie $\big) \Rightarrow \neg\big(\neg$; zij $B_4 = 2^{11} \cdot 3^9$ het Gödelgetal van de expressie $\Rightarrow \neg$; zij $B_5 = 2^5 \cdot 3^5$ het Gödelgetal van de expressie $\big)\Big)$ en zij ten slotte y het Gödelgetal van $F(x_1)$, een formule met als enige vrije variabele x_1. Beschouw nu de getaltheoretische functie *juxtapositie* gegeven door:

- $x * y$: het Gödelgetal van de expressie verkregen door de expressie met Gödelgetal y direct achter de expressie met Gödelgetal x te plakken.

Deze is per Mendelson pagina 179 primitief recursief. Dan maken we $\mathrm{Out}(y, n)$ als volgt:

$$\mathrm{Out}(y, n) = B_1 * y * B_2 * \mathrm{Eq}_{x_1}(n) * B_3 * \mathrm{Eq}_{x_1}(n) * B_4 * y * B_5$$

Er volgt dat $\mathrm{Out}(z,n)$ als samenstelling van recursieve functies zelf ook recursief is, en dus representeerbaar in K. Tenslotte maken we de volgende relatie:

- $\mathrm{Om}(z,n)$: z is het Gödelgetal van een formule die n omschrijft.

Beschouw nu de getaltheoretische relatie $\mathrm{Pf}(y,x)$ gegeven door: y is het Gödelgetal van een bewijs in K van de wf met Gödelgetal x. Merk op dat per propositie 3.28 van Mendelson, $\mathrm{Pf}(y,x)$ representeerbaar is in K door een wf $\mathfrak{Pf}(x_5,x_6)$. Merk op dat als we willen dat n omschreven wordt door een wf met Gödelgetal z, dat we dan per definitie van uitvoer dus willen dat de representatie $\mathfrak{Out}(z,n)$ in K van $\mathrm{Out}(z,n)$ een stelling is van K. Er geldt dus dat een wf met Gödelgetal z het getal n omschrijft dan en slechts dan als er een bewijs is voor $\mathfrak{Out}(z,n)$. Merk ook op dat per definitie moet gelden dat de wf met Gödelgetal z precies één vrije variabele x_1 moet bevatten. Zij nu $\mathfrak{1Fr}_{x_1}(x_2)$ een representatie van $1\mathrm{Fr}_{x_1}(y)$ in K. Er geldt dan dat $\mathrm{Om}(z,n)$ uit te drukken is in K is in K door de volgende wf $\mathfrak{Om}(x_4,x_1)$:

$$(\mathfrak{1Fr}_{x_1}(x_4)) \wedge (\exists x_5)(\mathfrak{Pf}(x_5,\mathrm{Out}(x_4,x_1)))$$

Per propositie 3.29 van Mendelson geldt dat $\mathrm{Om}(z,n)$ recursief is. $\square$

2.1. **De lengte van een welgevormde formule.** Voor een deel van het bewijs van Boolos is het cruciaal dat het aantal symbolen in de taal der rekenkunde eindig is. Zoals we in hoofdstuk 1 de taal der rekenkunde gegeven hebben is het aantal symbolen oneindig! Om het aantal symbolen eindig te maken, introduceren we een accent $'$ een individuele variabele x, een constante a, een functieletter f en een predikaatletter A en definiëren we:

- Het symbool $x_1 := x$ is een individuele variabele bestaande uit 1 symbool. Voor $i \geqslant 1$ definiëren we $x_{i+1} := x_i'$, een variabele bestaande uit $i+1$ symbolen. We definiëren op analoge wijze een oneindige verzameling constanten a_i.
- Het symbool $A_1 := A$ is een predikaatletter bestaande uit 1 symbool. Voor $i \geqslant 1$ definiëren we $A_{i+1} := A_i'$, een predikaatletter bestaande uit $i+1$ symbolen. Met behulp van een injectie of bijectie $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ herdefiniëren we A_k^n:
$$A_k^n := A_{\varphi(k,n)}$$
Op exact analoge wijze herdefiniëren we f_k^n in termen van de nieuwe symbolen. We kunnen φ zo geven dat het aantal accenten in A_k^n en f_k^n groeit met de grootte van k en n. Een voorbeeld is:
$$\varphi(n,k) = 2^n \cdot 3^k$$
Merk op dat het aantal symbolen in A_k^n en f_k^n gelijk is aan $\varphi(n,k)$, aangezien $A_k^n = A_{\varphi(n,k)}$ per constructie van de A_i bestaat uit $\varphi(n,k)$ symbolen.

We kiezen er verder voor om niks te veranderen aan de Gödelnummering zoals gegeven in Mendelson. Hierdoor behouden we verder alle eigenschappen van de Gödelnummering zoals gegeven in Mendelson. Waar in de lengtefunctie $\ell\hbar$ van Mendelson alle symbolen x_i, a_i, A_i^j en f_i^j één bijdragen aan de lengte van een wf, dragen deze in ons geval respectievelijk i, i, $\varphi(j,i)$ en $\varphi(j,i)$ bij aan de lengte van een wf in ons geval. We zullen dus een eigen, recursieve lengtefunctie moeten definiëren:

Definitie 2.2. Zij K een algoritme, zij $\mathfrak{B}$ een expressie van K met Gödelgetal y, en zij $\varphi(n,k) = 2^n \cdot 3^k$. De *lengte van* $\mathfrak{B}$ wordt gegeven door:

$$\ell\hbar^*(y) =$$

$$\sum_{a \leqslant \ell\hbar(y)} \sum_{b \leqslant 3} \left(\left(\frac{(y)_a - (1+2b)}{8} \right) \cdot \overline{\mathrm{sg}}\,(\mathrm{rm}(|(y)_a - (1+2b)|, 8))\, \overline{\mathrm{sg}}\,(\mathrm{rm}(|(y)_a - 2b|, 8)) \right)$$

Opmerking 2.3. Merk op dat $\ell\hbar^*$ recursief is als samenstelling van recursieve functies, propositie 3.16 en 3.17 van Mendelson. Verder doet $\ell\hbar^*$ ook wat we willen dat het doet: de variabele a in de sommatie loopt over de machten in de priemfactorisatie van y, de variabele b loopt over een aantal van de mogelijke symbolen die de betreffende macht in de priemfactorisatie voorstelt: het Gödelgetal van een individuele constante, een variabele, een predikaatletter, of een functieletter. Zo ja, dan wordt het aantal symbolen daarvan geteld en meegenomen in de som van symbolen. Zo nee, dan wordt er enkel 1 bij de som opgeteld omdat het dan een andere symbool betreft wat in onze notie van lengte doorgaat voor 1 symbool in de wf.

We nemen voortaan $\varphi(n,k) = 2^n \cdot 3^k$. We kunnen nu het volgende lemma bewijzen:

Lemma 2.2. *Zij K een algoritme en zij $\mathfrak{B}$ een expressie van K met lengte $z \in \mathbb{N}$ en Gödelgetal w, dan geldt:*

$$w \leqslant \prod_{j \leqslant z} p_j^{13+8z}$$

Bewijs. We bewijzen dit lemma met inductie naar $z \geqslant 1$:

- **Beginstap.** Voor $z = 1$ geldt dat er maar eindig veel expressies zijn met lengte z, namelijk één van de expressies uit de volgende verzameling:

  $$\{(\} \cup \{)\} \cup \{,\} \cup \{\neg\} \cup \{\forall\} \cup \{\Rightarrow\} \cup \{x_1\} \cup \{a_1\}$$

  Er geldt dat x_1 het maximale Gödelgetal heeft, namelijk $g(x_1) = 2^{21} = 2^{13+8z} \leqslant 2^{13+8z}$.
- **Inductiestap.** Veronderstel nu dat voor alle $z \leqslant Z \in \mathbb{N}$ het lemma geldt. Beschouw nu een expressie $\mathfrak{B}'$ van K met lengte Z en Gödelgetal w'. Per inductieveronderstelling geldt dan:

  $$w' \leqslant \prod_{j \leqslant Z} p_j^{13+8Z}$$

  We kunnen het Gödelgetal w van een expressie $\mathfrak{B}$ van K met lengte $Z+1$ als volgt maximaal maken uit $\mathfrak{B}'$:
  - Als $(Z+1)$ste symbool voegen we een accent extra toe aan een mogelijk aanwezige A_i^j of f_i^j in $\mathfrak{B}$. In dat geval wordt dus $2^j \cdot 3^i$, de desbetreffende lengte van de eerder genoemde symbolen, opgehoogd met 1. Dit heeft als gevolg dat het Gödelgetal van deze symbolen, respectievelijk $3 + 8(2^j \cdot 3^i)$ en $1 + 8(2^j \cdot 3^i)$, wordt opgehoogd met 8, en we krijgen:

    $$w \leqslant w' \cdot p_Z^8 \leqslant w' \cdot p_{Z+1}^{13+8(Z+1)} \leqslant \prod_{j \leqslant Z+1} p_j^{13+8(Z+1)}$$

– Als $(Z+1)$ste symbool voegen we een symbool van lengte 1 toe met het hoogste Gödelgetal van alle symbolen met lengte 1, namelijk x_1 met Gödelgetal 21. We krijgen dan:
$$w \leqslant w' \cdot p_{Z+1}^{13+8\cdot 1} \leqslant w' \cdot p_{Z+1}^{13+8(Z+1)} \leqslant \prod_{j \leqslant Z+1} p_j^{13+8(Z+1)}$$

Per inductie volgt dat voor alle $z \in \mathbb{N}$ het lemma geldt. □

2.2. **De representeerbaarheid van omschrijven.** Met lemma 2.2 in handen kunnen we nu overgaan op het bewijzen van een hoofdresultaat van dit hoofdstuk, namelijk de representeerbaarheid van de getaltheoretische relatie $C(x,z)$, gegeven door:

- $C(x,z)$: x is een natuurlijk getal dat omschreven wordt door een wf met z symbolen.

Lemma 2.3 (Blackshaw)**.** *Zij K een algoritme. Dan is de getaltheoretische relatie $C(x,z)$ uit te drukken in K.*

Bewijs. Volgens lemma 2.1 geldt dat $\mathrm{Om}(y,n)$ recursief is. We maken $C(x,z)$ als volgt:
$$(\exists w)_{w \leqslant \prod_{j \leqslant z} p_j^{13+8z}} (\mathrm{Om}(w,x) \wedge \ell\hbar^*(w) = z)$$
Er geldt per proposities 3.17 en 3.18 van Mendelson dat $C(x,z)$ recursief is, en dus is $C(x,z)$ uit te drukken in K. □

We kunnen nu verder gaan met het bewijs, en daartoe beschouwen we de volgende drie getaltheoretische relaties:

- $B(x,y)$: x is een natuurlijk getal dat omschreven wordt door een wf met minder dan y symbolen, i.e. $(\exists z)(z < y \wedge C(x,z))$.
- $A(x,y)$: x is het kleinste getal dat niet wordt omschreven door een wf met minder dan y symbolen, i.e. $(\neg B(x,y) \wedge (\forall a)(a < x \Rightarrow B(a,y)))$.
- $F(x)$: x is het kleinste getal dat niet wordt omschreven door een wf met minder dan $160k$ symbolen, i.e. $(\exists y)(y = 160k \wedge A(x,y))$, waarbij k het aantal symbolen is van $A(x,y)$.

Het volgende lemma zegt dat elke van deze getaltheoretische relaties uit te drukken zijn in een algoritme K:

Lemma 2.4. *Zij K een algoritme, dan zijn $B(x,y)$, $A(x,y)$ en $F(x)$ uit te drukken in K.*

Bewijs. Zij $\mathfrak{C}(x_1,x_2)$ een representatie van $C(x,z)$ in K. Dan drukken we $B(x,z)$ met de wf $\mathfrak{B}(x_1,x_3)$ als volgt uit in K:
$$(\exists x_2)((x_2 < x_3) \wedge \mathfrak{C}(x_1,x_2))$$
Per definitie van $<$ op bladzijde 159 van Mendelson, en per gevolg 1.6 geldt er dat $\mathfrak{B}(x_1,x_3)$ een wf is van K. We drukken nu op analoge wijze $A(x,y)$ met de wf $\mathfrak{A}(x_1,x_3)$ uit in K:
$$\big(\neg\mathfrak{B}(x_1,x_3) \wedge \big((\forall x_2)(x_2 < x_1 \Rightarrow \mathfrak{B}(x_2,x_3))\big)\big)$$
Zij nu w het Gödelgetal van de wf $\mathfrak{A}(x_1,x_3)$. Stel $k := \ell\hbar^*(w)$, de lengte van de wf $\mathfrak{A}(x_1,x_3)$. Dan drukken we $F(x)$ uit in K met de wf $\mathfrak{F}(x_1)$ als volgt:
$$(\exists x_3)\left(A_1^2\left(x_3, f_2^2(\overline{160},\overline{k})\right) \wedge \mathfrak{A}(x_1,x_3)\right)$$

Hiermee hebben we $B(x,y)$, $A(x,y)$ en $F(x)$ uitgedrukt in K. □

Voor een aanstaand telargument, zullen we nodig hebben dat iedere wf van K met x_1 als enige vrije variabele, hooguit één natuurlijk getal omschrijft.

Lemma 2.5. *Zij K een algoritme in de taal der rekenkunde, en zij $\mathfrak{B}(x_1)$ een wf van K met precies x_1 als enige vrije variabele. Dan geldt dat $\mathfrak{B}(x_1)$ hooguit één natuurlijk getal omschrijft in K.*

Bewijs. Zij n en p natuurlijke getallen omschreven door $\mathfrak{B}(x_1)$ in K. Dan geldt dat de volgende twee wf's in de uitvoer van K zitten (in verkorte notatie):

$$(\forall x_1)(\mathfrak{B}(x_1) \iff x_1 = \overline{n}) \quad \text{en} \quad (\forall x_1)(\mathfrak{B}(x_1) \iff x_1 = \overline{p})$$

Beschouw nu de wf's $\mathfrak{N}(x_1)$ en $\mathfrak{P}(x_1)$ gegeven door respectievelijk $x_1 = \overline{n}$ en $x_1 = \overline{p}$. Beschouw nu de wf's $\mathfrak{N}(x_1) \Rightarrow \mathfrak{B}(x_1)$ en $\mathfrak{B}(x_1) \Rightarrow \mathfrak{P}(x_1)$. Per logische axioma (A4) zijn dit stellingen van K. Per voorbeeld 1.5 geldt nu:

$$\{\mathfrak{N}(x_1) \Rightarrow \mathfrak{B}(x_1), \mathfrak{B}(x_1) \Rightarrow \mathfrak{P}(x_1)\} \vdash_K \mathfrak{N}(x_1) \Rightarrow \mathfrak{P}(x_1)$$

Met generalisatie hebben we nu:

$$\vdash_K (\forall x_1)(\mathfrak{N}(x_1) \Rightarrow \mathfrak{P}(x_1))$$

Nemen we nu $i = 1$ en de term t gelijk aan $\overline{n}$, dan hebben de volgende instantie van (A4):

$$((\forall x_1)(\mathfrak{N}(x_1) \Rightarrow \mathfrak{P}(x_1))) \Rightarrow (\mathfrak{N}(\overline{n}) \Rightarrow \mathfrak{P}(\overline{n}))$$

Met modus ponens volgt nu:

$$\vdash_K \mathfrak{N}(\overline{n}) \Rightarrow \mathfrak{P}(\overline{n})$$

Aangezien K een theorie is met gelijkheid geldt er per propositie 2.23 (a) van Mendelson het volgende:

$$\vdash_K \mathfrak{N}(\overline{n})$$

Met modus ponens volgt nu weer:

$$\vdash_K \mathfrak{P}(\overline{n})$$

Er geldt dus nu $\vdash_K \overline{n} = \overline{p}$. Omdat K een algoritme is, concluderen we dat $n = p$ geldt. □

2.3. **Omschrijving door een welgevormde formule van minimale lengte.** We hebben nog het volgende lemma nodig, dat ons garandeert dat er daadwerkelijk ook zo'n *kleinste* x is, zoals $F(x)$ aangeeft.

Lemma 2.6. *Zij K een algoritme, in de taal der rekenkunde met eindig veel symbolen. Dan geldt, voor elke $m \in \mathbb{N}$, is er een getal $n \in \mathbb{N}_0$ zodanig dat n het kleinste getal is dat niet wordt omschreven in K door een wf van K met minder dan m symbolen.*

Bewijs. Zij $t \in \mathbb{N}$ het aantal symbolen in de eindige taal der rekenkunde zoals eerder gegeven. Merk allereerst op dat we per lemma 2.5 hebben dat geen enkele wf van K meer dan één natuurlijk getal omschrijft in K. Merk ook op dat voor elk getal $i \in \mathbb{N}_0$, er maar eindig veel expressies zijn met i symbolen, namelijk hooguit t^i. Dus voor elke $i \in \mathbb{N}_0$ zijn er alleen eindig veel natuurlijke getallen die omschreven worden door wf's met i symbolen. Dus voor elke $m \in \mathbb{N}$ zijn er maar eindig veel natuurlijke getallen die omschreven worden door wf's met minder dan m symbolen, namelijk hooguit $t^{m-1} + \cdots + t^1 + t^0$. Er is dus een getal dat niet wordt omschreven door een formule met minder dan m symbolen, dus er is een minimaal getal dat niet wordt omschreven door een formule met minder dan m symbolen. $\square$

Nu is de vraag, hoeveel symbolen heeft $\mathfrak{F}(x_1)$? Merk op dat er in ieder geval geldt $k \geqslant 9$, met k dus het aantal symbolen van $\mathfrak{F}(x_1)$. Om het aantal symbolen van $\mathfrak{F}(x_1)$ te tellen, herschrijven we $\mathfrak{F}(x_1)$ tot een wf dat enkel de symbolen van de taal der rekenkunde bevat:

$$\neg(\forall x_3)\left(A_1^2\left(x_3, f_2^2\left(\overline{160}, \overline{k}\right)\right) \Rightarrow \neg\mathfrak{A}(x_1, x_3)\right)$$

Met behulp van het volgende lemma kunnen we eenvoudig het aantal symbolen in $\mathfrak{F}(x_1)$ tellen:

Lemma 2.7. *Zij K een algoritme, in de taal der rekenkunde met eindig veel symbolen, en zij $n \in \mathbb{N}$. Dan geldt dat het aantal symbolen in $\overline{n}$ gelijk is aan $8n + 1$.*

Bewijs. We bewijzen dit lemma met inductie naar $n \geq 1$:

- **Beginstap.** Voor $n = 1$ geldt dat $\overline{n}$ staat voor de expressie $f_1^1(a_1)$, welk $\varphi(1, 1) + 3 = 9 = 8n + 1$ symbolen heeft.
- **Inductiestap.** Veronderstel nu dat voor alle $n \leqslant N \in \mathbb{N}$ het lemma geldt. Er geldt dat $\overline{N+1}$ staat voor de expressie $f_1^1(\overline{n})$. Per inductieveronderstelling heeft $\overline{n}$ precies $8n + 1$ symbolen, er geldt dus dat $\overline{n+1}$ precies $\varphi(1, 1) + 1 + 8n + 1 + 1 = 8n + 9 = 8(n + 1) + 1$ symbolen heeft.

Uit inductie volgt dat het lemma geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Nu, gegeven dat het aantal symbolen van $\mathfrak{A}(x_1, x_3)$ gelijk is aan k, heeft $\mathfrak{F}(x_1)$ precies het volgende aantal symbolen:

- Het aantal symbolen in $\neg(\forall x_3)($ is 8.
- Het aantal symbolen in $A_1^2(x_3, f_2^2($ is $\varphi(2, 1) + 5 + \varphi(2, 2) + 1 = 54$.
- Het aantal symbolen in $\overline{160}, \overline{k}$ is $(8 \cdot 160 + 1) + 1 + (8 \cdot k + 1) = 1283 + 8k$.
- Het aantal symbolen in $)) \Rightarrow \neg\mathfrak{A}(x_1, x_3))$ is $4 + k + 1 = 3 + k$.

In totaal heeft $\mathfrak{F}(x_1)$ dus $1350 + 9k$ symbolen. Merk op dat voor $k \geqslant 9$ geldt $1350 + 9k < 160k$. We hebben nu alles voor handen om de stelling van Boolos te bewijzen!

2.4. **Boolos en Gödel.**

Stelling 2.1 (Boolos)**.** *Er is geen algoritme wiens uitvoer alle en enkel alle ware uitspraken over de rekenkunde bevat.*

Bewijs. Veronderstel dat we wel een algoritme M hebben wiens uitvoer enkel alle ware uitspraken over de rekenkunde bevat. Beschouw nu het getal $160k \in \mathbb{N}$. Wegens lemma 2.6 is er een minimale $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat deze niet omschreven wordt door een wf met minder dan $160k$ symbolen. Aangezien $\mathfrak{F}(x_1)$ minder dan $160k$ symbolen heeft, geldt er dus dat n niet wordt omschreven in M door $\mathfrak{F}(x_1)$, ofwel, de volgende wf (in verkorte notatie) zit niet in de uitvoer van M:

$$(\forall x_1)(\mathfrak{F}(x_1) \iff x_1 = \overline{n})$$

Er geldt echter dat $(\forall x_1)(\mathfrak{F}(x_1) \iff x_1 = \overline{n})$ een ware uitspraak is voor de standaardinterpretatie van $\mathcal{L}_A$, de taal van M, want $\mathfrak{F}(x_1)$ zegt dan precies dat x_1 het kleinste getal is dat niet wordt omschreven door een wf met minder dan $160k$ symbolen. Dit is in tegenspraak met de aanname dat de uitvoer van M alle ware uitspraken over de rekenkunde bevat. We concluderen dus dat een dergelijke M niet bestaat. □

Nu we de stelling van Boolos bewezen hebben, kunnen we overgaan op de equivalentie ervan met de eerste onvolledigheidsstelling van Gödel in het geval van ω-consistentie. Allereerst definiëren we nog wat een zogenaamde *onbeslisbare uitspraak* is:

Definitie 2.3. Zij K een eerste-orde theorie, en $\mathfrak{B}$ een wf van K. Dan heet $\mathfrak{B}$ een *onbeslisbare uitspraak* van K als zowel niet-$\vdash_K \mathfrak{B}$ als niet-$\vdash_K \neg\mathfrak{B}$.

Merk dus op dat voor een onbeslisbare uitspraak $\mathfrak{B}$ van een algoritme K, zowel $\mathfrak{B}$ als $\neg\mathfrak{B}$ niet in de uitvoer van K voorkomen. We bewijzen nu de eerder genoemde equivalentie:

Stelling 2.2 (Blackshaw)**.** *Zij K een algoritme, in de taal der rekenkunde met eindig veel symbolen, waarin iedere stelling van S ook een stelling is van K. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(B) *Er is een ware rekenkundige uitspraak die niet in de uitvoer van K voorkomt.*

(G) *Er is een onbeslisbare uitspraak $\mathfrak{G}$ van K als in stelling 1.2.*

Bewijs. We bewijzen beide implicaties:

- (B)⇒(G): Neem voor $\mathfrak{G}$ de volgende gesloten wf van K:
$$(\forall x_1)(\mathfrak{F}(x_1) \iff x_1 = \overline{n})$$
Met $\mathfrak{F}(x_1)$ en $\overline{n}$ zoals in het bewijs van de stelling van Boolos. Stel nu dat $\vdash_K \mathfrak{G}$ geldt. Dan geldt dat $\mathfrak{G}$ in de uitvoer van K zit, dus $\mathfrak{F}(x_1)$ omschrijft n, maar we hadden al vastgesteld dat dat niet zo was, dus niet-$\vdash_K \mathfrak{G}$. Stel nu dat $\vdash_K \neg\mathfrak{G}$ geldt. Dan geldt dat er een bewijs is van de volgende wf:
$$\neg(\forall x_1)(\mathfrak{F}(x_1) \iff x_1 = \overline{n})$$
Maar de negatie van bovenstaande wf is waar in de standaardinterpretatie van S, dus niet-$\vdash_K \neg\mathfrak{G}$. Er geldt dus dat $\mathfrak{G}$ een onbeslisbare uitspraak is van K.
- (G)⇒(B): Merk op dat voor $\mathfrak{G}$ het volgende geldt per Mendelson pagina 205:
$$\vdash_K \mathfrak{G} \iff (\forall x_2)\neg\mathfrak{P}\mathfrak{f}(x_2, g(\mathfrak{G}))$$
Aangezien niet-$\vdash_K \mathfrak{G}$ geldt, geldt dus met bovenstaande equivalentie dat $\mathfrak{G}$ waar is, maar echter niet bewijsbaar is en dus niet in de uitvoer van K voorkomt.

□

Opmerking 2.4. Om het gebruik van ω-consistentie te vermijden hebben we voor de eerste implicatie gebruikt gemaakt van de standaardinterpretatie van S.

3. Voorbeeld van een Gödelstelling: de stelling van Goodstein

De stelling van Goodstein is een voorbeeld van een stelling die geheel te formuleren is binnen de taal van de Peano rekenkunde, maar waarvan is bewezen dat deze niet bewezen kan worden binnen deze zelfde theorie. De precieze formulering van de stelling van Goodstein in de taal der rekenkunde is een moeizame opgave en schiet het doel van deze paragraaf voorbij. We zullen allereerst een aantal definities nodig hebben alvorens tot onze formulering van deze stelling te komen.

Definitie 3.1. Zij $n, b \in \mathbb{N}$. Dan is de *diepte-1 basis b representatie van n* de gebruikelijke basis b representatie van n:

$$n = b^{m_1} n_1 + \cdots + b^{m_k} n_k$$

Met $k \in \mathbb{N}$, $m_1 > \cdots > m_k$ en $1 \leqslant n_i < b$ voor alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Door elke m_i door zijn basis b representatie te vervangen, verkrijgen we de *diepte-2 basis b representatie van n*. In het algemeneen verkrijgen we de *diepte-$(m+1)$ basis b representatie van n* door elke m_i te vervangen voor zijn *diepte-m basis b representatie*

Voorbeeld 3.1. De diepte-1 basis 2 representatie van 266 is $2^8 + 2^3 + 2^1$. De diepte-2 basis 2 representatie van 266 is $2^{2^3} + 2^{2^1+1} + 2$ en dus voor $m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ is zijn diepte-m basis 2 representatie gelijk aan:

$$266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$$

Definitie 3.2. Zij $n, b \in \mathbb{N}$ en $m \in \mathbb{N}$ minimaal, zodanig dat geldt dat de diepte-m basis b representatie van n gelijk is aan de diepte-$(m+1)$ basis b representatie van n. Dan heet de diepte-m basis b representatie van n de *complete basis b representatie van n*.

Definitie 3.3. Zij $b \in \mathbb{N}$. De *basisveranderingsfunctie* $R_b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ stuurt $n \in \mathbb{N}$ naar het getal dat verkregen wordt door in de complete basis b representatie van n iedere b te vervangen door $b + 1$.

Voorbeeld 3.2. Aansluitend op voorbeeld 3.1:

$$R_2(266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3 = 443426488243037769948249630619149892887$$

Definitie 3.4. Zij $n \in \mathbb{N}$. Dan is de *Goodsteinrij* $\{(n)_k\}_{k=1}^{\infty}$ beginnend bij n gedefinieerd als volgt:

- $(n)_1 = n$
- $$(n)_{k+1} = \begin{cases} R_{k+1}((n)_k) - 1 & (n)_k > 0 \\ 0 & (n)_k = 0 \end{cases}$$

Voorbeeld 3.3. De Goodsteinrij beginnend bij 3 wordt gegeven door $3, 3, 3, 2, 1, 0, 0, \ldots$.

Definitie 3.5. De *Goodsteinfunctie* $\mathcal{G} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ stuurt n naar het kleinste getal k met $(n)_k = 0$.

Stelling 3.1 (Goodstein)**.** *De Goodsteinfunctie $\mathcal{G}$ is welgedefinieerd.*

We zullen bovenstaande stelling niet bewijzen. De stelling van Goodstein is te formuleren binnen de verzamelingenleer en is daarin ook te bewijzen. De stelling van Goodstein is, zoals ook eerder aangegeven, ook te formuleren binnen de rekenkunde, maar is niet te bewijzen binnen de rekenkunde. Dit is bewezen door Kirby en Paris in 1982. Veronderstelt men namelijk dat binnen S ook de stelling van Goodstein bewijsbaar is, dan kan men de consistentie van S binnen S zelf bewijzen. Dit is echter in tegenspraak met de *tweede onvolledigheidsstelling van Gödel*.

Stelling 3.2 (Tweede onvolledigheidsstelling van Gödel)**.** *Zij K een eerste-orde theorie in de taal der rekenkunde, recursief axiomatiseerbaar, waarin in ieder geval alle stellingen van S ook stellingen zijn van K. Zij $\mathfrak{Con}_K$ de volgende gesloten wf van K:*

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)\neg(\mathfrak{Pf}(x_1, x_3) \wedge \mathfrak{Pf}(x_2, x_4) \wedge \mathfrak{Neg}(x_3, x_4))$$

Waarbij $\mathfrak{Neg}(x_3, x_4)$ gegeven is door $\mathfrak{Prf}(x_3, Neg(x_4))$, en $Neg(x_4)$ is het Gödelgetal van de negatatie van de wf met Gödelgetal x_4. Dan als K consistent is, dan is $\mathfrak{Con}_K$ niet bewijsbaar binnen K.

Opmerking 3.1. Merk op dat $\mathfrak{Con}_K$ zegt dat K consistent is. Bovenstaande stelling zegt dus dat voor iedere consistente uitbreiding K van S geldt dat binnen deze K zijn eigen consistentie niet bewezen kan worden.

Opmerking 3.2. Men kan binnen de rekenkunde wel voor iedere $n \in \mathbb{N}$ afzonderlijk laten zien dat de Goodsteinrij beginnend bij n termineert. Echter is de rekenkunde niet ω-consistent, dus is niet gegarandeerd dat er één bewijs is voor alle $n \in \mathbb{N}$. De verzamelingenleer daarentegen is wel ω-consistent.

Opmerking 3.3. De wf's die Boolos en Gödel gebruiken om hun stellingen te bewijzen, worden doorgaans gezien als flauwe wf's die van zichzelf toevallig zeggen dat ze niet waar zijn. De stelling van Goodstein kan men zien als zijnde van een andere aard; een echte betekenisvolle(re) uitspraak van de rekenkunde.

Referenties

[1] George Boolos, *A New Proof of the Gödel Incompleteness Theorem.* Massachsetts Institute of Technology, 1998.

[2] Elliott Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic.* CRC Press, 5th Edition, 2010.

[3] Andrés Eduardo Caicedo, *Goodstein's function (Función de Goodstein).* California Institute of Technology, Pasadena, USA, 2010.

[4] K.P. Hart, *Verzamelingenleer* (2011), http://dutiaw37.twi.tudelft.nl/ kp/onderwijs/verzamelingenleer/dictaat/dictaat-A4.pdf