J. Jin

Lineaire algebraïsche groepen

Bachelorscriptie – juni 2009

Scriptiebegeleider: prof.dr. S.J. Edixhoven

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Inleiding

Een algebraïsche groep is een groep, die ook nog de structuur van een algebraïsche variëteit heeft, die aan een aantal voorwaarden voldoet. Op zo'n groep hebben we dus twee verschillende structuren, die interactie met elkaar hebben. Als gevolg hiervan hebben algebraïsche groepen dus interessante eigenschappen die niet uit alleen de groeps- of variëteitsstructuur zijn af te leiden.
Deze groepen zijn voor het eerst bestudeerd rond 1880, door Charles Émile Picard (1856–1941), omdat deze groepen als Galoisgroepen naar voren kwamen bij zijn onderzoek naar de Galoistheorie van lineaire differentiaalvergelijkingen. De eerste die echter de theorie van algebraïsche groepen heeft uitgewerkt in een apart werk, is Ellis Kolchin (1916–1991), in 1948. Deze theorie is dus relatief nieuw. In deze scriptie behandelen we de basis van deze theorie.
In de eerste sectie definiëren we algebraïsche groepen, morfismen en werkingen, en we behandelen elementaire eigenschappen ervan. De belangrijkste voorbeelden, namelijk $\mathbb{GL}_n$ en $\mathbb{PGL}_n$ komen hier aan bod.
In de volgende sectie beperken we ons tot de algebraïsche groepen waarvan de onderliggende variëteit affien is. Het hoofdresultaat hier is het feit dat iedere affiene algebraïsche groep isomorf is met een gesloten ondergroep van een $\mathbb{GL}_n$. Een ander resultaat dat hier slechts geschetst wordt, is het feit dat we, net als in de groepentheorie, quotiëntgroepen kunnen maken, maar nu uiteraard weer met de structuur van een algebraïsche groep.
In de laatste sectie passen we de tot dan toe verkregen theorie toe om het concept van een Jordandecompositie in $\mathbb{GL}_n$ uit te breiden naar een willekeurige lineaire algebraïsche groep, en op die manier de begrippen semisimpel en unipotent te introduceren in de theorie van lineaire algebraïsche groepen. Tenslotte bekijken we dan een speciale eigenschap van lineaire algebraïsche groepen waarvan alle elementen unipotent zijn.
Bij het schrijven van deze scriptie heb ik aangenomen dat de basistheorie van de algebraïsche meetkunde bij de lezer bekend is. Het eerste hoofdstuk van het boek van Hartshorne hierover [H], behandelt deze basistheorie. Verder, als men na het lezen van deze scriptie geïnteresseerd is geraakt, kan men het boek van Springer over lineaire algebraïsche groepen [S] lezen.

1 Basisdefinities en -theorie

Eerst leggen we notatie vast. Met k bedoelen we een algebraïsch afgesloten lichaam.

1.1 Algebraïsche groepen

Definitie 1.1.1. Een *algebraïsche groep* is een verzameling G met een bewerking $\cdot$ op G die aan de groepsaxioma's voldoet, en met de structuur van een algebraïsche variëteit, die aan de volgende voorwaarden voldoet.

1. De vermenigvuldigafbeelding $\mu : G \times G \to G : (x, y) \mapsto x \cdot y$ is een morfisme;

2. De inverteerafbeelding $\iota : G \to G : x \mapsto x^{-1}$ is een morfisme.

Voorbeeld 1.1.2. Als voorbeeld nemen we de groep $G = \mathbb{GL}_n$ van inverteerbare $n \times n$ matrices over k. Merk op dat we $\mathbb{GL}_n$ kunnen opvatten als deelverzameling van $\mathbb{A}^{n^2}$ op een natuurlijke manier. Als zodanig is $\mathbb{GL}_n$ een open deelverzameling van $\mathbb{A}^{n^2}$, en dus een quasi-affiene variëteit. (De niet-inverteerbare matrices zijn precies die matrices A waarvan de determinant, die een polynoom is in de elementen van A, nul is.) Aan de eerste voorwaarde is dus voldaan.
Nu bekijken we de afbeelding $\mu : G \times G \to G$. Omdat voor matrices A en B, de elementen van de productmatrix AB polynomen zijn in de elementen van A en B, en omdat G quasi-affien is, geldt dat voor iedere coördinaatafbeelding $x_{kl} : G \to k : A = (a_{ij}) \mapsto a_{kl}$, de compositie $x_{kl}\mu$ regulier is. Dus is μ een morfisme. Op dezelfde manier laten we ook zien dat ι een morfisme is, als we opmerken dat voor een matrix A, de elementen van A^{-1} rationale functies zijn in de elementen van A, met als noemer de determinant. (Die nergens nul is op G.)
Dus is $\mathbb{GL}_n$ een algebraïsche groep.

Voorbeeld 1.1.3. Bekijk nu de groep $G = \mathbb{PGL}_n = \mathbb{GL}_n/k^*$. Merk op dat $0 \notin \mathbb{GL}_n$, en dat het complement van $\mathbb{GL}_n$ in $\mathbb{A}^{n^2}$ zoals hierboven beschreven precies de nulpuntenverzameling van de determinant is, en dit is een homogeen polynoom in de elementen van de matrix. Dus deze is stabiel onder vermenigvuldiging met elementen uit k. Dit betekent dat $\mathbb{GL}_n$ ook stabiel is onder scalaire vermenigvuldiging. Merk dus op dat we G kunnen opvatten als open deelverzameling van $\mathbb{P}^{n^2-1}$; een quasi-projectieve variëteit.
Herinner nu dat een afbeelding $f : X \to \mathbb{P}^n : x \mapsto (f_0(x) : \cdots : f_n(x))$, waar de f_i afbeeldingen zijn van X naar k zodanig dat ze nooit allemaal tegelijk 0 zijn, een morfisme is dan en slechts dan als alle $\frac{f_i}{f_j}$ regulier zijn, d.w.z. dat al deze quotiënten homogene rationale functies zijn van graad 0. (Dit kunnen we inzien door $\mathbb{P}^n$ te overdekken met affiene n-ruimten, op de door de coördinaten gesuggereerde manier, en door in te zien dat regulier zijn een lokale eigenschap is.) Dan volgt uit het vorige voorbeeld dat ook G een algebraïsche groep is.

Voorbeeld 1.1.4. Tenslotte bekijken we de optelgroep van $G = \mathbb{A}^n$, als vectorruimte gezien. Het is vanzelfsprekend een affiene variëteit, en we kunnen nagaan dat μ, ι allebei morfismen zijn. Dus $\mathbb{A}^n$ is een algebraïsche groep.

Zij G een algebraïsche groep. Merk nu op dat de linksvermenigvuldiging $\lambda_g : G \to G : x \mapsto gx$ en de rechtsvermenigvuldiging $\rho_g : G \to G : x \mapsto xg$ isomorfismen van variëteiten zijn; λ_g is de beperking van μ tot de gesloten deelverzameling $\{g\} \times G$ van $G \times G$. Dus λ_g is continu. Ook geldt voor iedere reguliere afbeelding $f : G \to k$ dat μf regulier is, dus is de beperking $\lambda_g f$ ook regulier. Hieruit volgt dat λ_g een morfisme is. Nu zien we dat $\lambda_{g^{-1}}$ de inverse is van λ_g, dus is λ_g zelfs een isomorfisme. Analoog voor ρ_g.

Definitie 1.1.5. Zij G een algebraïsche groep. Dan is een *gesloten ondergroep* van G een ondergroep die (Zariski) gesloten is.

Voorbeeld 1.1.6. We beschouwen de algebraïsche groep $\mathbb{GL}_n$. Voorbeelden van gesloten ondergroepen zijn dan:

- Iedere eindige ondergroep
- De orthogonale groep $\mathbb{O}_n = \{A \in \mathbb{GL}_n \mid A^T A = I\}$
- De speciale lineare groep $\mathbb{SL}_n = \{A \in \mathbb{GL}_n \mid \det A = 1\}$
- De speciale orthogonale groep $\mathbb{SO}_n = \mathbb{O}_n \cap \mathbb{SL}_n$
- De groep $\mathbb{T}_n$ van bovendriehoeksmatrices
- De groep $\mathbb{U}_n$ unipotente bovendriehoeksmatrices, d.w.z. die met enen op de diagonaal

Definitie 1.1.7. Zij G, G' twee algebraïsche groepen, en zij $f : G \to G'$ een afbeelding. Dan f heet een *homomorfisme (van algebraïsche groepen)* als f

1. een homomorfisme van groepen is;
2. een morfisme van variëteiten is.

Voorbeeld 1.1.8. Zij G een algebraïsche groep, en zij H een gesloten ondergroep van G. Dan is de inclusieafbeelding $H \to G$ een homomorfisme van algebraïsche groepen.

We kunnen ook productgroepen definiëren.

Definitie 1.1.9. Zij G, G' algebraišche groepen. Dan is de productvariëteit $G \times G'$, samen met de groepstructuur van de productgroep, weer een algebraïsche groep, namelijk de *productgroep*.

1.2 Basistheorie

In een willekeurige variëteit geldt dat het irreducibel zijn van de variëteit impliceert dat deze samenhangend is. De omgekeerde implicatie hoeft niet altijd te gelden. Neem namelijk de vereniging Z van de x- en de y-as in $\mathbb{A}^2$ als variëteit. (Deze is gesloten, want deze is de nulpuntenverzameling van xy.) Deze is samenhangend, maar niet irreducibel. In een algebraïsche groep echter, vallen deze twee noties wel samen, zoals blijkt uit de volgende propositie.

Propositie 1.2.1. *Zij G een algebraïsche groep.*

1. *Er is een unieke irreducibele component G^0 van G die het eenheidselement bevat. Dit is een normale gesloten ondergroep van eindige index;*

2. *G^0 is de unieke samenhangende component van G die 1 bevat.*

3. *Iedere gesloten ondergroep van G van eindige index bevat G^0.*

Bewijs. Zij X en Y irreducibele componenten van G die 1 bevatten, en zij μ, ι respectievelijk de vermenigvuldig- en inversie-morfismen als in definitie 1.1.1. Merk nu op dat $X \times Y$ irreducibel is, zodat ook $XY = \mu[X \times Y]$ irreducibel is. Bovendien geldt dan dat zijn afsluiting $\overline{XY}$ irreducibel is. Nu merken we op dat X en Y irreducibele componenten zijn die deelverzamelingen zijn van $\overline{XY}$. Uit de maximaliteit van X en Y volgt dan dat $X = Y = \overline{XY}$. Dit laat zien dat er een unieke irreducibele component G^0 is die 1 bevat, en dat deze G^0 gesloten is onder de groepsbewerking, immers, we zien dat $G^0G^0 \subseteq \overline{G^0G^0} = G^0$. Merk nu op dat $\left(G^0\right)^{-1} = \iota[G^0]$ ook een irreducibele component is die 1 bevat, omdat ι een homeomorfisme is. Dus $G^0 = \left(G^0\right)^{-1}$, en G^0 is gesloten onder inversen. Dit impliceert dat G^0 een gesloten ondergroep is van G.
Zij $g \in G$, en merk op dat de conjugatieafbeelding $\sigma_g : G \to G : x \mapsto gxg^{-1}$ een isomorfisme is van variëteiten, omdat de vermenigvuldigingen $\lambda_g, \rho_{g^{-1}}$ isomorfismen zijn. In het bijzonder is σ_g dus een homeomorfisme, en omdat $\sigma_g(1) = 1$, volgt als hierboven dat $G^0 = \sigma_g[G^0]$, voor alle $g \in G$. Dus is G^0 normaal.
Tenslotte merken we ook op dat, omdat de λ_g homeomorfismen zijn, alle nevenklassen van G^0 irreducibele componenten zijn. Omdat G als topologische ruimte noethers is, zijn er slechts eindig veel irreducibele componenten. Dus zijn er slechts eindig veel nevenklassen van G^0, zodat G^0 van eindige index is. Dit bewijst (1).
Merk nu op dat alle irreducibele componenten van G disjunct zijn; het zijn immers nevenklassen van G^0. Aangezien deze irreducibele componenten samenhangend en gesloten zijn, volgt hier uit dat de irreducibele componenten precies de samenhangende componenten zijn. Dit bewijst (2).

Zij H tenslotte een gesloten ondergroep van G van eindige index. Dan is H^0, de irreducibele component van H die 1 bevat, een gesloten ondergroep van G van eindige index, waaruit volgt dat het ook een gesloten ondergroep is van G^0 van eindige index. Maar omdat G^0 dan een eindige vereniging is van nevenklassen, volgt ook dat H^0 open is in G^0. Nu volgt uit de samenhangendheid van G^0 dat wegens $H^0 \neq \emptyset$ moet gelden dat $H^0 = G^0$. Dus H bevat G^0, en dit bewijst (3). $\square$

Gevolg 1.2.2. *Zij G een algebraïsche groep. Dan is G irreducibel dan en slechts dan als G samenhangend is.*

We spreken in het algemeen dan ook over samenhangende componenten in plaats van irreducibele componenten.
Veel van de eigenschappen van groepshomomorfismen blijven geldig in de context van de algebraïsche groepen. Concreter:

Propositie 1.2.3. *Zij G, G' algebraïsche groepen, en zij $\phi : G \to G'$ een homomorfisme van algebraïsche groepen. Dan is de kern van ϕ een normale gesloten* *ondergroep van G, en het beeld een gesloten ondergroep van G'. Bovendien geldt dat $\phi[G^0] = \phi[G]^0$.*

Voor het bewijs hiervoor hebben we een aantal lemma's nodig.

Lemma 1.2.4. *Zij G een algebraïsche groep, en zij U, V open, dichte deelverzamelingen van G. Dan geldt $UV = G$.*

Bewijs. Zij $g \in G$. Merk op dat, omdat λ_g, ι homeomorfismen zijn, de verzameling gV^{-1} open en dicht is. Nu merken we op dat $U \cap G^0, gV^{-1} \cap G^0$ beiden open en dicht zijn in de samenhangende component G^0. Dus is $U \cap gV^{-1}$ nietleeg. Dat betekent dat er $u \in U$, $v \in V$ zijn zodanig dat $u = gv^{-1}$, oftewel dat $g = uv \in UV$. □

Voorbeeld 1.2.5. Bekijk $\mathbb{GL}_n$ als open deelverzameling van $\mathbb{A}^{n^2}$. Deze laatste is een affiene algebraïsche groep onder optelling. Het lemma impliceert dan dat iedere matrix geschreven kan worden als de som van twee inverteerbare matrices. Dit kunnen we ook eenvoudig zien zonder het lemma te gebruiken. Zij A namelijk een matrix, en zij $x \in k$ geen eigenwaarde van A. Dan zijn $k1$ en $A - k1$ inverteerbaar, en hun som is A.

Lemma 1.2.6. *Zij G een algebraïsche groep en H een ondergroep. Dan is de afsluiting $\overline{H}$ ook een ondergroep, en als H een niet-lege open verzameling van $\overline{H}$ bevat, dan is H gesloten.*

Bewijs. We willen eerst laten zien dat $\overline{H}$ gesloten is onder de groepsbewerking. Merk op dat $H = gH \subseteq g\overline{H}$ voor alle $g \in H$. Omdat λ_g een homeomorfisme is, is $g\overline{H}$ gesloten. Dus $\overline{H} \subseteq g\overline{H}$, oftewel $g^{-1}\overline{H} \subseteq \overline{H}$ voor alle $g \in H$. Dus $H\overline{H} \subseteq \overline{H}$. Hieruit volgt voor iedere $g \in \overline{H}$ dat $Hg \subseteq \overline{H}$. Omdat $\overline{H}g$ de afsluiting is van Hg, zien we dat $\overline{H}g \subseteq \overline{H}$ voor alle $g \in \overline{H}$. We concluderen hieruit dat $\overline{H}\,\overline{H} \subseteq \overline{H}$; de afsluiting van H is gesloten onder de groepsbewerking. Merk nu op dat ι een homeomorfisme is, dus $\overline{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} = \overline{H}$, waaruit we kunnen afleiden dat $\overline{H}$ gesloten is onder inversen nemen. Dus is $\overline{H}$ een ondergroep van G.
Stel nu dat H een niet-lege open deelverzameling U van $\overline{H}$ bevat. Dan is $H = \bigcup_{g \in H} gU$ open en dicht in $\overline{H}$. Dus kunnen we Lemma 1.2.4 toepassen om te zien dat $H = HH = \overline{H}$. Dus is H gesloten. □

Bewijs van Propositie 1.2.3. Uit de groepentheorie volgt dat $\ker\phi$ een normale ondergroep is van G, en uit de topologie volgt dat $\ker\phi$ gesloten is. Dus is $\ker\phi$ een normale gesloten ondergroep van G.
Uit de groepentheorie volgt ook dat $\phi[G]$ een ondergroep is van G', en omdat ϕ een morfisme van variëteiten is, geldt dat $\phi[G]$ een niet-lege open deelverzameling bevat van zijn afsluiting. Volgens Lemma 1.2.6 is $\phi[G]$ dus gesloten.
Merk tenslotte op dat $\phi[G^0]$ een gesloten ondergroep is van $\phi[G]$ van eindige index, en dat uit de continuïteit van ϕ volgt dat $\phi[G^0]$ bovendien samenhangend is. Uit Propositie 1.2.1.3 volgt dan dat $\phi[G]^0 \subseteq \phi[G^0]$, en omdat $\phi[G^0]$ samenhangend is, volgt ook dat $\phi[G^0] = \phi[G]^0$. □

Propositie 1.2.7. *Zij G een algebraïsche groep, en zij $(X_i)_{i\in I}$ een familie irreducibele variëteiten, en voor iedere $i \in I$ een morfisme $\phi_i : X_i \to G$. Zij H de kleinste gesloten ondergroep die de beelden $Y_i = \phi_i[X_i]$ bevat, en neem aan* *dat alle Y_i het eenheidselement bevatten. Dan is H samenhangend, en is H te schrijven als een eindig product $Y_{i_1}^{\pm 1} \cdots Y_{i_n}^{\pm 1}$ voor zekere niet-negatieve gehele n.*

Bewijs. Door de $(X_i)_{i \in I}$ uit te breiden wanneer dat nodig is, kunnen we aannemen dat voor iedere $i \in I$, er geldt dat $Y_i^{-1} \in (Y_j)_{j \in I}$. Dan merken we voor $Y_a = Y_{a_1} \cdots Y_{a_m}$ en $Y_b = Y_{b_1} \cdots Y_{b_n}$ op dat ze als product van irreducibele verzamelingen weer irreducibel zijn, en dus dat $\overline{Y_a}$ en $\overline{Y_b}$ dat ook zijn. We merken ook op dat voor $Y_c = Y_a Y_b$, we als in het bewijs van 1.2.6 kunnen opmerken dat $\overline{Y_a}\,\overline{Y_b} \subseteq \overline{Y_c}$. Neem nu Y_a zodanig dat de dimensie van zijn afsluiting maximaal is. Dan geldt dus $\overline{Y_a} \subseteq \overline{Y_a}\,\overline{Y_b} \subseteq \overline{Y_c}$. Vanwege de maximaliteit van $\dim \overline{Y_a}$ geldt nu dat $\overline{Y_a}$ geen strikte deelverzameling kan zijn van $\overline{Y_c}$. Dus geldt $\overline{Y_a} = \overline{Y_c}$, waaruit volgt dat $\overline{Y_b} \subseteq \overline{Y_a}$. Ook volgt hier uit dat $\overline{Y_a}$ een groep is; deze is gesloten onder vermenigvuldiging, want $\overline{Y_a}\,\overline{Y_a} \subseteq \overline{Y_a}$, en gesloten onder inversen, want $\overline{Y_a^{-1}} \subseteq \overline{Y_a Y_a^{-1}} \subseteq \overline{Y_a}$.

Nu merken we op dat Y_a een niet-lege open deelverzameling U van $\overline{Y_a}$ bevat. Omdat $\overline{Y_a}$ irreducibel is, volgt hieruit dat U dicht is in $\overline{Y_a}$. Dus kunnen we Lemma 1.2.4 toepassen om te zien dat $UU = \overline{Y_a}$. Hieruit volgt bovendien dat $Y_a Y_a = \overline{Y_a}$. Dus als we $H = \overline{Y_a}$ nemen, dan is $H = Y_a Y_a = Y_{a_1} \cdots Y_{a_m} Y_{a_1} \cdots Y_{a_m}$, en omdat Y_a irreducibel is, is H dat ook; H is dus samenhangend. □

We zeggen dan dat H de gesloten ondergroep is *voortgebracht* door de Y_i.

Gevolg 1.2.8. *Zij $(G_i)_{i \in I}$ een collectie gesloten samenhangende ondergroepen van G. Dan is het door de G_i voortgebrachte ondergroep H gesloten en samenhangend, en is H te schrijven als een eindig product $G_{i_1} \cdots G_{i_n}$.*

1.3 Werkingen

Definitie 1.3.1. Zij G een algebraïsche groep, en zij X een variëteit. Dan is een *werking* van G op X een morfisme $a : G \times X \to X$ (notatie: $a(g, x) = gx$) die voor alle $g, h \in G, x \in X$ voldoet aan

1. $g(hx) = (gh)x$;
2. $1x = x$.

We noemen X dan ook wel een *G-variëteit* of een *G-ruimte.*

Merk hierbij op dat gegeven een werking $a : G \times X \to X$, we twee families morfismen, $a_g : X \to X : x \mapsto gx$ en $\alpha_x : G \to X : g \mapsto gx$ krijgen.

Definitie 1.3.2. Zij G een algebraïsche groep, en zij X een G-ruimte. Dan is X *homogeen* als de werking van G op X transitief is.

Voorbeeld 1.3.3. We bekijken de natuurlijke werking (van groepen) van $\mathbb{GL}_n$ op de vectorruimte $\mathbb{A}^n$. We laten zien dat dit ook een werking van algebraïsche groepen is, d.w.z. dat $a : \mathbb{GL}_n \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ een morfisme is. Wederom gebruik makend van het feit dat een afbeelding $f = (f_1, \ldots, f_n)$ naar een affiene variëteit een morfisme is dan en slechts dan als alle f_i regulier zijn, merken we op dat dit inderdaad het geval is. Deze werking is niet transitief, want we zien dat $\mathbb{GL}_n 0 = 0$. Maar als we de werking daarentegen beperken tot de quasi-affiene variëteit $\mathbb{A}^n \setminus 0$, dan is deze werking wel weer transitief. Met andere woorden, de banen van $\mathbb{A}^n$ onder G zijn precies 0 en $\mathbb{A}^n \setminus 0$.

Definitie 1.3.4. Zij G een algebraïsche groep, en zij X, Y twee G-ruimtes. Een morfisme $\phi : X \to Y$ is een *G-morfisme*, als voor alle $x \in X$ geldt dat $\phi(gx) = g\phi(x)$. Een G-morfisme wordt ook wel een *equivariant* morfisme genoemd.

We definiëren de *baan* en de *stabilisator* van een element van X op de gebruikelijke manier, met de opmerking dat de stabilisator altijd een *gesloten* ondergroep is.

Definitie 1.3.5. Zij G een algebraïsche groep, en V een eindigdimensionale k-vectorruimte. Een *rationale representatie* van G in V is een homomorfisme (van algebraïsche groepen) $r : G \to GL(V)$.

Opmerking. Als we V beschouwen als een affiene variëteit, dan hebben we een werking van G op V door $gv = r(g)v$. Dus kunnen we V opvatten als G-ruimte.

Propositie 1.3.6. *Zij G een algebraïsche groep, en zij X een G-ruimte. Zij $x \in X$.*

1. *De baan Gx is open in zijn afsluiting.*
2. *Er zijn gesloten banen.*

Bewijs. Merk ten eerste op dat α_x een morfisme van G naar X is, zodat er een $U \subseteq Gx$ is die open is in $\overline{Gx}$. Maar $Gx = \bigcup_{g \in G} gU$, waaruit volgt dat de baan Gx zelf open is in zijn afsluiting. Dit bewijst (1).

Uit het bovenstaande volgt dat de verzameling $S_x = \overline{Gx} \setminus Gx$ gesloten is. Nu geldt voor iedere $g \in G$ dat $S_{gx} = \overline{Ggx} \setminus Ggx = \overline{Gx} \setminus Gx = S_x$. Dus S_x is G-stabiel, wat impliceert dat S_x een vereniging van banen is. Merk op dat de topologische ruimte X noethers is, dus bestaat er een x waarvoor S_x minimaal is. Als deze niet-leeg zou zijn, dan bestaat er een $y \in X$ waarvoor $Gy \subseteq S_x$. Omdat S_x gesloten is, geldt $\overline{Gy} \subseteq S_x$, en dus ook dat $S_y \subset S_x$, een tegenspraak. Dus moet S_x leeg zijn, waaruit volgt dat de baan Gx gesloten is. Dit bewijst (2). □

Een baan is dus een lokaal gesloten deelverzameling van X. We kunnen zo'n baan dus zien als een variëteit, en als zodanig is het een homogene G-ruimte.

Voorbeeld 1.3.7. We bekijken weer de situatie van Voorbeeld 1.3.3. Zoals we daar hebben gezien, heeft $\mathbb{A}^n$ twee banen onder $\mathbb{GL}_n$, namelijk 0 en $\mathbb{A}^n \setminus 0$. De eerste is gesloten, en de tweede is slechts lokaal gesloten.

2 Lineaire algebraïsche groepen

2.1 Definitie

Definitie 2.1.1. Een algebraïsche groep G is *affien* als de onderliggende variëteit affien is.

Voorbeeld 2.1.2. $\mathbb{GL}_n$ is een affiene algebraïsche groep. We hebben al in Voorbeeld 1.1.2 laten zien dat $\mathbb{GL}_n$ een algebraïsche groep is. We hoeven dus alleen nog maar te laten zien dat het een affiene variëteit is. Beschouw de afbeelding $\phi : \mathbb{GL}_n \to \mathbb{A}^{2n^2} : A \mapsto (A, A^{-1})$, en zij G het beeld hiervan. Dan is G gelijk aan $\{(A, B) \in \mathbb{A}^{2n^2} \mid AB = 1\}$, en dus is G gesloten. Merk dan op dat $\phi : \mathbb{GL}_n \to G$ een surjectief morfisme is, want de elementen van A^{-1} zijn rationale functies in die van A. De inverse $\phi^{-1} : G \to \mathbb{GL}_n : (A, B) \mapsto A$ is de beperking van een projectie $\mathbb{A}^{2n^2} \to \mathbb{A}^{n^2}$, dus het is ook een morfisme. Dus $\mathbb{GL}_n \cong G$, en G is affien.
Uit deze constructie zien we nu ook dat $k[\mathbb{GL}_n] = k[G] = k[T_{ij}, U_{ij}]/I$, waar I het ideaal is voortgebracht door $\sum_k T_{ik}U_{kj} - \delta_{ij}$.
Hieruit volgt direct dat ook alle gesloten ondergroepen van $\mathbb{GL}_n$, waaronder dus die in Voorbeeld 1.1.6, ook affiene algebraïsche groepen zijn.

Voorbeeld 2.1.3. We bekijken nu $\mathbb{PGL}_n$, zoals in Voorbeeld 1.1.3. Het is hier eenvoudiger in te zien dat dit een affiene variëteit is; het is namelijk de projectieve $n^2 - 1$-ruimte, zonder de nulpuntsverzameling van een enkel polynoom, de determinant. Dus ook $\mathbb{PGL}_n$ is een affiene algebraïsche groep.

Affiene algebraïsche groepen worden meestal *lineaire* algebraïsche groepen genoemd. De reden hiervoor is de volgende stelling.

Stelling 2.1.4. *Zij G een lineaire algebraïsche groep. Dan is G isomorf met een gesloten ondergroep van $\mathbb{GL}_n$ voor een zekere $n \in \mathbb{Z}_0^+$.*

2.2 Bewijs

Het idee van het bewijs van deze stelling is om bepaalde werkingen van G op zijn eigen coördinatenring $k[G]$ te bekijken. We willen dus nog wat meer over werkingen weten. In het vervolg is G steeds een lineaire algebraïsche groep, X een affiene G-ruimte, met bijbehorende werking $a : G \times X \to X$. Omdat alle betrokken variëteiten affien zijn, induceert a een k-algebrahomomorfisme $a^* : k[X] \to k[G \times X]$. Definieer de afbeelding $s : G \to GL(k[X])$ nu door $(s(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$, waarbij we de elementen uit de coördinaatringen opvatten als reguliere functies. Dit is een homomorfisme van groepen, en we willen nu laten zien dat deze in feite opgebouwd kan worden uit rationale representaties. (Merk hierbij ook op dat $k[X]$ meestal een oneindigdimensionale vectorruimte is, zodat $GL(k[X])$ geen algebraïsche groep is. De afbeelding s is dus zelf geen rationale representatie.)

Opmerking. We hebben een k-algebra-isomorfisme $k[G] \otimes k[X] \to k[G \times X]$ gegeven door
$$u \otimes f \mapsto [(g, x) \mapsto u(g)f(x)].$$

Lemma 2.2.1. *Zij V een eindigdimensionale deelruimte van $k[X]$. Dan is er een eindigdimensionale deelruimte W die V bevat, en die stabiel is onder alle $s(g)$.*

Bewijs. Merk op dat het voldoende is om het lemma te bewijzen voor V een ééndimensionale deelruimte. Immers, we kunnen dan in het algemene geval V schrijven als een opspanning van ééndimensionale deelruimten V_i, en voor iedere V_i is er een eindigdimensionale W_i die V_i bevat en die stabiel is onder alle $s(g)$. Dus de opspanning W van alle W_i is een deelruimte die aan alle voorwaarden voldoet.
Dus stel dat $V = kf$ voor een zekere $f \in k[X]$. Schrijf dan $a^*f = \sum_i u_i \otimes f_i$ (in $k[G] \otimes k[X]$). In $k[G \times X]$ wordt dit $a^*f(g,x) = \sum_i u_i(g)f_i(x)$. Hieruit volgt dat, voor alle g,

$$(s(g)f)(x) = f(g^{-1}x) = a^*f(g^{-1},x) = \sum_i u_i(g)f_i(x).$$

Dus alle $s(g)f$ bevinden zich in het eindigdimensionale opspansel W' van de f_i. Merk tenslotte op dat iedere $s(g)$ de verzameling $s[G]$ permuteert d.m.v. linksvermenigvuldiging. Dus het opspansel $W \subseteq W'$ van alle $s(g)f$ is een eindigdimensionale deelruimte van $k[X]$ die V bevat, en die stabiel is onder alle $s(g)$. □

Zoals in het bovenstaande bewijs, zien we dat a^* en s sterk aan elkaar zijn gerelateerd. Dit komt ook naar voren in de volgende propositie:

Propositie 2.2.2. *Zij V een deelruimte van $k[X]$. Dan is V $s[G]$-stabiel dan en slechts dan als $a^*V \subseteq k[G] \otimes V$.*

Bewijs. Neem eerst aan dat $a^*V \subseteq k[G] \otimes V$. Dan kunnen we voor iedere $f \in V$, a^*f schrijven als $\sum_i u_i \otimes f_i \in k[G] \otimes V$. Dus, voor alle $g \in G$,

$$(s(g)f)(x) = f(g^{-1}x) = a^*f(g^{-1},x) = \sum_i u_i(g)f_i(x),$$

waaruit volgt dat $s(g)f \in V$. We kunnen dan concluderen dat V $s[G]$-stabiel is.
Stel nu dat V $s[G]$-stabiel is. Zij (f_i) een basis voor V, en zij (g_j) zodanig dat $(f_i) \sqcup (g_j)$ een basis is voor $k[X]$. Merk dan op dat we a^*f kunnen schrijven als $\sum_i u_i \otimes f_i + \sum_j v_j \otimes g_j \in k[G] \otimes k[X]$. Als in het bewijs van Lemma 2.2.1 zien we dan dat voor $f \in V$,

$$s(g)f = \sum_i u_i(g^{-1})f_i + \sum_j v_j(g^{-1})g_j.$$

Uit de $s[G]$-stabiliteit van V volgt dan dat $v_j(g^{-1}) = 0$ voor alle g, m.a.w., $v_j = 0$. Dus $a^*f = \sum_i u_i \otimes f_i \in k[G] \otimes V$. □

Gevolg 2.2.3. *Zij V een $s[G]$-stabiele eindigdimensionale deelruimte van $k[X]$. Dan induceert s een rationale representatie $s_V : G \to GL(V)$.*

Bewijs. Definieer $s_V(g) = s(g)|_V$. We zien dan meteen dat s_V een groepshomomorfisme wordt. We hoeven dus alleen nog maar te laten zien dat s_V een morfisme van variëteiten wordt. Hiervoor gebruiken we de propositie. Omdat V $s[G]$-stabiel is, geldt dat $a^*V \subseteq k[G] \otimes V$. Zij (f_i) een basis voor V, en identificeer $GL(V)$ met $\mathbb{GL}_n$ m.b.v. deze basis. Zij $u_{ij} \in G$ zodanig dat $a^* f_i = \sum_j u_{ij} \otimes f_j$ voor iedere i, j. Dan $s_V(g) f_i = \sum_j u_{ij}(g^{-1}) f_j$. Definieer nu $a_{ij} = u_{ij} \circ \iota \in k[G]$. (Dit werkt, omdat ι een automorfisme is van G.) Dus $s_V(g) f_i = \sum_j a_{ij}(g) f_j$. We kunnen s_V dus opvatten als de matrix (a_{ij}), en aangezien alle coördinaten in $k[G]$ zitten, volgt hieruit dat s_V een morfisme is van variëteiten. Dus is s_V een rationale representatie. □

We bekijken nu het geval waarin $X = G$, en we G op zichzelf laten werken door links- of rechtsvermenigvuldiging. (Resp. de werkingen $a(g, x) = gx$ en $a(g, x) = xg^{-1}$.) De bijbehorende s in het geval van de linksvermenigvuldiging is dan $(\lambda(g) f)(x) = f(g^{-1}x)$, en in het geval van de rechtsvermenigvuldiging $(\rho(g) f)(x) = f(xg)$. (Immers, we hebben s gedefinieerd als $(s(g)f)(x) = f(a(g^{-1}, x))$.) Merk hierbij op dat $\lambda, \rho : G \to \operatorname{Aut} G \subseteq GL(k[G])$. Deze werkingen zijn bovendien trouw, want $\lambda(g) = \mathrm{id}$ impliceert dat voor alle $f \in k[G]$ geldt dat $f(g^{-1}) = f(1)$, waaruit we concluderen dat $g = 1$. Merk nu op dat de $\lambda(g), \rho(g)$ in feite automorfismen zijn van de k-algebra $k[G]$.

Bewijs van Stelling 2.1.4. Merk eerst op dat, omdat G affien is, $k[G]$ gelijk is aan $k[X_1, \dots, X_n]/I$, waar I een of ander ideaal is. Dus $k[G]$ wordt als k-algebra voortgebracht door $X_1, \dots, X_n$. Zij V' het opspansel van de X_i. Dan is er volgens Lemma 2.2.1 er een eindigdimensionale deelruimte $V \subseteq k[G]$ die V' bevat en die $\rho[G]$-stabiel is. Zij (f_i) een basis voor V. Merk dan op dat $k[G] = k[f_1, \dots, f_m]$.
Als in het bewijs van Gevolg 2.2.3 zien we nu dat $\rho(g) f_i = \sum_j a_{ij}(g) f_j$ voor bepaalde $a_{ij} \in k[G]$. Definieer nu $\phi : G \to \mathbb{GL}_m : g \mapsto (a_{ij}(g))$. Volgens datzelfde gevolg is ϕ een rationale representatie, dus een homomorfisme van algebraïsche groepen. Hieruit volgt dat $\phi[G]$ gesloten is in $\mathbb{GL}_m$. Het beeld is dus een affiene variëteit.
We laten nu zien dat ϕ injectief is. Stel namelijk dat $\phi(g) = 1$. Dan geldt $\rho(g) f_i = f_i$ voor alle i. Aangezien $k[G]$ voortgebracht wordt door de f_i, volgt hieruit dat $\rho(g) f = f$ voor alle $f \in k[G]$. Omdat de werking trouw is, volgt nu dat $g = e$. Dus is ϕ injectief. We weten nu dus dat ϕ een bijectief homomorfisme (van algebraïsche groepen) is naar zijn beeld. In het bijzonder is ϕ een isomorfisme van groepen, en een morfisme van variëteiten. We hoeven nu dus alleen nog te laten zien dat ϕ een isomorfisme is van variëteiten.
Zij $\phi^* : k[\mathbb{GL}_m] \to k[G]$ het bijbehorende k-algebra homomorfisme, en merk op dat $k[\phi[G]] = k[\mathbb{GL}_m]/\ker \phi^*$. Met de notaties van Voorbeeld 2.1.2 zien we dan dat $\phi^* T_{ij} = a_{ij}$. Merk ook op dat

$$f_i(g) = (\rho(g) f)(1) = \sum_j a_{ij}(g) f_i(1),$$

zodat de f_i in het beeld zitten. Dus is ϕ^* surjectief. Dus we krijgen een k-algebra-isomorfisme $\phi'^* : k[\phi[G]] \to k[G]$, die correspondeert met het morfisme $\phi : G \to \phi[G]$. Deze laatste is dus een isomorfisme. □

Voorbeeld 2.2.4. We hebben in Voorbeeld 2.1.3 gezien dat $\mathbb{PGL}_n$ een lineaire algebraïsche groep is. Nu willen we schetsen op welke manier $\mathbb{PGL}_n$ in een of andere $\mathbb{GL}_m$ is in te bedden. Beschouw hierbij k^* als een ondergroep van $\mathbb{GL}_n$. We merken allereerst op dat we een werking van $\mathbb{GL}_n$ hebben op $V = kX_1 \oplus \cdots \oplus kX_n$, zodanig dat voor $x \in k, v \in V$, $(xg)v = x \cdot gv$. Dit induceert een

werking van $\mathbb{GL}_n$ op $A = k[X_1, \ldots, X_n]$, en als zodanig, op de deelruimte V' van homogene polynomen van graad n, met de eigenschap dat $(xg)v = x^n \cdot gv$. Definieer nu een nieuwe werking a op V', gegeven door $a(g,v) = \det g^{-1} \cdot gv$. We noteren $a(g,v)$ als $g*v$. Merk nu op dat voor $x \in k$, $x*v = x^{-n} \cdot xv = v$. We zien dus dat de elementen van k^* op V' werken als de identiteit. Dus we hebben een geïnduceerde werking van $\mathbb{PGL}_n$ op V', en dus een rationale representatie $\phi : \mathbb{PGL}_n \to GL(V')$.
Deze rationale representatie is injectief, want we zien dat als $g \in \mathbb{GL}_n \setminus k$, dat er dan een vector $v \in V$ is die door g niet op kv wordt afgebeeld. De vector $v^n \in V'$ wordt dus ook niet in kv^n afgebeeld. Hieruit volgt dus dat $g * v^n = \det g^{-1} \cdot gv^n \notin kv^n$, en dus dat $g * v^n \neq v^n$. Dus zit de klasse van g in $\mathbb{PGL}_n$ niet in $\ker \phi$. We zien dus dat ϕ een injectief morfisme is. Om nog te laten zien dat ϕ een isomorfisme als in Stelling 2.1.4 induceert, moeten we nog laten zien dat het beeld gesloten is, en dat ϕ een isomorfisme naar zijn beeld is. Dit laten we hier achterwege.

De volgende resultaten zeggen iets over het gedrag van links- en rechtsvermenigvuldigingen.

Propositie 2.2.5. *Zij H nu een gesloten ondergroep van G.*

$$H = \{g \in G \mid \lambda(g)I_G(H) = I_G(H)\} = \{g \in G \mid \rho(g)I_G(H) = I_G(H)\}.$$

Bewijs. Zij $g \in H$. Dan geldt voor $f \in I_G(H)$ dat voor iedere $x \in H$ geldt dat $g^{-1}x \in H$, zodat $(\lambda(g)f)(x) = 0$. Dus we hebben de inclusie naar rechts in het geval van λ. Stel nu dat $\lambda(g)f \in I_G(H)$ voor alle $f \in I_G(H)$. Dan $f(g^{-1}) = (\lambda(g)f)(1) = 0$ voor alle $f \in I_G(H)$, waaruit volgt dat $g \in H$. Analoog voor het geval van ρ. $\square$

Propositie 2.2.6. *Zij ϕ een k-algebra endomorfisme van $k[G]$. Dan is er een $g \in G$ zodanig dat $\phi = \rho(g)$ dan en slechts dan als $\phi\lambda(x) = \lambda(x)\phi$ voor alle $x \in G$. En er is een $g \in G$ zodanig dat $\phi = \lambda(g)$ dan en slechts dan als $\phi\rho(x) = \rho(x)\phi$ voor alle $x \in G$.*

Bewijs. We bekijken de eerste genoemde equivalentie; de andere kunnen we namelijk op precies dezelfde manier bewijzen. Het moge duidelijk zijn dat voor iedere $x, g \in G$, $\rho(g)\lambda(x) = \lambda(x)\rho(g)$. Dus neem aan dat $\phi\lambda(x) = \lambda(x)\phi$ voor alle x. We herinneren ons dat de morfismen $\phi : \mathbb{A}^0 \to G$ corresponderen met de k-algebra homomorfismen $\phi^* : k[G] \to k$, waar $\phi^*(f) = f \circ \phi(0)$. Merk nu op dat we een homomorfisme $h^* : k[G] \to k : f \mapsto (\phi f)(1)$ hebben. Zij h het bijbehorende morfisme, en zij $g = h(0)$. Dan zien we dat

$$\begin{aligned}(\phi f)(x) = \big(\lambda(x^{-1})\phi f\big)(1) = \big(\phi\lambda(x^{-1})f\big)(1)& \\ = h^*\big(\lambda(x^{-1})f\big) = \big(\lambda(x^{-1})f\big)(g) = f(xg).&\end{aligned}$$

Dus $\phi = \rho(g)$. $\square$

2.3 Quotiënten

In de groepentheorie weten we dat, gegeven een groep G en een normale ondergroep N we een quotiëntgroep G/N kunnen maken. We willen dit ook gaan doen voor lineaire algebraïsche groepen. In de rest van deze sectie nemen we aan dat G een lineaire algebraïsche groep is, en dat H een gesloten ondergroep is. We willen nu de verzameling G/H van rechternevenklassen ven een structuur van een quasi-projectieve variëteit voorzien.

Lemma 2.3.1. *Er is een eindigdimensionale deelruimte $V \subseteq k[G]$ en een deelruimte $W \subseteq V$ zodanig dat V $\rho[G]$-stabiel is, en dat $H = \{x \in G \mid \rho(x)W = W\}$.*

Bewijs. Zij $I = I_G(H)$, en zij (f_i) een eindige familie voortbrengers voor I. (Dit kan, want $k[G]$ is noethers.) Uit Propositie 2.2.2 volgt nu dat er een eindigdimensionale $V \subseteq k[G]$ is die $\rho[G]$-stabiel is en die de f_i bevat. Zij $W = V \cap I$.
Uit Propositie 2.2.5 volgt nu dat voor $x \in H$, $\rho(x)W = W$. Dus $H \subseteq \{x \in G \mid \rho(x)W = W\}$. Stel nu dat voor $x \in G$, $\rho(x)W = W$. Dan zien we dat $\rho(x)f_i \in W \subseteq I$. Aangezien de f_i het ideaal I voortbrengen, geldt dus dat $\rho(x)I \subseteq I$. Dus kunnen we Propositie 2.2.5 weer toepassen om te zien dat $x \in H$. We concluderen dat $H = \{x \in G \mid \rho(x)W = W\}$. □

We willen nu van W een ééndimensionale ruimte maken. Dit doen we als volgt. Stel dat W dimensie d heeft. Dan kunnen we in plaats van V en W, de uitwendige producten $V' = \Lambda^d V$ en $W' = \Lambda^d W$ bekijken, waarvan de laatste ééndimensionaal is. Zij ϕ nu de natuurlijke representatie $GL(V) \to GL(\Lambda^d V)$. Dan zien we dat voor $A \in GL(V)$, $AW = W$ dan en slechts dan als $\phi(A)W' = W'$. Want als $AW = W$, dan is het duidelijk dat $\phi(A)W' = W'$. Stel nu dus dat $\phi(A)W' = W'$. Zij $(v_i)_{i=1}^n$ dan een basis voor V zodanig dat $v_1, \dots, v_d$ een basis vormen voor W, en dat $v_{l+1}, \dots, v_{l+d}$ een basis vormen voor AW voor een zekere l. Zij $w_1 = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$, en zij $w_2 = v_{l+1} \wedge \dots \wedge v_{l+d}$. In dat geval geldt dus dat $\phi(A)w_1 \in kw_2$. Maar als $l > 0$, zijn w_1, w_2 lineair onafhankelijk, zodat $\phi(A)W' \neq W'$. Dus $l = 0$, en dit impliceert dat $AW = W$. Dit impliceert het volgende.

Stelling 2.3.2. *Er bestaat een eindigdimensionale vectorruimte V, een rationale representatie $\phi : G \to GL(V)$ en een $v \in V \setminus \{0\}$ zodanig dat $H = \{x \in G \mid \phi(x)v \in kv\}$.*

Nu kunnen we G/H gaan voorzien van een structuur van een quasi-projectieve variëteit. Bekijk namelijk de projectieve ruimte $\mathbb{P}(V)$ van ééndimensionale deelruimten van V. Zij $\pi : V \setminus \{0\}$ de afbeelding die een vector z afbeeldt op de ééndimensionale ruimte $kz \in \mathbb{P}(V)$, en zij $x = \pi v$. Merk op dat we een werking van G op $\mathbb{P}(V)$ hebben, gegeven door $g\pi(v) = \pi(\phi(g)v)$. Zij X nu de baan van x onder G. Omdat deze lokaal gesloten is, is X een quasi-projectieve homogene G-ruimte. Uit de bovenstaande stelling volgt dan dat de isotropiegroep van x in X gelijk is aan H. Merk ook op dat we nu een morfisme $\psi : G \to X : g \mapsto gx$ hebben, waarvan de vezels precies de rechternevenklassen van H in G zijn. We kunnen dus X als verzameling met G/H identificeren. Als zodanig krijgt G/H van X dus de structuur van een quasi-projectieve homogene G-ruimte, waarbij de werking gegeven wordt door de linksvermenigvuldiging. We hebben ook het volgende feit over G/H, dat we wel gaan gebruiken, maar niet gaan bewijzen.

Feit 2.3.3. *G/H is een* quotiënt *van G over H, d.w.z. het paar $(G/H, H)$ voldoet aan de volgende* universele eigenschap*:*

- *Voor ieder paar (Y, y) van een homogene G-ruimte Y en een element $y \in Y$ waarvoor de isotropiegroep H bevat, is er een uniek equivariant morfisme $\phi : G/H \to Y$ zodanig dat $\phi(H) = y$.*

Zij G nu een lineaire algebraïsche groep, en zij N een normale gesloten ondergroep. Dan heeft G/N een groepsstructuur, en een structuur van een quasi-projectieve variëteit. Om te laten zien dat G/N een algebraïsche groep is, hoeven we dus nog alleen maar te laten zien dat de vermenigvuldigafbeelding $G/N \times G/N \to G/N$ een morfisme is. Hiervoor maken we gebruik van het volgende feit.

Feit 2.3.4. *Zij G_1, G_2 lineaire algebraïsche groepen, en zij $H_1 \subseteq G_1, H_2 \subseteq G_2$ gesloten ondergroepen. Dan zijn de $G_1 \times G_2$-ruimten $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2)$ en $(G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$ op een kanonieke wijze isomorf.*

Beschouw nu de $G \times G$-werking op G/N door, voor $x, y, g \in G$, $(x, y)gN = xgy^{-1}N$, en merk op dat de isotropiegroep van N de ondergroep $N \times N$ van $G \times G$ bevat. Dus kunnen we de universele eigenschap in Feit 2.3.3 toepassen op het paar $(G/N, N)$ om te zien dat we een morfisme van variëteiten $G \times G/N \times N \to G/N$ krijgen, gegeven door $(x, y)N \times N \mapsto xy^{-1}N$. Vanwege Feit 2.3.4 zien we nu dat we een morfisme $G/N \times G/N \to G/N$ krijgen, gegeven door $(xN, yN) \mapsto xy^{-1}N$. Samengesteld met de morfisme $G/N \times G/N \to G/N \times G/N : (xN, yN) \mapsto (xN, y^{-1}N)$ geeft dit de vermenigvuldigafbeelding, dat dus een morfisme is. Dus is G/N een algebraïsche groep.
Tenslotte merken we op dat in feite nog meer waar is; G/N blijkt namelijk zelfs een lineaire algebraïsche groep te worden. Als voorbeeld hebben we $\mathbb{PGL}_n = \mathbb{GL}_n/k^*$, die in eerdere voorbeelden behandeld is.

3 Jordandecompositie

3.1 Jordandecompositie van endomorfismen van vectorruimten

We herhalen eerst wat begrippen en feiten uit de lineaire algebra. Zij V een eindigdimensionale vectorruimte over k, en zij A een endomorfisme van V. Dan heet A *semisimpel* (ook wel bekend als *diagonaliseerbaar*) als V een basis heeft van eigenvectoren van A, en heet A *nilpotent* als $A^s = 0$ voor zekere positieve gehele s. We noemen A *unipotent* als $A - 1$ nilpotent is.
Dan hebben we de volgende propositie over de (multiplicatieve) Jordandecompositie.

Propositie 3.1.1. *Zij $A \in GL(V)$. Dan zijn er unieke $A_s, A_u \in GL(V)$ zodanig dat A_s semisimpel is, A_u unipotent, en $A = A_sA_u = A_uA_s$. Er zijn polynomen P_s, P_u zodanig dat $A_s = P_s(A), A_u = P_u(A)$. Bovendien geldt dan dat als W een A-stabiele deelruimte is van V, deze dan ook A_s- en A_u-stabiel zijn. In dat geval geldt $A|_W = A_s|_W A_u|_W$, en $A' = (A_s)'(A_u)'$, waar A' het endomorfisme van V/W is geïnduceerd door A.*

Gevolg 3.1.2. *Zij $A, B \in \operatorname{End} V$, en zij $\phi : V \to W$ lineair. Als $\phi \circ A = B \circ \phi$, dan $\phi \circ A_s = B_s \circ \phi$ en $\phi \circ A_u = B_u \circ \phi$.*

Bewijs. We kunnen de afbeelding $\phi : V \to W$ opsplitsen in $\mathrm{id} \oplus \phi : V \to V \oplus W$ en $\pi : V \oplus W \to W$, respectievelijk een injectieve en een surjectieve afbeelding. Pas nu de propositie toe. □

We gaan deze theorie nu uitbreiden, zodat we deze ook op algebraïsche groepen kunnen toepassen. We willen graag G door endomorfismen (hetzij links-, hetzij rechtstranslaties) op zijn coördinatenalgebra $k[G]$ laten werken. Maar het probleem is dat $k[G]$ over het algemeen niet eindigdimensionaal is. We moeten dus eerst de begrippen *semisimpel*, *nilpotent* en *unipotent* uitbreiden naar bepaalde endomorfismen van oneindigdimensionale ruimten.

Definitie 3.1.3. Zij V een vectorruimte, en zij A een endomorfisme. Dan heet A *lokaal eindig* als V een vereniging is van eindigdimensionale A-stabiele deelruimten van V.

Definitie 3.1.4. Zij V een vectorruimte, en zij A een lokaal eindige endomorfisme.

- A heet *semisimpel* als iedere beperking tot een A-stabiele deelruimte semisimpel is.
- A heet *lokaal nilpotent* als iedere beperking tot een A-stabiele deelruimte nilpotent is.
- A heet *lokaal unipotent* als $A - 1$ lokaal nilpotent is.

Nu hebben we het volgende analogon van Propositie 3.1.1.

Propositie 3.1.5. *Zij $A \in GL(V)$ lokaal eindig. Dan zijn er unieke $A_s, A_u \in GL(V)$ zodanig dat A_s semisimpel is, A_u lokaal unipotent, en $A = A_s A_u = A_u A_s$. Bovendien geldt dan dat als W een A-stabiele deelruimte is van V, deze dan ook A_s- en A_u-stabiel zijn. In dat geval geldt $A|_W = A_s|_W A_u|_W$, en $A' = (A_s)'(A_u)'$, waar A' de endomorfisme van V/W is geïnduceerd door A.*

Bewijs. Zij $x \in V$, en zij W een A-stabiele deelruimte van V die x bevat. Dan definiëren we $A_s x = (A|_W)_s x, A_u x = (A|_W)_u x$. Vanwege Propositie 3.1.1 is deze definitie onafhankelijk van W. Het is nu duidelijk dat $A = A_s A_u = A_u A_s$, dat A_s semisimpel is, dat A_u lokaal unipotent is, en dat (A_s, A_u) uniek is. De rest van de eigenschappen volgt nu uit Propositie 3.1.1. □

Dus op dezelfde manier als voorheen krijgen we nu ook het volgende gevolg.

Gevolg 3.1.6. *Zij $A, B \in \operatorname{End} V$ lokaal eindig, en zij $\phi : V \to W$ lineair. Als $\phi \circ A = B \circ \phi$, dan $\phi \circ A_s = B_s \circ \phi$ en $\phi \circ A_u = B_u \circ \phi$.*

3.2 Jordandecompositie in lineaire algebraïsche groepen

Zij G nu een lineaire algebraïsche groep, en laat G door rechtstranslaties werken op de vectorruimte $k[G]$. Merk op dat $\rho(g)$ wegens Lemma 2.2.1 lokaal eindig is. Er bestaat dus een Jordandecompositie $\rho(g) = \rho(g)_s \rho(g)_u$. Wat we nu willen laten zien is dat $\rho(g)_s, \rho(g)_u$ in feite rechtstranslaties van elementen in G zijn. Zo kunnen we namelijk de Jordandecompositie van $\rho(g)$ 'vertalen' naar een decompositie van $g \in G$. Met Propositie 2.2.6 in ons achterhoofd, bekijken we het volgende lemma.

Lemma 3.2.1. *Zij A een k-algebra, en zij $f : A \to A$ een k-lineaire afbeelding. Zij $m : A \otimes A \to A$ de vermenigvuldigafbeelding. Dan is f een endomorfisme (van k-algebras) dan en slechts dan als $m \circ (f \otimes f) = f \circ m$.*

Bewijs. Dit volgt direct uit het feit dat voor $x, y \in A$, $m \circ (f \otimes f)(x \otimes y) = f(x)f(y)$, en $f \circ m(x \otimes y) = f(xy)$. □

Stelling 3.2.2. *Zij $g \in G$. Er zijn unieke elementen $g_s, g_u \in G$ zodanig dat $\rho(g)_s = \rho(g_s)$ en $\rho(g)_u = \rho(g_u)$. Er geldt dan dat $g = g_s g_u = g_u g_s$.*

Bewijs. Merk op dat $\rho(g)$ een k-algebra automorfisme is. Dan geldt

$$m \circ (\rho(g) \otimes \rho(g)) = \rho(g) \circ m.$$

We zien dan dat

$$m \circ (\rho(g)_s \otimes \rho(g)_s) = \rho(g)_s \circ m,$$

en dus dat $\rho(g)_s$ een endomorfisme is van $k[G]$. Merk nu op dat voor alle $x \in G$, $\lambda(x)\rho(g) = \rho(g)\lambda(x)$, waaruit volgt dat $\lambda(x)\rho(g)_s = \rho(g)_s\lambda(x)$. Dus is $\rho(g)_s$ zelf een rechtstranslatie, en is er een unieke $g_s \in G$ zodanig dat $\rho(g)_s = \rho(g_s)$. (Omdat ρ trouw is.) Op precies dezelfde manier zien we dat er een unieke $g_u \in G$ is zodanig dat $\rho(g)_u = \rho(g_u)$. Hieruit volgt ook meteen dat $g = g_s g_u = g_u g_s$. □

In de situatie van de stelling hierboven noemen we voor $g \in G$, g_s het *semisimpele deel* van g en g_u het *unipotente deel* van g. Het paar (g_s, g_u) heet dan een (abstracte) *Jordandecompositie* van g in G. Als $g = g_s$, dan noemen we g *semisimpel*, en als $g = g_u$, dan heet g *unipotent*. We willen natuurlijk dat deze decompositie zich 'goed gedraagt'. Dit is het onderwerp van de volgende proposities.

Propositie 3.2.3. *Zij G, G' twee lineaire algebraïsche groepen, en zij $\phi : G \to G'$ een homomorfisme van algebraïsche groepen. Zij $g \in G$. Dan $\phi(g_s) = \phi(g)_s, \phi(g_u) = \phi(g)_u$.*

Bewijs. Merk allereerst op dat we ϕ kunnen factorizeren in $G \to \operatorname{im}\phi \to G'$. Omdat $\operatorname{im}\phi$ gesloten is in G', is het voldoende te bewijzen dat de propositie geldt in het geval dat ϕ surjectief is, en in het geval G een gesloten ondergroep van G' is, en ϕ de inclusieafbeelding. Laten we met dit laatste geval beginnen. Zij $I = I_{G'}(G)$ het ideaal van G in G'. Dan merken we op dat $k[G] = k[G']/I$. Merk tevens op dat wegens Propositie 2.2.5, $G = \{g \in G' \mid \rho(g)I = I\}$. Dus I is stabiel onder iedere $\rho(g)$. Zij $g \in G$, en zij $\rho(g) = \rho(g_s)\rho(g_u) \in \operatorname{Aut} k[G']$ de Jordandecompositie, waarbij g_s, g_u de Jordandecompositie ten opzichte van G' is. Dan volgt uit Propositie 3.1.5 dat $\rho(g)'_s = \big(\rho(g)_s\big)' = \rho(g_s)'$, zodat het semisimpele deel van g in de lineaire algebraïsche groep G gelijk is aan die in G', namelijk g_s. Dit argument herhalen we voor g_u. Dit bewijst dit eerste geval. Stel nu dat ϕ surjectief is. Het bijbehorend k-algebra homomorfisme $\phi^* : k[G'] \to k[G]$ is dan injectief, waaruit volgt dat we $k[G']$ op kunnen vatten als een deelalgebra van $k[G]$, die, vanwege ($g \in G, f \in k[G'], x \in G$, ρ is de rechtsvermenigvuldiging in $k[G]$ en ρ' die in $k[G']$)

$$\begin{aligned}(\rho(g)\phi^* f)(x) = \phi^* f(xg) = f(\phi(xg)) = f(\phi(x)\phi(g)) \\ = \big(\rho'(\phi(g))f\big)(\phi(x)) = \big(\phi^*\rho'(\phi(g))f\big)(x)\end{aligned}$$

stabiel is onder alle $\rho(g), g \in G$. Zij $g \in G$, en zij $g = g_s g_u$ de Jordandecompositie. Dan, als we ϕ^* opvatten als een inclusie, geldt voor $g \in G$ dat $\rho(g)|_{k[G']} = \rho'(\phi(g))$. Merk nu op dat Propositie 3.1.5 impliceert dat

$$\rho'(\phi(g_s)) = \rho(g_s)|_{k[G']} = \rho(g)_s|_{k[G']} = (\rho(g)|_{k[G']})_s = \rho'(\phi(g))_s = \rho'(\phi(g)_s),$$

waaruit volgt dat $\phi(g_s) = \phi(g)_s$. Op dezelfde manier laten we zien dat $\phi(g_u) = \phi(g)_u$. $\square$

Propositie 3.2.4. *Als $G = \mathbb{GL}_n$, dan is de abstracte Jordandecompositie in G van $g \in G$ gelijk aan de multiplicatieve Jordandecompositie in G.*

Bewijs. Laat G op de natuurlijke manier werken op $V = \mathbb{A}^n = k^n$, en zij V^* de duale ruimte van V. Zij $f \in V^* \setminus \{0\}$. Dan kunnen we voor iedere $v \in V$, $\overline{f}(v) \in k[G]$ definiëren door $\overline{f}(v)(x) = f(xv)$. Immers, $f \in k[V]$, en $G \to V : g \mapsto [v \mapsto gv]$ is een morfisme. Dan is $\overline{f} : V \to k[G]$ een injectieve lineaire afbeelding. Merk nu op dat voor $g \in G$,

$$\overline{f}(gv)(x) = f(xgv) = \overline{f}(v)(xg) = \rho(g)\overline{f}(x).$$

Dus kunnen we Gevolg 3.1.6 toepassen om te zien dat $\overline{f}(g_s v) = \rho(g)_s \overline{f}(v)$, waar g_s het multiplicatieve semisimpele deel is. Dus $\rho(g_s) = \rho(g)_s$, waaruit volgt dat g_s ook het abstracte semisimpele deel is. Hetzelfde doen we voor g_u. $\square$

Dus we hebben de volgende karakterisering voor het semisimpel (resp. unipotent) zijn van elementen van G.

Gevolg 3.2.5. *Zij ϕ een isomorfisme van G naar een gesloten ondergroep van $\mathbb{GL}_n$. Een element $g \in G$ is semisimpel (resp. unipotent) dan en slechts dan als $\phi(g)$ semisimpel (resp. unipotent) is.*

3.3 Unipotente groepen

Merk op dat binnen een algebraïsche groep G, de verzameling G_u van unipotente elementen gesloten is, door gebruik te maken van Stelling 2.1.4, en het feit dat $A \in \mathbb{GL}_n$ unipotent is dan en slechts dan als $(A-1)^n = 0$. Als $G = G_u$, dan noemen we G *unipotent.* Dit soort groepen hebben een interessante eigenschap.

Stelling 3.3.1 (Kostant-Rosenlicht)**.** *Zij G een unipotente lineaire algebraïsche groep, en zij X een affiene G-ruimte. Dan zijn alle banen gesloten.*

Voordat we deze stelling bewijzen, hebben we het volgende feit over unipotente lineaire algebraïsche groepen.

Feit 3.3.2. *Zij G een unipotente gesloten ondergroep van $\mathbb{GL}_n$. Dan is er een $x \in \mathbb{GL}_n$ zodanig dat $xGx^{-1} \subseteq \mathbb{U}_n$.*

Uit Stelling 2.1.4 volgt nu dat iedere unipotente lineaire algebraïsche groep isomorf is met een gesloten ondergroep van $\mathbb{U}_n$. Ook hebben we het volgende gevolg.

Gevolg 3.3.3. *Zij G een unipotente lineaire algebraïsche groep, V een eindigdimensionale vectorruimte, en $\phi : G \to GL(V)$ een rationale representatie. Dan is er een element van V dat een dekpunt is van alle $\phi(g), g \in G$.*

Bewijs. Bekijk het beeld $\phi[G]$, en merk op dat, voor $g \in G$, $g = g_u$. Dus $\phi(g) = \phi(g_u) = \phi(g)_u$, zodat $\phi(g)$ ook unipotent is. Dus is $\phi[G]$ unipotent, zodat er een basis $(f_i)_{i=1}^n$ is van V ten opzichte van welke $G \subseteq \mathbb{U}_n \subseteq GL(V)$. Dus $Gf_1 = f_1$. □

Bewijs van de stelling van Kostant-Rosenlicht. Zij O een baan in X. Dan is $\overline{O}$ ook een affiene G-ruimte, en O is open in $\overline{O}$. Zij Y het complement van O in $\overline{O}$. Beschouw het ideaal $I_{\overline{O}}(Y)$. De groep G werkt door lokaal eindige endomorfismen $s(g)$ op dit ideaal, conform Propositie 2.2.2. Nu volgt uit het vorige gevolg dat (omdat er een eindigdimensionale niet-triviale deelruimte $V \subseteq I_{\overline{O}}(Y)$ is die $s[G]$-stabiel is) er een $f \in I_{\overline{O}}(Y) \setminus \{0\}$ is zodanig dat $s[G]f = f$. Hieruit volgt dat voor $x \in O$, $f(gx) = f(x)$ voor alle $g \in G$. Dus is f constant op O. Maar O is dicht in zijn afsluiting, dus is f ook constant op $\overline{O}$. Maar f is nul op Y. Dit impliceert dat Y leeg moet zijn, en dus dat $O = \overline{O}$; O is dus gesloten. □

Referenties

[H] Hartshorne, H. – *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag New York Inc., (1977), 1–59

[S] Springer, T.A. – *Linear Algebraic Groups*, Birkhäuser Boston, (1998)