

Algebraische topologie  
en  
de fixpuntstelling van Lefschetz

Relinde Jurrius  
relinde@vierkantvoorwiskunde.nl

Begeleider: R. de Jong



# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Triangularisatie</b>	<b>4</b>
2.1	Een ruimte triangulariseren . . . . .	4
2.2	Barycentrische onderverdeling . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Combinatorische oppervlakken</b>	<b>7</b>
3.1	Triangularisatie en oriëntatie . . . . .	7
3.2	Verdikking . . . . .	9
3.3	Euler-karakteristieken . . . . .	10
3.4	Chirurgie . . . . .	14
3.5	De Euler-karakteristiek van $H_g$ . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Simpliciale homologie</b>	<b>16</b>
4.1	Homologie groepen . . . . .	16
4.2	Voorbeelden . . . . .	17
4.3	Simpliciale benadering . . . . .	19
4.4	Geïnduceerde afbeeldingen . . . . .	21
4.5	Stellaire onderverdeling . . . . .	23
4.6	Invariantie . . . . .	25
<b>5</b>	<b>De fixpuntstelling van Lefschetz</b>	<b>27</b>
5.1	Opnieuw de Euler-karakteristiek . . . . .	27
5.2	Lefschetz-getal en de fixpuntstelling . . . . .	29
5.3	$H_g$ als topologische groep . . . . .	31
5.4	De fixpuntstelling van Brouwer . . . . .	32
5.5	Generalisaties . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Bibliografie</b>	<b>34</b>

# Hoofdstuk 1

## Inleiding

Stel we hebben een continue afbeelding  $f$  van een topologische ruimte naar zichzelf. Is er in deze ruimte een punt dat op zijn plaats blijft door de afbeelding? Zo'n punt, waarvoor  $f(x) = x$ , noemen we een *fixpunt*. Eén van de bekendste stellingen over fixpunten is de fixpuntstelling van Brouwer: deze zegt dat een continue afbeelding van een  $n$ -dimensionale bal naar zichzelf tenminste één fixpunt heeft. Een generalisatie van deze stelling is de fixpuntstelling van Lefschetz. Om deze stelling te kunnen formuleren, zijn aardig wat begrippen uit de algebraïsche topologie nodig. We zullen dan ook pas in het voorlaatste hoofdstuk op de fixpuntstelling van Lefschetz terugkomen.

We beginnen met het concept *triangularisatie*. Grofweg komt dat erop neer dat we een topologische ruimte gaan 'benaderen' door er punten in aan te wijzen en daartussen lijnen, vlakken en hypervlakken te definiëren. Wanneer we bijvoorbeeld een bol willen triangulariseren, kunnen we daar een regelmatig veelvlak voor nemen. Deze 'benadering' is echter niet uniek: er zijn meerdere regelmatige veelvlakken. Door middel van triangularisatie kunnen we allerlei eigenschappen van de topologische ruimte beter bepalen, bijvoorbeeld de fundamenteaalgroep. Daar zullen we ons echter niet mee bezig houden, wel met een eigenschap die we de *Euler-karakteristiek* noemen.

Euler ontdekte dat de regelmatige veelvlakken allemaal een bijzondere eigenschap hebben: het aantal zijvlakken min het aantal ribben plus het aantal hoekpunten is gelijk aan 2. Dit levert de bekende veelvlak-formule  $v - e + f = 2$ . Van een triangularisatie kunnen we ook de Euler-karakteristiek bepalen, waarbij we de definitie eerst generaliseren voor hogere dimensies.

In het bijzonder kijken we naar de bol met  $g$  aangehechte handvatten,  $H_g$ . We zullen zien dat deze ruimte triangulariseerbaar is, dat de Euler-karakteristiek niet afhangt van de keuze van de triangularisatie (vergelijk de veelvlak-formule) en we bepalen de Euler-karakteristiek voor iedere  $g$ .

Om onderscheid te maken tussen verschillende topologische ruimten, kunnen we bijvoorbeeld gebruik maken van de fundamenteaalgroep. Deze is echter niet voldoende, want  $S^3$  en  $S^4$  bijvoorbeeld zijn niet homeomorf, maar hebben wel dezelfde fundamenteaalgroep. We zullen daarom aan een topologische ruimte een hele rij van groepen toevoegen, de *homologiegroepen* genaamd. Op deze manier vinden we als het ware meer eigenschappen van een

ruimte, waardoor het eenvoudiger wordt deze van een andere ruimte te onderscheiden. We definiëren de homologiegroepen aan de hand van de triangularisatie van een ruimte. Omdat deze niet uniek is, zullen we nog wat moeite moeten doen om te laten zien dat de homologiegroepen een topologische invariant van de ruimte zijn, dus dat ze niet afhangen van de gekozen triangularisatie.

Zoals gezegd vinden we in het voorlaatste hoofdstuk de fixpuntstelling van Lefschetz. Eerst zullen we nog een nieuwe definitie van de Euler-karakteristiek geven, waarmee we laten zien dat de Euler-karakteristiek van een ruimte niet afhangt van de gekozen triangularisatie. De fixpuntstelling van Lefschetz maakt gebruik van homomorfismen tussen de homologiegroepen van een ruimte. We zullen aan een continue afbeelding  $f$  van een ruimte naar zichzelf een geheel getal toekennen, het *Lefschetz-getal*  $\Lambda_f$ . Het zal blijken dat als  $\Lambda_f \neq 0$ ,  $f$  een fixpunt heeft: dit is de fixpuntstelling van Lefschetz.

Als toepassing van deze stelling, kijken we weer naar de ruimten  $H_g$ . We laten zien dat de torus  $H_1$  hiervan de enige is die de aanvullende structuur van een topologische groep heeft. Ook zullen we zien dat de fixpuntstelling van Brouwer volgt uit de fixpuntstelling van Lefschetz.

Tenslotte kijken we naar generalisaties van de fixpuntstelling van Lefschetz. Hierbij speelt het aantal fixpunten een belangrijke rol.

# Hoofdstuk 2

## Triangularisatie

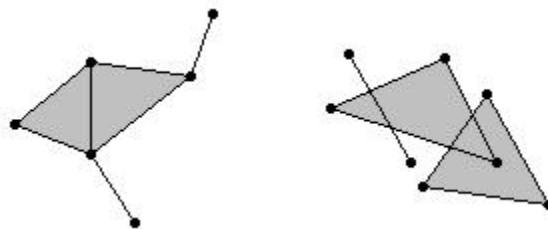
### 2.1 Een ruimte triangulariseren

Laat  $v_0, v_1, \dots, v_k$  punten in de Euclidische ruimte  $\mathbb{E}^n$  zijn met  $k \leq n$ . We kiezen deze punten *in algemene positie*: dit houdt in dat iedere echte deelverzameling van deze punten een hypervlak in  $\mathbb{E}^n$  opspant van strikt lagere dimensie dan dat de hele verzameling doet. Als we  $\mathbb{E}^n$  als vectorruimte beschouwen, dan betekent dit dat de vectoren  $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0$  lineair onafhankelijk zijn.

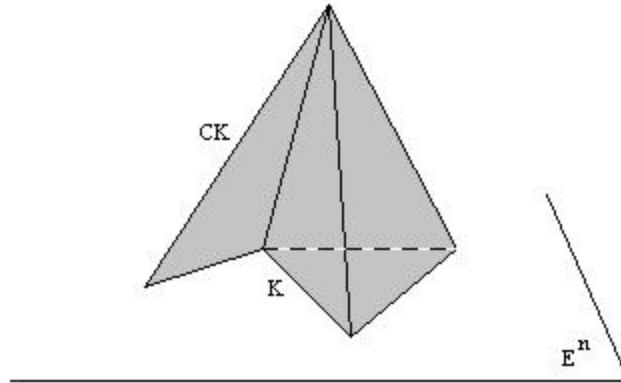
De kleinste convexe deelruimte die deze punten bevat, noemen we een *simplex van dimensie  $k$* , ook wel een  *$k$ -simplex*. Dit simplex bestaat uit alle punten  $x$  die we kunnen schrijven als  $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$  met  $\lambda_i \geq 0$  een reëel getal voor alle  $i$  en  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ . Voor de eerste dimensies kunnen we ons voorstellen wat een  $k$ -simplex is: een 0-simplex is een punt, een 1-simplex is een gesloten lijnsegment, een 2-simplex is een driehoek met zijn inwendige en een 3-simplex is een tetraeder met zijn inwendige.

Merk op dat simplices andere simplices van lagere dimensie bevatten. We zeggen dat het simplex  $B$  een deelsimplex is van een simplex  $A$  als de hoekpunten van  $B$  een deelverzameling vormen van de hoekpunten van  $A$ . We noemen  $B$  dan ook wel een *zijde* van  $A$  en schrijven  $B < A$ .

Simplices kunnen op een natuurlijke manier ‘aan elkaar vast geplakt’ worden. Figuur 2.1 geeft hier een idee van. Dit idee kunnen we op de volgende manier exact beschrijven:



Figuur 2.1: Snijdende simplices: links een complex, rechts niet



Figuur 2.2: Constructie van een kegel

**Definitie 2.1** Een eindige verzameling van simplices in een Euclidische ruimte  $\mathbb{E}^n$  vormt een simpliciaal complex als aan de volgende twee eigenschappen is voldaan:

- (a) Als een simplex in de verzameling ligt, dan liggen al zijn zijdes ook in de verzameling.
- (b) Als twee simplices uit de verzameling elkaar snijden, dan doen ze dat in een gezamenlijke zijde.

De vereniging van alle simplices die samen een complex<sup>1</sup> vormen, is een deelruimte van  $\mathbb{E}^n$ . We noemen dit de *polyeder* van  $K$  en noteren dit als  $|K|$ . Door  $|K|$  de deelruimte-topologie te geven, wordt het een topologische ruimte. In het bijzonder is een polyeder compact en Hausdorff.

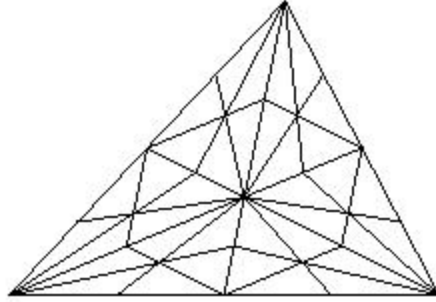
**Definitie 2.2** Een *triangularisatie* van een topologische ruimte  $X$  bestaat uit een simpliciaal complex  $K$  en een homeomorfisme  $h : |K| \rightarrow X$ .

Als voorbeeld bekijken we de tetraeder zonder het inwendige. Deze bestaat uit vier 2-simplices: de zijvlakken van de tetraeder. Deze snijden elkaar in zes 1-simplices: de ribben van de tetraeder. Deze ribben tenslotte komen samen in vier 0-simplices: de hoekpunten van de tetraeder. De tetraeder geeft een triangularisatie voor de omschreven bol, met als homeomorfisme de projectie vanuit het middelpunt van de bol.

Laat  $K$  een complex zijn in  $\mathbb{E}^n$ . We kunnen  $\mathbb{E}^n$  opvatten als de deelruimte van  $\mathbb{E}^{n+1}$  bestaande uit de punten met laatste coördinaat 0. We gaan nu de *kegel op*  $K$  construeren. Neem  $v$  het punt  $(0, 0, \dots, 0, 1)$  in  $\mathbb{E}^{n+1}$ . Als  $A$  een  $k$ -simplex in  $\mathbb{E}^n$  is met hoekpunten  $v_0, v_1, \dots, v_k$ , dan zijn de punten  $v, v_0, v_1, \dots, v_k$  in algemene positie en bepalen daarom een  $(k+1)$ -simplex in  $\mathbb{E}^{n+1}$ . Dit noemen we de *vereniging* van  $A$  naar  $v$ . De kegel  $CK$  bestaat nu uit de simplices van  $K$ , de verenigingen van al deze simplices met  $v$ , en het 0-simplex  $v$  zelf. Het is duidelijk dat dit een simpliciaal complex is. Het punt  $v$  noemen we de *top* van de kegel.

Tenslotte nog een tweetal termen die betrekking hebben op simpliciale complexen: de *dimensie* van een complex  $K$  is het maximum van de dimensies van zijn simplices, en de *maaswijdte*  $\mu(K)$  van een complex  $K$  is het maximum van de diameters van zijn simplices.

<sup>1</sup>Hier bedoelen we een simpliciaal complex, maar het woord ‘simpliciaal’ laten we vaak weg.



Figuur 2.3: Barycentrische onderverdeling van een driehoek.

## 2.2 Barycentrische onderverdeling

Laat  $K$  een simpliciaal complex zijn. We gaan nu de simplices van  $K$  onderverdelen, zodat we een nieuw complex  $K^1$  krijgen met hetzelfde polyeder als  $K$ , maar met een kleinere maaswijdte. Dit noemen we *barycentrische onderverdeling*. Het nut van deze onderverdeling zal later blijken.

Laat  $A$  een simplex zijn van  $K$  met hoekpunten  $v_0, v_1, \dots, v_k$ . Het *barycentrum* van  $A$  is het punt

$$\hat{A} = \frac{1}{k+1}(v_0 + v_1 + \dots + v_k).$$

Dit punt noemen we ook wel het *massamiddelpunt* van  $A$ . Het punt ligt in  $A$ , want het is te schrijven als  $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$  met  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ , door  $\lambda_i = \frac{1}{k+1}$  te nemen voor alle  $i$ . We vormen nu het complex  $K^1$  als volgt: allereerst voegen we de barycentra van alle simplices van  $K$  toe aan  $K$ . Vervolgens verdelen we elk simplex van  $K$  onder in de verenigingen van de zijdes van het simplex naar het barycentrum van het simplex. Dit vormt een kegel op het simplex met als top het barycentrum van het simplex. De volgorde bij dit verdelen is in oplopende dimensie van de simplices.

Het proces van barycentrische onderverdeling kunnen we ook toepassen op  $K^1$ , dit geeft de ruimte  $K^2$ . In het algemeen kunnen we de  $m$ -de barycentrische onderverdeling van  $K$  inductief verkrijgen via  $K^m = (K^{m-1})^1$ . In figuur 2.3 zijn de eerste twee onderverdelingen van een driehoek met zijn inwendige te zien.



# Hoofdstuk 3

## Combinatorische oppervlakken

### 3.1 Triangularisatie en oriëntatie

Zoals al eerder aangegeven, zullen we de bol met  $g$  aangehechte handvatten onderzoeken. Deze ruimten  $H_g$  zijn triangulariseerbaar, zoals Rado in 1925 bewees. Dit bewijs is echter vrij technisch en geldt niet alleen voor de ruimten  $H_g$ : daarom behandelen we hier alleen een schets van het bewijs voor  $H_g$ .

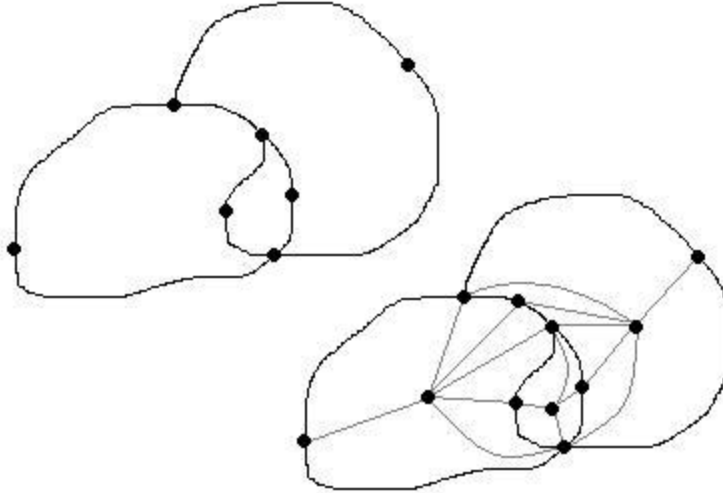
**Stelling 3.1**  $H_g$  is triangulariseerbaar.

**Bewijs (schets).** Stel dat we  $H_g$  willen triangulariseren. Omdat  $H_g$  compact is en lokaal homeomorf met het platte vlak, kunnen we een eindig aantal schijven vinden die  $H_g$  overdekken. We kiezen er hierbij voor dat geen enkele schijf in het geheel in een andere schijf ligt. Stel nu dat deze schijven elkaar snijden in een eindig aantal punten en bogen. (Dat dit kan, is de moeilijke stap van het het bewijs: dit aantal hoeft namelijk niet eindig te zijn.) Deze overdekking van schijven vormt de basis van de triangularisatie. Voeg een 0-simplex toe op alle punten waar drie of meer bogen samenkomen, en in het midden van iedere boog. De bogen zijn de 1-simplices. Door alle doorsnedes van schijven ook als schijven te zien, hebben we een overdekking van het oppervlak in een eindig aantal disjuncte schijven. Vorm in iedere schijf de kegel op de rand van de schijf met als top een inwendig punt van de schijf. Zie figuur 3.1 voor het idee hiervan. Op deze manier hebben we een triangularisatie voor het oppervlak gemaakt.  $\square$

**Definitie 3.1** Een combinatorisch oppervlak  $K$  is een simpliciaal complex dat aan de volgende eisen voldoet:

- (a) De dimensie van  $K$  is 2.
- (b) Ieder tweetal hoekpunten van  $K$  kan verbonden worden door een pad van lijnsegmenten in  $K$ .
- (c) Ieder 1-simplex ligt in precies twee 2-simplices.
- (d) Ieder hoekpunt  $v$  ligt in tenminste drie 2-simplices, die samen een kegel vormen op een simpele kring in  $K$  met top  $v$ .

De triangularisatie van  $H_g$  zoals we die zojuist geconstrueerd hebben, is een combinatorisch oppervlak. We hebben deze definitie nodig, omdat we voor het bestuderen van  $H_g$  eigen-



Figuur 3.1: Triangularisatie van een oppervlak

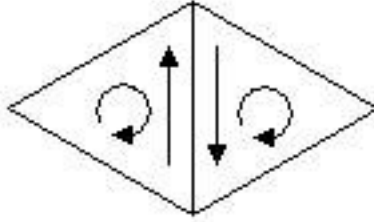
schappen nodig hebben die alleen voor combinatorische oppervlakken gelden.

Een concept dat we verder nodig zullen hebben, is dat van *oriëntatie*. We kunnen een simplex oriënteren door er als het ware een rotatierichting aan toe te kennen. Hiervoor zijn steeds twee mogelijkheden. Het idee hierachter kunnen we het beste inzien door naar lage dimensies te kijken. Bij een lijnsegment met hoekpunten  $v$  en  $w$  is de oriëntatie bepaald door één van de twee punten als beginpunt aan te wijzen, en de ander als eindpunt. We noteren dit georiënteerde simplex dan als  $(v, w)$  of als  $(w, v)$ , afhankelijk van de keuze van het beginpunt. Bij een driehoek met hoekpunten  $u, v$  en  $w$  kunnen we spreken van een oriëntatie in positieve of negatieve draairichting. Dit kunnen we noteren als  $(u, v, w)$ , waarbij de volgorde van de hoekpunten de draairichting aangeeft. Merk op dat  $(v, w, u)$  dezelfde oriëntatie is als  $(u, v, w)$ , maar dat  $(u, w, v)$  de tegengestelde oriëntatie geeft.

In het algemeen kunnen we de oriëntatie van een simplex  $A$  aangeven door de volgorde waarin we de hoekpunten opschrijven. De oriëntatie van  $A$  is invariant onder even permutaties van de hoekpunten, oftewel

$$(v_0, v_1, \dots, v_k) = \text{sign } \theta \cdot (v_{\theta(0)}, v_{\theta(1)}, \dots, v_{\theta(k)})$$

met  $\theta \in S_{k+1}$  en  $\text{sign } \theta \in \{\pm 1\}$ . We spreken af dat een 0-simplex geen oriëntatie heeft. Laat  $B$  een deelsimplex zijn van  $A$ , dan heeft  $B$  een door  $A$  geïnduceerde oriëntatie. Stel dat we  $B$  uit  $A$  verkrijgen door het hoekpunt  $v_i$  weg te laten. Dan geeft de oriëntatie van  $A$  automatisch een ordening van de hoekpunten van  $B$ , en dus een oriëntatie. Als  $i$  even is, geven we  $B$  deze oriëntatie mee, en als  $i$  oneven is, nemen we de omgekeerde oriëntatie. Dit lijkt een wat vreemde constructie, maar vergelijk het maar met wanneer we de zijdes van een driehoek de oriëntatie mee willen geven geïnduceerd door de oriëntatie van de driehoek. Wanneer we in een combinatorisch oppervlak de simplices allemaal een oriëntatie geven, dan willen we graag dat de oriëntaties *compatibel* zijn. Dit houdt in dat aanliggende driehoeken een omgekeerde oriëntatie hebben op hun gezamenlijke zijde. De oriëntaties van deze driehoeken hebben dan allebei dezelfde draairichting (zie figuur 3.2). We noemen een opper-



Figuur 3.2: Georiënteerde driehoeken

vlak *oriënteerbaar* als we alle driehoeken in de triangularisatie van het oppervlak – dit is een combinatorisch oppervlak – compatibel kunnen oriënteren.  $H_g$  is een voorbeeld van een oriënteerbaar oppervlak, terwijl de Möbiusband en de fles van Klein niet oriënteerbaar zijn.

## 3.2 Verdikking

In deze paragraaf kijken we naar combinatorische oppervlakken. Beschouw de hoekpunten en lijnsegmenten van zo'n complex. Net als in het platte vlak kunnen we deelverzamelingen hiervan bekijken, zoals een boom, een kring of een samenhangende graaf<sup>1</sup>. Deze 1-dimensionale subcomplexen kunnen we *verdikken*. Het idee hiervan is dat we de lijnen langzaam dikte geven, zodat het stroken worden. Hierover zullen we een aantal lemma's bewijzen, die we nodig zullen hebben bij chirurgie van complexen.

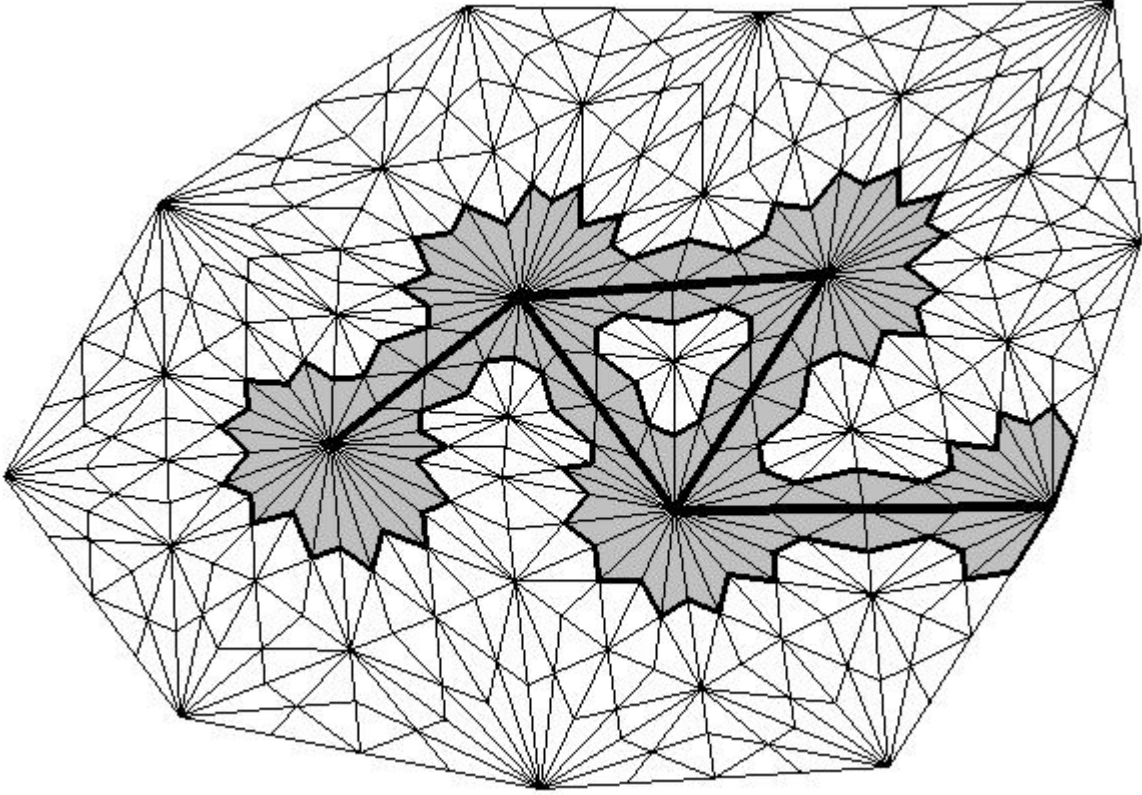
Allereerst maken we precies wat het verdikken inhoudt. Laat  $K$  een complex zijn en  $L$  een 1-dimensionaal subcomplex van  $K$ . We maken nu de tweede barycentrische onderverdeling van  $K$ . Hierin nemen we het subcomplex dat bestaat uit alle simplices die  $L$  snijden, samen met al hun zijdes. Tenslotte nemen we de polyeder van dit subcomplex. Een voorbeeld hiervan is te zien in figuur 3.3.

**Lemma 3.2** *Het verdikken van een boom geeft altijd een schijf.*

**Bewijs.** We bewijzen dit met inductie naar het aantal hoekpunten in de boom. Laat  $T$  een boom zijn in een complex  $K$ . Als  $T$  uit een enkel hoekpunt  $v$  bestaat, dan is de verdikking van  $T$  precies de vereniging van de simplices die  $v$  als een hoekpunt hebben. Dit noemen we de *gesloten ster* van  $v$  in  $K^2$ , wat we noteren als  $\overline{ster}(v, K^2)$ . Het is duidelijk dat  $\overline{ster}(v, K^2)$  een schijf is. Stel het aantal hoekpunten van  $T$  is gelijk aan  $n$ . Kies een hoekpunt  $v$  dat een 'eindpunt' is van  $T$ , dus dat maar in één lijnsegment  $E$  van  $T$  ligt. Zo'n hoekpunt bestaat altijd, want  $T$  is een boom en bevat dus geen kringen. Laat  $T_1$  de boom zijn die we krijgen door  $E$  en  $v$  uit  $T$  te verwijderen. Het verdikken van  $T_1$  geeft een schijf  $D$  vanwege de inductieveronderstelling. Om vanuit de verdikking van  $t_1$  naar de verdikking van  $T$  te komen, voegen we de gesloten sterren  $A = \overline{ster}(\hat{E}, K^2)$  en  $B = \overline{ster}(v, K^2)$  toe. We hebben al gezien dat  $A$  en  $B$  schijven zijn, en daarom is  $A \cup B \cup D$  ook een schijf.  $\square$

**Lemma 3.3** *Het verdikken van een simpele kring geeft een cylinder of een Möbiusband.*

<sup>1</sup>We bedoelen met 'graaf' altijd een samenhangende graaf.



Figuur 3.3: Verdikking van het subcomplex  $L$  in  $K$

**Bewijs.** Verwijder een lijnsegment  $E$  uit de kring: dit geeft een boom  $T$  in  $K$ . Het verdikken van deze boom geeft een schijf  $D$ , vanwege het vorige lemma. Om nu de verdikking van de kring te krijgen, nemen we de vereniging van  $\overline{\text{ster}(\widehat{E}, K^2)}$  met  $D$ . Deze twee schijven snijden elkaar langs twee disjuncte bogen. Langs één van deze bogen nemen we de vereniging, dit geeft een schijf. Wat we nu nog moeten doen is deze schijf aan zichzelf vastplakken langs twee disjuncte bogen. Dit doen we door een homeomorfisme tussen de schijf en een rechthoek te maken. Eerst definiëren we het homeomorfisme langs de twee bogen, dit worden twee tegenoverliggende zijdes van de rechthoek. Vervolgens breiden we het homeomorfisme uit langs de rest van de grens van de schijf, en tenslotte naar de hele schijf. Nu moeten we twee tegenoverliggende zijdes van de rechthoek aan elkaar vastplakken. Dit kan op precies twee manieren, en geeft een cylinder of een Möbiusband.  $\square$

### 3.3 Euler-karakteristieken

Al in de Griekse oudheid was bekend dat er een bijzondere relatie is tussen het aantal hoekpunten  $v$ , ribben  $e$  en zijvlakken  $f$  van een regelmatig veelvlak. Het blijkt namelijk dat  $v - e + f = 2$ . De uitdrukking  $v - e + f$  staat ook wel bekend als de Euler-karakteristiek. Voor willekeurige complexen kunnen we ook een Euler-karakteristiek definiëren:

**Definitie 3.2** De Euler-karakteristiek van een eindig simpliciaal complex  $K$  met dimensie  $n$  is

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i,$$

met  $\alpha_i$  het aantal  $i$ -simplices in  $K$ .

Voor complexen van dimensie 2 vinden we de formule  $v - e + f$  weer terug, en voor grafen  $v - e$ . Het zal blijken dat de Euler-karakteristiek een topologische invariant is van een triangulariseerbare ruimte  $X$ , en dat deze onafhankelijk is van de keuze van de triangularisatie. Dit zullen we in het volgende hoofdstuk bewijzen. We beschouwen eerst de Euler-karakteristiek in dimensie 1 en 2.

**Lemma 3.4**  $\chi(\Gamma) \leq 1$  voor iedere graaf  $\Gamma$ , met gelijkheid dan en slechts dan als  $\Gamma$  een boom is.

**Bewijs.** Als  $\Gamma$  een boom is, zien we door inductie naar het aantal hoekpunten in de boom dat  $\chi(\Gamma) = 1$ . Als  $\Gamma$  geen boom is, dan bevat  $\Gamma$  een lus. Als we een lijnsegment weghalen uit deze lus, neemt  $\chi(\Gamma)$  met één toe omdat het aantal hoekpunten gelijk blijft en het aantal lijnsegmenten met 1 afneemt. Door dit te herhalen, wordt  $\Gamma$  uiteindelijk een boom, en dus moet voor de oorspronkelijke graaf gelden dat  $\chi(\Gamma) < 1$ .  $\square$

Om de Euler-karakteristiek van een combinatorisch oppervlak  $K$  te berekenen, maken we gebruik van een maximale boom  $T$  in  $K$ . Deze boom bevat alle hoekpunten van  $K$ . We construeren de *duale graaf*  $\Gamma$  van  $T$  als volgt. Beschouw de eerste barycentrische onderverdeling  $K^1$  van  $K$ . De duale graaf bestaat uit alle barycentrische middelpunten van de 2-simplices van  $K$ , en tussen twee van deze punten is een lijnstuk dan en slechts dan als de 2-simplices elkaar raken in een zijde die niet in  $T$  zit. Zie figuur 3.4 voor deze constructie bij de torus. Merk op dat  $\Gamma$  geen boom hoeft te zijn. Het is niet moeilijk te bewijzen dat  $\Gamma$  wel een samenhangende graaf is.

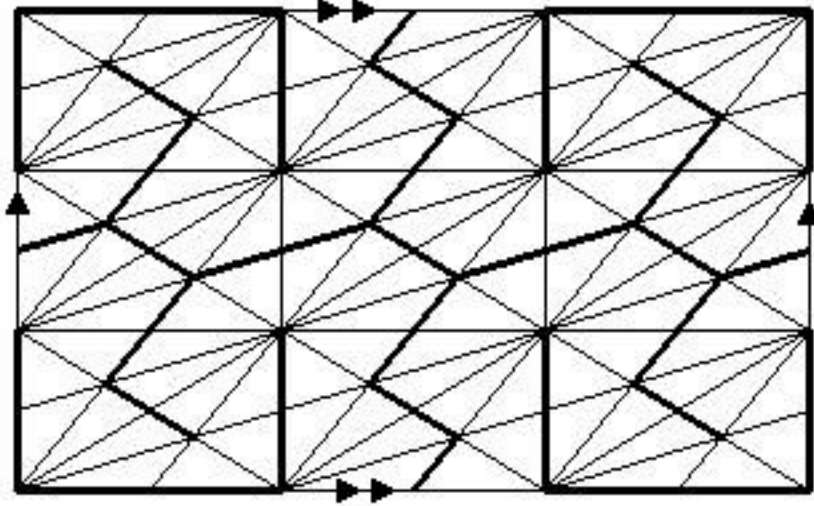
**Lemma 3.5**  $\chi(K) \leq 2$  voor ieder combinatorisch oppervlak  $K$ .

**Bewijs.** Kies een maximale boom  $T$  in  $K$  en construeer de duale graaf  $\Gamma$ . Merk op dat  $\chi(K) = \chi(T) + \chi(\Gamma)$ , omdat alle hoekpunten van  $K$  in  $T$  liggen,  $\Gamma$  een tak heeft voor elke tak van  $K$  die niet in  $T$  ligt en het aantal hoekpunten van  $\Gamma$  gelijk is aan het aantal 2-simplices van  $K$ . Met behulp van lemma 3.4 volgt nu dat  $\chi(K) \leq 2$ .  $\square$

**Stelling 3.6** De volgende eigenschappen zijn equivalent voor ieder combinatorisch oppervlak  $K$ :

- (a) Iedere simpele kring in  $|K|$  die bestaat uit takken van  $K^1$  verdeelt  $|K|$  in twee samenhangscomponenten.
- (b)  $\chi(K) = 2$ .
- (c)  $|K|$  is homeomorf met de bol.

**Bewijs.** Stel dat aan (a) voldaan is. Kies een maximale boom  $T$  in  $K$  en construeer de duale graaf  $\Gamma$ . We laten nu zien dat  $\Gamma$  ook een boom is, zodat  $\chi(K) = \chi(T) + \chi(\Gamma) = 2$ . Stel namelijk dat dit niet zo is, dan heeft  $\Gamma$  een lus, en deze verdeelt  $|K|$  vanwege de aanname



Figuur 3.4: Een maximale boom en de duale graaf in de torus

in twee samenhangscomponenten. Maar ieder simplex in het complement van deze lus moet een hoekpunt van  $T$  bevatten, en dit is in tegenspraak met de aanname dat  $T$  samenhangend is en verschillend van  $\Gamma$ . Dus  $\Gamma$  is inderdaad een boom.

Als  $\chi(K) = 2$ , dan geldt  $\chi(\Gamma) = 1$  en dus is  $\Gamma$  een boom. Laat  $N(T)$  en  $N(\Gamma)$  de verdikkingen van  $T$  en  $\Gamma$  zijn, dan zijn  $N(T)$  en  $N(\Gamma)$  schijven vanwege lemma 3.2.  $|K|$  is dus de vereniging van twee schijven langs hun grenscirkel, en dit geeft een bol.

De laatste implicatie volgt uit de Jordan-krommestelling die we kennen uit de topologie. Deze stelling zegt dat iedere simpele kring op een bol deze in twee samenhangscomponenten verdeelt. Zo hebben we een keten (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) waaruit volgt dat alle eigenschappen equivalent zijn.  $\square$

Tenslotte bespreken we nog twee lemma's over Euler-karakteristieken, die we in het volgende hoofdstuk nodig zullen hebben. Deze gelden niet alleen voor een combinatorisch oppervlak, maar voor alle simpliciale complexen.

**Lemma 3.7** *Laat  $K, L$  simpliciale complexen zijn die elkaar snijden in een gezamenlijk subcomplex. Dan is  $\chi(K \cup L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L)$ .*

**Bewijs.** Laat  $K$  een complex zijn van dimensie  $n$  en  $L$  een complex van dimensie  $m$ , en laat  $N = \max\{m, n\}$ . Dan kunnen we definiëren en afleiden:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \text{aantal } i\text{-simplices in } K & \Rightarrow \chi(K) &= \sum_{i=0}^N (-1)^i \alpha_i \\ \beta_i &= \text{aantal } i\text{-simplices in } L & \Rightarrow \chi(L) &= \sum_{i=0}^N (-1)^i \beta_i \\ \gamma_i &= \text{aantal } i\text{-simplices in } K \cap L & \Rightarrow \chi(K \cap L) &= \sum_{i=0}^N (-1)^i \gamma_i \\ \delta_i &= \text{aantal } i\text{-simplices in } K \cup L & \Rightarrow \chi(K \cup L) &= \sum_{i=0}^N (-1)^i \delta_i \end{aligned}$$

We mogen de sommaties laten doorlopen tot  $N$ , want alle extra termen die er bijkomen zijn toch 0. Merk op dat  $\delta_i = \alpha_i + \beta_i - \gamma_i$ , zodat

$$\chi(K \cup L) = \sum_{i=0}^N (-1)^i \delta_i$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^N (-1)^i \alpha_i + \sum_{i=0}^N (-1)^i \beta_i - \sum_{i=0}^N (-1)^i \gamma_i \\
&= \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L).
\end{aligned}$$

□

**Lemma 3.8** *De Euler-karakteristiek van een simpliciaal complex blijft gelijk bij barycentrische onderverdeling.*

**Bewijs.** We gaan eerst laten zien dat de Euler-karakteristiek van een simplex en van een kegel gelijk is aan 1. Een  $(q-1)$ -simplex  $A$  heeft  $\binom{q}{i+1}$  deelsimplices van dimensie  $i$ , want tussen ieder tweetal hoekpunten loopt een lijnsegment, tussen ieder drietal lijnsegmenten ligt een driehoek, tussen ieder viertal driehoeken ligt een tetraeder, etcetera. Zo vinden we dat

$$\begin{aligned}
\chi(A) &= \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i \binom{q}{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{q-2} (-1)^i \left[ \binom{q-1}{i} + \binom{q-1}{i+1} \right] + (-1)^{q-1} \binom{q}{q} \\
&= 1 \pm 1 \mp 1 = 1
\end{aligned}$$

waarbij de tekens in de laatste som afhangen van de pariteit van  $q$ .

Stel we maken een kegel met top  $v$  op een complex  $L$  van dimensie  $n$ . Laat  $\alpha_q$  het aantal  $q$ -simplices van  $L$  en  $\beta_q$  het aantal  $q$ -simplices in  $CL$ . Dan is  $\beta_q = \alpha_q + \alpha_{q-1}$  voor  $q > 0$ , waarbij de laatste term gelijk is aan het aantal verenigingen van  $v$  naar een  $(q-1)$ -simplex van  $L$ . Verder is  $\beta_0 = \alpha_0 + 1$ . De Euler-karakteristiek van een kegel is dus

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \beta_i &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (\alpha_i + \alpha_{i-1}) + \beta_0 \\
&= (-1)^{n+1} \alpha_{n+1} + 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Nu bewijzen we het lemma met inductie naar het aantal simplices van  $K$ . We gaan het complex  $K$  als volgt opbouwen. We voegen een simplex  $A$  pas toe als alle zijdes van  $A$  al in  $K$  bevat zijn. De vereniging van al deze zijdes noemen we  $B$ : dit is dus het simplex  $A$  zonder het inwendige. Omdat  $B$  een subcomplex van  $K$  is, geldt  $\chi(B) = \chi(B^1)$  vanwege de inductieveronderstelling. Merk op dat  $(K \cup A)^1 = K^1 \cup C(A^1)$ , met  $C(A^1)$  de kegel op  $A^1$  met top  $\hat{A}$ . Er geldt nu het volgende voor de Euler-karakteristiek:

$$\begin{aligned}
\chi((K \cup A)^1) &= \chi(K^1) + \chi(C(A^1)) - \chi(B^1) \\
&= \chi(K) + 1 - \chi(B) \\
&= \chi(K) + \chi(A) - \chi(B) \\
&= \chi(K \cup A)
\end{aligned}$$

□

## 3.4 Chirurgie

We weten dat  $H_g$  een bol is met  $g$  handvatten aangehecht. Maar hoe gaat dat aanhechten precies in zijn werk? Om deze vraag te beantwoorden, werken we de andere kant op: we snijden de handvatten één voor één open, totdat we een bol hebben. Het idee is om een simpele kring die  $H_g$  niet in twee samenhangscomponenten verdeelt te verdikken, en deze cylinder of Möbiusband weg te halen. Hierdoor ontstaan gaten, die we opvullen met een schijf. Erg toepasselijk heet deze methode *chirurgie*.

Laat  $K$  een combinatorisch oppervlak zijn, en  $L$  een simpele kring in  $K$  die  $K$  niet in twee samenhangscomponenten verdeelt. Neem de tweede barycentrische onderverdeling van  $K$  en verdik  $L$ . Noem deze verdikking  $N$ . Volgens lemma 3.3 is  $|N|$  een Möbiusband of een cylinder. Omdat  $H_g$  oriënteerbaar is, zal  $|N|$  altijd een cylinder zijn. Laat  $M$  het subcomplex zijn in  $K^2$  dat het complement is van  $N$ :  $M$  bestaat uit alle simplices die  $L$  niet snijden, samen met al hun zijdes.  $|M|$  is compact met als grens twee cirkels, en we noemen de subcomplexen van  $K$  die deze cirkels triangulariseren  $L_1$  en  $L_2$ . Nu maken we het nieuwe combinatorische oppervlak  $K_* = M \cup CL_1 \cup CL_2$  waarbij de toppunten van de kegels punten zijn in het midden van de cirkels die in algemene positie zijn met de rest van de hoekpunten van  $L_1$  en  $L_2$ . We zeggen dat  $K_*$  verkregen is uit  $K$  door *chirurgie langs  $L$* .

**Lemma 3.9**  $\chi(N) = 0$ .

**Bewijs.** We kijken nog eens goed naar het bewijs van lemma 3.3 en figuur 3.3.  $N$  bestaat uit de vereniging van gesloten sterren  $\overline{ster}(v, K^2)$  met  $v \in L^1$ . Deze gesloten ster heeft duidelijk Euler-karakteristiek 1. Als twee gesloten sterren elkaar snijden, dan doen ze dat in drie hoekpunten en twee takken, dus de Euler-karakteristiek van hun vereniging is  $1 + 1 - (3 - 2) = 1$  volgens lemma 3.7. Op deze manier kunnen we  $N$  maken door langs  $L^1$  te lopen en steeds meer gesloten sterren toe te voegen, en de Euler-karakteristiek blijft 1. Dit gaat goed totdat we de laatste gesloten ster toevoegen: deze snijdt de vereniging van de andere gesloten sterren in zes hoekpunten en vier takken. Daarom is  $\chi(N) = 1 + 1 - (6 - 4) = 0$ . Merk op dat het niet uitmaakt of  $|N|$  een cylinder of een Möbiusband is.  $\square$

**Stelling 3.10**  $\chi(K_*) = \chi(K) + 2$  als  $K$  een triangularisatie van  $H_g$  is.

**Bewijs.** Merk op dat  $\chi(L_1) = \chi(L_2) = \chi(M \cap N) = 0$  omdat deze complexen een simpele kring zijn. Verder is eenvoudig in te zien dat  $\chi(CL_1) = \chi(CL_2) = 1$ . We hebben nu

$$\begin{aligned}\chi(K_*) &= \chi(M) + \chi(CL_1) + \chi(CL_2) - \chi(L_1) - \chi(L_2) \\ &= \chi(M) + 2.\end{aligned}$$

Ook weten we dat

$$\chi(K) = \chi(K^2) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(M \cap N) = \chi(M).$$

Hiermee hebben we de stelling bewezen.  $\square$

Op deze manier kunnen we laten zien dat iedere triangularisatie van  $H_g$  in een eindig aantal stappen omgevormd kan worden tot een complex homeomorf met de bol. Immers, elke keer



dat we chirurgie toepassen, vermeerderd de Euler-karakteristiek met 2, en zo komen we vanzelf uit op de bol met Euler-karakteristiek 2. Deze argumentatie vraagt nog wel wat technische verfijningen: zo willen we bijvoorbeeld geen chirurgie gaan toepassen op een kromme die door een toegevoegde schijf  $CL_1$  loopt. De bewijzen van deze technische verfijningen zullen we achterwege laten, aangezien ze – zoals de aanduiding al doet vermoeden – vooral technisch zijn en weinig met het begrip van chirurgie te maken hebben.

### 3.5 De Euler-karakteristiek van $H_g$

We weten nu voldoende theorie om de Euler-karakteristiek van  $H_g$  te berekenen. Maar voor het berekenen van de Euler-karakteristiek gebruiken we een triangularisatie van  $H_g$ , en deze triangularisatie is niet uniek. In het volgende hoofdstuk zullen we laten zien dat de Euler-karakteristiek niet afhangt van de gekozen triangularisatie, maar voor de ruimten  $H_g$  kunnen we het nu al bewijzen:

**Stelling 3.11** *De Euler-karakteristiek van  $H_g$  hangt niet af van de gekozen triangularisatie  $K$ .*

**Bewijs.** Laat  $K$  een georiënteerde triangularisatie van  $H_g$  zijn. Door chirurgie toe te passen vormen we een complex  $K_*$  met  $\chi(K_*) = \chi(K) + 2$ , zoals we zagen in het bewijs van stelling 3.10. We kunnen chirurgie net zo lang blijven toepassen totdat het complex homeomorf is met de bol, want dan verdeelt iedere simpele kring de bol in twee samenhangscomponenten. Omdat  $\chi(K) \leq 2$ , kan dit in een eindig aantal stappen. Uit stelling 3.6 weten we dat voor het complex dat overblijft de Euler-karakteristiek gelijk is aan 2, want dat geldt voor alle complexen die homeomorf zijn met de bol. Met terugwerkende kracht kunnen we nu de Euler-karakteristiek van  $K$  berekenen, namelijk door voor elke omgekeerde chirurgie-stap de Euler-karakteristiek met 2 te verminderen. Hierbij speelt de triangularisatie geen rol: chirurgie op  $H_g$  vermeerderd de Euler-karakteristiek altijd met 2, ongeacht de simpele kring waarlangs we chirurgie verrichten.  $\square$

**Gevolg 3.12**  $\chi(H_g) = 2 - 2g$ .

# Hoofdstuk 4

## Simpliciale homologie

In dit hoofdstuk gaan we aan iedere triangulariseerbare ruimte een rij van *homologiegroepen* toevoegen. Grofweg is zo'n groep te vergelijken met een fundamentealgroep, maar dan hebben de lussen niet alleen dimensie 1. Op deze manier kunnen we beter onderscheid maken tussen topologische ruimten. Als we kijken naar  $S^3$  en  $S^4$ , dan hebben deze allebei dezelfde fundamentealgroep, maar hun homologiegroepen zijn voor hogere dimensies niet hetzelfde.

### 4.1 Homologie groepen

Bekijk een simpliciaal complex  $K$ . We weten dat er voor ieder simplex van  $K$  precies twee manieren zijn om het te oriënteren, met uitzondering van de 0-simplices. Een simplex in combinatie met een oriëntatie noemen we een *georiënteerd simplex* en geven we aan met  $\sigma$  of  $\tau$ .  $-\sigma$  betekent hetzelfde simplex als  $\sigma$ , maar dan met de andere oriëntatie.

We definiëren de *q-de ketengroep*  $C_q(K)$  als de groep voortgebracht door de  $q$ -simplices van  $K$ . Dit is een vrije abelse groep met als rang het aantal  $q$ -simplices in  $K$ . Een element van  $C_q(K)$  noemen we een *q-dimensionale keten*, en is een lineaire combinatie  $\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \dots + \lambda_s\sigma_s$  met  $\lambda_i$  een geheel getal en  $\sigma_i$  een georiënteerd  $q$ -simplex in  $K$ . Merk op dat deze representatie niet uniek is: we hadden immers in plaats van  $\sigma_i$  het georiënteerde  $q$ -simplex  $\tau_i = -\sigma_i$  kunnen nemen, en  $-\lambda_i$  in plaats van  $\lambda_i$ .

Op deze ketengroepen kunnen we homomorfismen definiëren. Dit doen we als volgt: eerst stellen we waarop een willekeurig georiënteerd simplex van  $C_q(K)$  wordt afgebeeld, vervolgens controleren we of de relatie  $\sigma + (-\sigma) = 0$  behouden blijft, en tenslotte breiden we het homomorfisme lineair uit naar de andere elementen van  $C_q(K)$ . Het belangrijkste voorbeeld is het *grenshomomorfisme*. De grens van een georiënteerd simplex  $\sigma$  is de  $(q-1)$ -keten die bestaat uit alle zijdes van  $\sigma$  met de door  $\sigma$  geïnduceerde oriëntatie. Preciezer kunnen we zeggen dat

$$\partial(v_0, \dots, v_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q)$$

waarbij  $(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q)$  staat voor het  $(q-1)$ -simplex verkregen door het hoekpunt  $v_i$  uit  $\sigma$  weg te laten. Door de oriëntatie op  $\sigma$  te veranderen, veranderen we ook de oriëntatie op de zijdes van  $\sigma$ . Hierdoor vinden we dat  $\partial\sigma + \partial(-\sigma) = 0$ , dus  $\partial$  geeft inderdaad een homomorfisme  $\partial : C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$ . In het speciale geval  $q = 0$  stellen we dat de grens

van een enkel hoekpunt gelijk is aan nul en dus  $C_{-1}(K) = 0$ .

De kern van dit homomorfisme bestaat precies uit de  $q$ -ketens die geen grens hebben: dit noemen we de  $q$ -cykels van  $K$ , en het is duidelijk dat ze een groep vormen. We noteren deze groep met  $Z_q(K)$ .

**Lemma 4.1** *De samenstelling  $C_{q+1}(K) \xrightarrow{\partial} C_q(K) \xrightarrow{\partial} C_{q-1}(K)$  is het nulhomomorfisme.*

**Bewijs.** Het enige dat we hoeven na te gaan is dat  $\partial^2 = \partial \circ \partial$  nul oplevert als we het toepassen op een willekeurig georiënteerd  $(q+1)$ -simplex.

$$\begin{aligned} \partial^2(v_0, \dots, v_{q+1}) &= \partial \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{q+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \sum_{j=i+1}^{q+1} (-1)^{j-1} (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{q+1}) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{q+1}) \end{aligned}$$

Alle termen in deze uitdrukking vallen paarsgewijs tegen elkaar weg, aangezien ieder georiënteerd  $(q-1)$ -simplex  $(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{q+1})$  tweemaal voorkomt: de eerste keer met teken  $(-1)^{i+j-1}$  en de tweede keer met teken  $(-1)^{i+j}$ .  $\square$

Als we  $B_q(K)$  definiëren als het beeld van  $\partial : C_{q+1}(K) \rightarrow C_q(K)$ , dan volgt uit het bovenstaande lemma dat  $B_q(K)$  een ondergroep is van  $Z_q(K)$ . We noemen  $B_q(K)$  de groep van *begrenzende  $q$ -cykels*.

We kunnen nu de  $q$ -de *homologiegroep* definiëren:

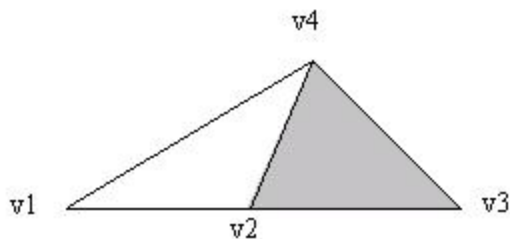
$$H_q(K) = Z_q(K) / B_q(K).$$

De klasse van een  $q$ -cykel  $z$  in  $H_q(K)$  noteren we met  $[z]$  en noemen we de *homologie-klasse* van  $z$ . Twee  $q$ -cykels die een begrenzende cykel van elkaar verschillen, zitten in dezelfde homologie-klasse en noemen we *homoloog*. Een homologie groep is een eindig voortgebrachte abelse groep, en kunnen we daarom schrijven als  $T \oplus \mathbb{Z}^r$  met  $T$  de torsie-ondergroep van  $H_q(K)$ . We noemen  $r$  ook wel het  $q$ -de *Betti-getal* van  $H_q(K)$ , en noteren dit met  $\beta_q$ .

## 4.2 Voorbeelden

In deze paragraaf zullen we enkele voorbeelden bespreken van het berekenen van homologiegroepen. De methode hiervan is niet heel vergaand, maar draagt wel bij aan het begrip.

**Voorbeeld 1.** Laat  $K$  het complex zijn dat we zien in figuur 4.1. De hoekpunten  $v_1, v_2, v_3, v_4$  brengen  $Z_0(K) = C_0(K)$  voort, en we kunnen  $C_1(K)$  zien als de vrije abelse groep voortgebracht door de georiënteerde 1-simplices  $(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)$ . Dus  $B_0(K)$  is voortgebracht door  $v_2 - v_1, v_4 - v_1, v_3 - v_2, v_4 - v_2, v_4 - v_3$  en hieruit zien we dat  $v_1, v_2, v_3, v_4$



Figuur 4.1: Het simpliciale complex uit voorbeeld 1

allemaal dezelfde homologie-klasse hebben. Daarom is  $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K)$  een oneindige cyclische groep voortgebracht door  $[v_1]$ .

Het is niet moeilijk in te zien dat de groep  $Z_1(K)$  is voortgebracht door de 1-cykels die een simpele kring in  $K$  beschrijven. Hiervan zijn er zes, namelijk

$$\begin{aligned} z_1 &= (v_1, v_2) + (v_2, v_4) + (v_4, v_1), \\ z_2 &= (v_2, v_3) + (v_3, v_4) + (v_4, v_2), \\ z_3 &= (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_4) + (v_4, v_1), \end{aligned}$$

en de cykels  $-z_1, -z_2, -z_3$ . Omdat  $z_3 = z_1 + z_2$  zien we dat  $Z_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  met voortbrengers  $z_1$  en  $z_2$ .  $K$  heeft maar één 2-simplex, dus  $C_2(K)$  is een oneindig cyclische groep voortgebracht door  $(v_2, v_3, v_4)$ . Dit betekent dat  $B_1(K) = \partial C_2(K)$  is voortgebracht door  $\partial(v_2, v_3, v_4) = z_2$ . Dus de eerste homologiegroep  $H_1(K)$  is isomorf met  $\mathbb{Z}$  en is voortgebracht door  $[z_1]$ .

Tenslotte zien we dat er geen 2-cykels zijn, en dat er geen simplices van dimensie groter dan twee zijn, dus  $H_q(K) = 0$  voor  $q \geq 2$ .

**Voorbeeld 2.** Wanneer twee hoekpunten in dezelfde samenhangscomponent van  $|K|$  liggen, dan zijn ze homoloog. Immers, we kunnen  $v$  en  $w$  verbinden door een pad van takken  $vv_1v_2 \dots v_kv$  waarin geen twee hoekpunten gelijk zijn.  $w - v$  is dan de grens van de 1-keten  $(v, v_1) + (v_1, v_2) + \dots + (v_k, w)$ . Op gelijke wijze vinden we dat twee hoekpunten die niet in dezelfde samenhangscomponent van  $|K|$  liggen, niet homoloog zijn. Ook is het niet moeilijk in te zien dat een veelvoud van een enkel hoekpunt nooit een grens kan zijn. Op die manier hebben we het volgende aangetoond:

**Lemma 4.2**  $H_0(K)$  is een vrije abelse groep met als rang het aantal samenhangscomponenten van  $|K|$ .

**Voorbeeld 3.** Stel we hebben een complex  $K$  dat een kegel is met top  $v$ . Dan kunnen we  $K$  ook schrijven als  $CL$ , waarbij  $v$  het enige hoekpunt van  $K$  is dat niet in het subcomplex  $L$  ligt. Een kegel is altijd samenhangend, dus  $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$  vanwege het vorige lemma. We kijken nu naar  $q > 0$  en maken een homomorfisme  $d : C_q(K) \rightarrow C_{q+1}(K)$  als volgt. Als  $\sigma = (v_0, \dots, v_q)$  een georiënteerd  $q$ -simplex is dat in  $L$  ligt, stellen we  $d(\sigma) = (v, v_0, \dots, v_q)$ ; anders stellen we  $d(\sigma) = 0$ . We zien dat  $d(\sigma) + d(-\sigma) = 0$  in  $C_{q+1}(K)$ , dus  $d$  geeft een

homomorfisme van  $C_q(K)$  naar  $C_{q+1}(K)$ . We gaan nu aantonen dat  $\partial d(\sigma) = \sigma - d\partial(\sigma)$ . Stel eerst dat  $\sigma$  in  $L$  ligt. Dan is

$$\begin{aligned}\partial d(\sigma) &= \partial(v, v_0, \dots, v_q) \\ &= (v_0, \dots, v_q) + \sum_{i=0}^q (-1)^{i+1} (v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q) \\ &= \sigma - d\partial(\sigma).\end{aligned}$$

Stel nu dat  $\sigma$  niet in  $L$  ligt, dan is  $d(\sigma) = 0$  en dus ook  $\partial d(\sigma) = 0$ . We moeten dus laten zien dat  $d\partial(\sigma) = \sigma$ .

$$\begin{aligned}d\partial(\sigma) &= d \sum_{i=0}^q (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i d(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q)\end{aligned}$$

Slechts één van de termen uit deze som is niet 0, en dat is precies de term waaruit  $v$  is weggelaten, dus  $v = v_i$ . Deze term is positief, want als  $i$  (on)even is, dan is de permutatie die 0 en  $i$  verwisselt (on)even, en dit compenseert met de factor  $(-1)^i$ . Als  $z$  nu een  $q$ -cykel van  $K$  is, hebben we  $\partial d(z) = z - d\partial(z) = z$ . Dit toont aan dat iedere  $q$ -cykel een begrenzende cykel is, en dus is  $H_q(K) = 0$  voor  $q > 0$ .

### 4.3 Simpliciale benadering

Om te laten zien dat de homologiegroepen op isomorfie na niet afhangen van de gekozen triangularisatie, moeten we wat meer weten over afbeeldingen tussen triangularisaties. We beginnen met een makkelijke afbeelding om mee te werken:

**Definitie 4.1** *Laat  $K$  en  $L$  simpliciale complexen zijn. Een afbeelding  $s : |K| \rightarrow |L|$  noemen we simpliciaal als het de simplices van  $K$  lineair en surjectief afbeeldt op simplices van  $L$ .*

Het is dus voldoende om van een simpliciale afbeelding te weten waar het de hoekpunten van een simplex op afbeeldt. Immers, een simplex  $A$  met hoekpunten  $v_0, v_1, \dots, v_k$  bestaat uit alle punten  $x$  die we kunnen schrijven als  $x = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$  met  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$  en  $\lambda_i \geq 0$ .  $s(A)$  heeft dan hoekpunten  $s(v_0), s(v_1), \dots, s(v_k)$ , en  $s(x) = \lambda_0 s(v_0) + \lambda_1 s(v_1) + \dots + \lambda_k s(v_k)$  voor  $x \in A$ . Merk op dat een simpliciale afbeelding continu is vanwege het plak-lemma.

Lang niet alle afbeeldingen tussen complexen zijn simpliciaal, maar wel kunnen we iedere continue afbeelding tussen twee complexen benaderen met een simpliciale afbeelding. Laat  $f : |K| \rightarrow |L|$ . Neem een punt  $x \in |K|$ , dan ligt het punt  $f(x)$  in het inwendige van een uniek simplex van  $L$ . Dit simplex noemen we de *drager* van  $f(x)$ .

**Definitie 4.2** *Een simpliciale afbeelding  $s : |K| \rightarrow |L|$  is een simpliciale benadering van de continue afbeelding  $f : |K| \rightarrow |L|$  als  $s(x)$  in de drager van  $f(x)$  ligt voor alle  $x \in |K|$ .*

Een belangrijke eigenschap van  $s$  is dat  $f$  en  $s$  homotoop zijn. Dit volgt rechtstreeks uit de definitie. Stel namelijk dat  $L$  in  $\mathbb{E}^n$  ligt, en laat  $F : |K| \times I \rightarrow \mathbb{E}^n$  de rechte-lijn homotopie zijn, gegeven door  $F(x, t) = (1-t)s(x) + tf(x)$ . Bij een gegeven  $x \in |K|$  weten we dat er een simplex is in  $L$  dat  $s(x)$  en  $f(x)$  bevat, en daarom ook alle punten  $(1-t)s(x) + tf(x)$  met  $0 \leq t \leq 1$  (want een simplex is convex). Dus het beeld van  $F$  ligt in  $|L|$ , en daarom geeft  $F$  een homotopie van  $s$  naar  $f$ .

Een simpliciale benadering hoeft niet altijd te bestaan, bijvoorbeeld als  $L$  meer hoekpunten heeft dan  $K$ . Maar er bestaat wel altijd een simpliciale benadering als we  $K$  vervangen door een barycentrische onderverdeling  $K^m$ . Aangezien  $|K| = |K^m|$ , is dit geen strenge eis.

**Stelling 4.3 (Simpliciale benaderingstelling)** *Laat  $f : |K| \rightarrow |L|$  een continue afbeelding zijn tussen polyeders. Als we  $m$  groot genoeg kiezen, dan bestaat er een simpliciale benadering  $s : |K^m| \rightarrow |L|$  van  $f : |K^m| \rightarrow |L|$ .*

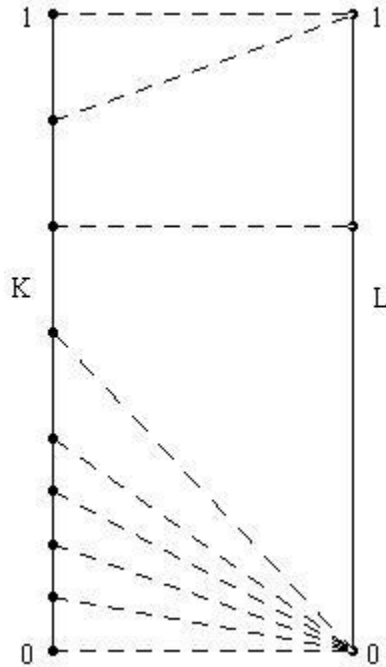
Voordat we deze stelling bewijzen, zullen we eerst een voorbeeld geven en een lemma bewijzen dat we nodig zullen hebben.

**Voorbeeld.** Laat  $K$  bestaan uit het interval  $[0, 1]$  plus een extra punt bij  $\frac{1}{3}$ , en  $L$  ook uit het interval  $[0, 1]$  maar dan met een extra punt bij  $\frac{2}{3}$ . Stel de gegeven continue afbeelding is  $f(x) = x^2$ . Dan bestaat er geen simpliciale benadering voor  $f : |K| \rightarrow |L|$ , wat we als volgt in kunnen zien. De dragers van  $f(0) = 0$  en  $f(1) = 1$  zijn de punten 0 en 1, dus  $s(0) = 0$  en  $s(1) = 1$ . Het derde hoekpunt moet ook op een hoekpunt afgebeeld worden, dus  $s(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ . Automatisch hebben we nu dat  $[0, \frac{1}{3}]$  lineair wordt afgebeeld op  $[0, \frac{2}{3}]$  en  $[\frac{1}{3}, 1]$  lineair op  $[\frac{2}{3}, 1]$ . We hebben nu een tegenspraak, want  $s(\frac{1}{2})$  is niet bevat in de drager  $[0, \frac{2}{3}]$  van  $f(\frac{1}{2})$ . Eenzelfde redenering laat zien dat er geen simpliciale benadering van  $f : |K^1| \rightarrow |L|$  bestaat. Het probleem is, dat  $K^1$  behalve het punt 1 geen hoekpunt bevat dat door  $f$  in het interval  $[\frac{2}{3}, 1]$  wordt afgebeeld.  $K^2$  blijkt dat wel te hebben, en hier vinden we dan ook de simpliciale benadering uit figuur 4.2. Merk op dat deze benadering niet uniek is: we hadden bijvoorbeeld ook het interval  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$  af kunnen beelden op  $[0, \frac{2}{3}]$ , en de overige intervallen op de hoekpunten  $\frac{2}{3}$  en 0.

**Lemma 4.4** *Hoekpunten  $v_0, v_1, \dots, v_k$  van een simpliciaal complex  $K$  zijn de hoekpunten van een simplex van  $K$  dan en slechts dan als de doorsneden van hun open sterren niet leeg is.*

**Bewijs.** Als  $v_0, v_1, \dots, v_k$  de hoekpunten zijn van een simplex  $A$  in  $K$ , dan ligt het hele inwendige van  $A$  in  $ster(v_i, K)$  voor  $0 \leq i \leq k$ . Stel nu dat  $x \in \bigcap_0^k ster(v_i, K)$  en laat  $A$  de drager zijn van  $x$ . Vanwege de definitie van een open ster is iedere  $v_i$  een hoekpunt van  $A$ , en daarom zijn  $v_0, v_1, \dots, v_k$  de hoekpunten van een zijde van  $A$ .  $\square$

**Bewijs van stelling 4.3.** Als eerste behandelen we het speciale geval waarbij het niet nodig is een barycentrische verdeling van  $K$  te nemen. Stel dat voor ieder hoekpunt  $u$  van  $K$  we een hoekpunt  $v$  van  $L$  kunnen vinden zodat  $f(ster(u, K)) \subseteq ster(v, L)$ . Definieer een afbeelding  $s$  van de hoekpunten van  $K$  naar de hoekpunten van  $L$  door bij elke  $u$  een  $v$  te vinden die aan de inclusie voldoet en  $s(u) = v$  te nemen. Dan vertellen lemma 4.4 en de aangenomen inclusie ons dat als  $u_0, u_1, \dots, u_k$  de hoekpunten zijn van een simplex in  $K$ , hun beelden



Figuur 4.2: Simpliciale benadering van  $f$  op  $|K^2|$

$s(u_0), s(u_1), \dots, s(u_k)$  de hoekpunten zijn van een simplex in  $L$ . Daarom kunnen we  $s$  lineair uitbreiden naar een simpliciale afbeelding  $s : |K| \rightarrow |L|$ . We laten zien dat  $s$  een simpliciale benadering is voor  $f$ . Laat  $x$  een punt zijn in  $|K|$  en  $u_0, u_1, \dots, u_k$  de hoekpunten van zijn drager. Dan is  $x \in \bigcap_0^k \text{ster}(u_i, K)$  en vanwege de aanname  $f(x) \in \bigcap_0^k \text{ster}(s(u_i), L)$ . Dit betekent dat de drager van  $f(x)$  in  $L$  het simplex met hoekpunten  $s(u_0), s(u_1), \dots, s(u_k)$  als een zijde heeft, en daarom bevat de drager van  $f(x)$  het punt  $s(x)$ .

Om dit bewijs te generaliseren, gaan we laten zien dat aan de inclusie  $f(\text{ster}(u, K)) \subseteq \text{ster}(v, L)$  altijd voldaan kan worden door over te gaan op de barycentrische onderverdeling  $K^m$  voor  $m$  voldoende groot. Merk op dat de open sterren van de hoekpunten van  $L$  een open overdekking van  $|L|$  vormen. Omdat  $f : |K| \rightarrow |L|$  continu is, geven de inverse beelden onder  $f$  van deze sterren een open overdekking van  $|K|$ . Laat  $\delta$  het Lebesgue-getal zijn van deze overdekking<sup>1</sup> en kies  $m$  groot genoeg zodat  $\mu(K^m) < \delta/2$ . Voor een willekeurig hoekpunt  $u$  van  $K$  is de diameter van zijn open ster in  $K^m$  minder dan  $\delta$ , dus  $\text{ster}(u, K^m) \subseteq f^{-1}(\text{ster}(v, L))$  voor een zeker hoekpunt  $v$  in  $L$ .  $\square$

## 4.4 Geïnduceerde afbeeldingen

Laat  $s : |K| \rightarrow |L|$  een simpliciale afbeelding zijn. Vaak is  $s$  een benadering van een continue afbeelding, zoals in de vorige paragraaf. We zullen  $s$  gebruiken om een homomorfisme  $s_q : C_q(K) \rightarrow C_q(L)$  te construeren voor elke  $q$ , dat vervolgens een homomorfisme  $s_{q*} : H_q(K) \rightarrow$

<sup>1</sup>We gebruiken hier het lemma van Lebesgue: Laat  $X$  een compacte metrische ruimte zijn en  $\mathcal{F}$  een open overdekking van  $X$ . Dan bestaat er een reëel getal  $\delta > 0$  zodat elke deelverzameling van  $X$  met diameter kleiner dan  $\delta$  bevat is in een element van  $\mathcal{F}$ .

$H_q(L)$  voor alle  $q$  induceert.

Een simpliciale afbeelding beeldt simplices af op simplices. Hierbij kan de dimensie lager worden. Stel  $\sigma = (v_0, \dots, v_q)$  is een georiënteerd simplex van  $K$ , dan is  $s(\sigma)$  het georiënteerde simplex  $(s(v_0), \dots, s(v_q))$  in  $L$ . Als alle hoekpunten  $s(v_0), \dots, s(v_q)$  verschillend zijn, stellen we  $s_q(\sigma) = s(\sigma)$ , anders  $s_q(\sigma) = 0$ . Het is duidelijk dat  $s_q(\sigma) + s_q(-\sigma) = 0$ , dus  $s_q$  is inderdaad een homomorfisme.

Om vervolgens te laten zien dat  $s_q$  een homomorfisme  $s_{q*}$  tussen homologiegroepen induceert, moeten we laten zien dat  $s_q$  cyclen in  $K$  afbeeldt op cyclen in  $L$ , en begrenzende cyclen in  $K$  op begrenzende cyclen in  $L$ . Hiervoor gebruiken we het volgende lemma:

**Lemma 4.5**  $\partial s_q = s_{q-1} \partial : C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(L)$ , oftewel het volgende diagram commuteert:

$$\begin{array}{ccc} C_q(K) & \xrightarrow{s_q} & C_q(L) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ C_{q-1}(K) & \xrightarrow{s_{q-1}} & C_{q-1}(L) \end{array}$$

**Bewijs.** We laten zien dat  $\partial s_q(\sigma) = s_{q-1} \partial(\sigma)$  voor een willekeurig georiënteerd  $q$ -simplex  $\sigma = (v_0, \dots, v_q)$  van  $K$ . Dit is duidelijk als de hoekpunten  $s(v_0), \dots, s(v_q)$  verschillend zijn. Stel daarom dat dit niet zo is, en dat  $s(v_j) = s(v_k)$  voor  $j < k$ . Dan is  $s_q(\sigma) = 0$  en dus ook  $\partial s_q(\sigma) = 0$ . Nu is

$$s_{q-1} \partial(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i s_{q-1}(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q).$$

Als  $i$  niet gelijk is aan  $j$  of  $k$ , dan is  $s_{q-1}(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q) = 0$  dus deze termen vallen weg. De twee termen die overblijven, zijn  $(-1)^j s_{q-1}(v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_q)$  en  $s_{q-1}(v_0, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_q)$ . Deze termen zijn alleen verschillend van nul als  $v_j$  en  $v_k$  de enige hoekpunten van  $\sigma$  zijn die op hetzelfde punt worden afgebeeld door  $s$ , en in dat geval vallen de twee termen tegen elkaar weg vanwege

$$\begin{aligned} (-1)^j s_{q-1}(v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_q) &= (s(v_0), \dots, \widehat{s(v_j)}, \dots, s(v_q)) \\ &= (-1)^{k-j-1} (s(v_0), \dots, \widehat{s(v_k)}, \dots, s(v_q)) \\ &= (-1)^{k-j-1} s_{q-1}(v_0, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_q). \end{aligned}$$

□

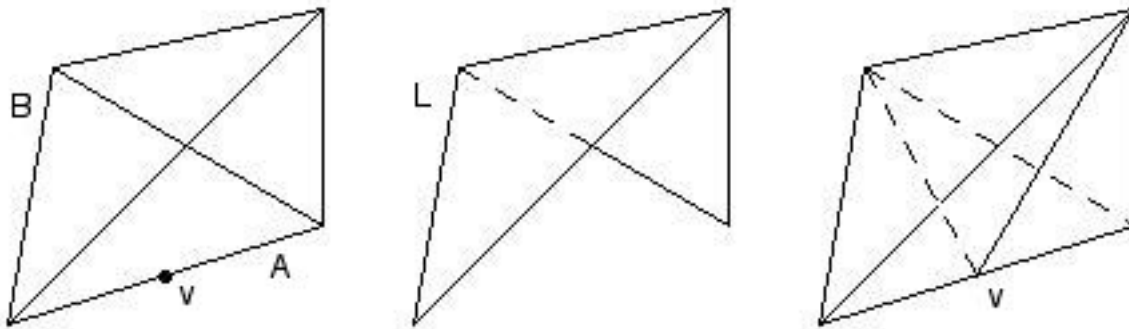
Stel nu dat  $z$  een  $q$ -cykel is van  $K$ , zodat  $\partial(z) = 0$ . Dan is  $\partial s_q(z) = s_{q-1} \partial(z) = 0$ , en daarom is  $s_q(z)$  een  $q$ -cykel van  $L$ .  $s$  beeldt dus cyclen in  $K$  af op cyclen in  $L$ . Stel nu dat  $b \in B_q(K)$ , dan is  $b = \partial c$  voor een zekere  $c \in C_{q+1}(K)$ . Dan is  $\partial s_{q+1}(c) = s_q \partial(c) = s_q(b)$  en dus  $s_q(b) \in B_q(L)$ .  $s$  beeldt dus begrenzende cyclen in  $K$  af op begrenzende cyclen in  $L$ . Hiermee hebben we het volgende bewezen:

**Stelling 4.6** Iedere simpliciale afbeelding  $s : |K| \rightarrow |L|$  induceert een homomorfisme  $s_{q*} : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$  tussen homologiegroepen.

De collectie van groepen en homomorfismen

$$\dots \xrightarrow{\partial} C_q(K) \xrightarrow{\partial} C_{q-1}(K) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0(K) \xrightarrow{\partial} 0$$





Figuur 4.3: simplex  $B$  — subcomplex  $L$  — kegel op  $L$  met top  $v$

noemen we het *ketencomplex* van  $K$  en dit schrijven we als  $C(K)$ . Wanneer we een willekeurig homomorfisme  $\phi_q : C_q(K) \rightarrow C_q(L)$  hebben dat voldoet aan  $\partial\phi_q = \phi_{q-1}\partial$  voor alle  $q$ , dan schrijven we dit als  $\phi : C(K) \rightarrow C(L)$  en we noemen  $\phi$  een *ketenafbeelding*. Deze ketenafbeelding induceert homomorfismen  $\phi_{q*} : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ . Het bewijs hiervan is gelijk aan wanneer de homomorfismen worden geïnduceerd door simpliciale afbeeldingen. In de notatie van  $\phi_q$  en  $\phi_{q*}$  laten we de  $q$  vaak weg, mits dit niet voor verwarring zorgt.

Voor het samenstellen van homomorfismen tussen homologiegroepen geldt de volgende regel:

**Lemma 4.7** *Laat  $\phi : C(K) \rightarrow C(L)$  en  $\psi : C(L) \rightarrow C(M)$  ketenafbeeldingen zijn, dan is  $\psi \circ \phi : C(K) \rightarrow C(M)$  een ketenafbeelding en  $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_* : H_q(K) \rightarrow H_q(M)$ .*

Het bewijs van dit lemma is vooral uitschrijven, en zullen we daarom achterwege laten.

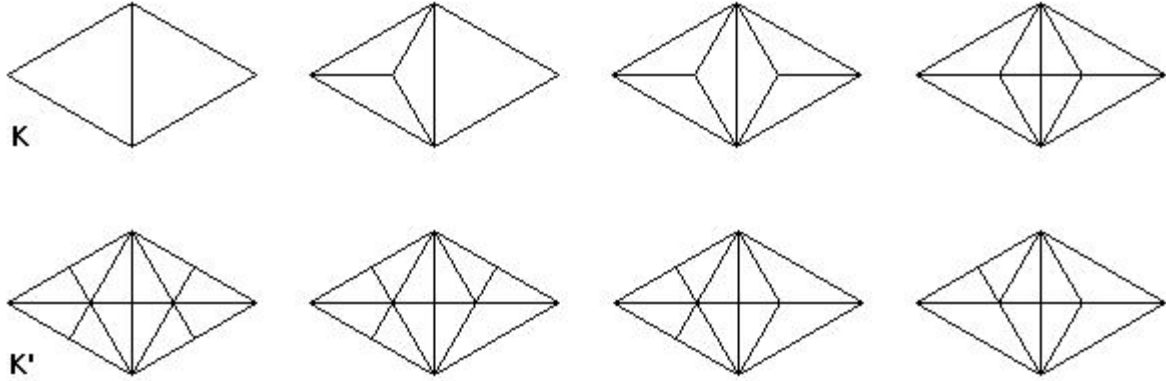
## 4.5 Stellaire onderverdeling

We hebben gezien dat we elke continue afbeelding tussen complexen kunnen benaderen met een simpliciale afbeelding. Hiervoor hadden we wel barycentrische onderverdeling nodig. Om te laten zien dat iedere afbeelding via een simpliciale benadering een homomorfisme tussen homologiegroepen induceert, moeten we laten zien dat de homologiegroepen invariant zijn onder barycentrische onderverdeling. Dit doen we door het proces van barycentrische onderverdeling op te splitsen in kleine stapjes, die we *stellaire onderverdeling* noemen.

Laat  $K$  een complex zijn,  $A$  een simplex van  $K$  en  $v$  het barycentrum van  $A$ . We vormen nu de stellaire onderverdeling van  $A$  als volgt. De simplices die  $A$  niet als een zijde hebben, blijven gelijk. Laat  $B > A$  een simplex in  $K$  zijn met  $A$  als zijde. Noem het subcomplex van de grens van  $B$  bestaande uit de simplices die  $A$  niet als een zijde hebben,  $L$ . Vervang nu  $B$  door de kegel op  $L$  met top  $v$ . Zie figuur 4.3 voor dit proces bij een tetraeder. Het complex dat zo ontstaat, noemen we  $K'$ .

Als we stellaire onderverdeling toepassen op alle simplices van een complex waarbij we beginnen met de simplices met de hoogste dimensie, krijgen we de eerste barycentrische onderverdeling  $K^1$  van  $K$ . Hierbij maakt de volgorde van onderverdeling binnen simplices van dezelfde dimensie niet uit. Dit kunnen we zien in figuur 4.4.

**Stelling 4.8** *Als  $K'$  gevormd wordt uit  $K$  door een enkele stellaire onderverdeling, dan hebben  $K$  en  $K'$  isomorfe homologiegroepen.*



Figuur 4.4: Barycentrische onderverdeling door herhaaldelijke stellaire onderverdeling

**Gevolg 4.9** *Barycentrische onderverdeling verandert de homologiegroepen van een complex niet.*

Om stelling 4.8 te bewijzen, maken we een ketenafbeelding  $\chi : C(K) \rightarrow C(K')$  waarvan we laten zien dat het isomorfismen tussen homologiegroepen induceert. Het is voldoende om  $\chi$  te definiëren voor een georiënteerd  $q$ -simplex  $\sigma$ . Stel dat  $K'$  gevormd is uit  $K$  door stellaire onderverdeling van een simplex  $A$ . Als  $A$  een zijde is van  $\sigma$ , dan wordt  $\sigma$  door stellaire onderverdeling in kleinere  $q$ -simplices onderverdeeld. We stellen dat  $\chi(\sigma)$  de  $q$ -keten van  $K'$  is die de som is van de  $q$ -simplices die samen  $\sigma$  vormen, elk met de oriëntatie geïnduceerd door  $\sigma$ . Formeel zeggen we dat als  $\sigma = (v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q)$  en  $v_0, \dots, v_k$  de hoekpunten van  $A$  zijn, dan is

$$\chi(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_q).$$

Als  $A$  geen zijde van  $\sigma$  is, dan stellen we  $\chi(\sigma) = \sigma$ .

**Lemma 4.10**  *$\chi$  is een ketenafbeelding.*

Het bewijs van dit lemma bestaat uit het berekenen van  $\partial\chi_q$  en  $\chi_{q-1}\partial$  voor een willekeurig georiënteerd  $q$ -simplex van  $K$ , en laten zien dat de antwoorden gelijk zijn. Dat zullen we hier niet doen. We noemen  $\chi$  de *onderverdelende ketenafbeelding*.

**Bewijs van stelling 4.8.** We gaan laten zien dat de homomorfismen  $\chi_* : H_q(K) \rightarrow H_q(K')$  isomorfismen zijn. Laat  $v_0, \dots, v_k$  de hoekpunten zijn van  $A$  en  $v$  het barycentrum van  $A$ .  $\theta$  is de simpliciale afbeelding van  $K$  naar  $K'$  die  $v$  naar  $v_0$  stuurt en alle andere hoekpunten naar zichzelf. De hierdoor geïnduceerde ketenafbeelding van  $C(K)$  naar  $C(K')$  geven we ook aan met  $\theta$ . Het homomorfisme  $\theta\chi$  is de identiteit op  $C_q(K)$  voor elke  $q$ , en uit lemma 4.7 volgt nu dat  $\theta_* \circ \chi_* : H_q(K) \rightarrow H_q(K)$  de identiteit is.

De voor de hand liggende veronderstelling is dat  $\theta_*$  de inverse is van  $\chi_*$ , en dit zullen we dan ook bewijzen. Laat  $z$  een  $q$ -cykel zijn in  $K'$  en kijk naar  $z - \chi\theta(z)$ . Als  $L$  de verzameling is van simplices van  $K'$  die  $v$  als een zijde hebben, samen met al hun zijdes, dan is

$L$  een subcomplex van  $K'$  en een kegel met top  $v$ . Bovendien is  $z - \chi\theta(z)$  een  $q$ -cykel van  $L$  aangezien  $\chi$  en  $\theta$  de identiteit zijn buiten  $L$  en  $\partial(z - \chi\theta(z)) = \partial(z) - \chi\theta\partial(z) = 0$ . We hebben al gezien wat de homologiegroepen van een kegel zijn:  $H_0(L) \cong \mathbb{Z}$  en  $H_q(L) = 0$  voor  $q > 0$ . Dus voor  $q > 0$  is  $z - \chi\theta(z)$  de begrenzende cykel van een  $(q + 1)$ -keten in  $L$ , en dus ook van een  $(q + 1)$ -keten in  $K'$ . Hiermee hebben we aangetoond dat  $z$  en  $\chi\theta(z)$  in dezelfde homologieklassen van  $H_q(K')$  zitten, en dus is  $\chi_* \circ \theta_* : H_q(K') \rightarrow H_q(K')$  de identiteit voor  $q > 0$ . Voor  $q = 0$  is  $z$  een lineaire combinatie van 0-simplices.  $\chi\theta(v_i) = v_i$  als de dimensie van  $A$  groter is dan 0, want een punt kan nooit een simplex van dimensie groter dan 0 als zijde hebben. Verder is  $\chi\theta(v) = v$  als  $A = v$ , dus we vinden voor  $q = 0$  dat  $z = \chi\theta(z)$ , en dus liggen deze in dezelfde homologieklassen van  $H_0(K')$ .  $\square$

De  $m$ -de barycentrische onderverdeling van  $K$  krijgen we door een eindig aantal keer stellaire onderverdeling toe te passen. De samenstelling van al deze onderverdelende ketenafbeeldingen geeft een ketenafbeelding  $\chi : C(K) \rightarrow C(K^m)$  die we ook de *onderverdelende ketenafbeelding* zullen noemen. Bij het omgekeerde van iedere stellaire onderverdeling hoort een simpliciale afbeelding  $\theta$ : deze is niet uniek, maar we moeten steeds een keuze maken. De samenstelling van al deze afbeeldingen is  $\theta : |K^m| \rightarrow |K|$ , dit noemen we de *standaard simpliciale afbeelding*.

## 4.6 Invariantie

De homologiegroepen van een complex  $K$  zijn een invariant van de topologische ruimte  $|K|$ , ondanks dat we meerdere triangularisaties voor een ruimte kunnen bedenken. Er zijn drie stellingen die deze invariantie vastleggen:

**Stelling 4.11** *Iedere continue afbeelding  $f : |K| \rightarrow |L|$  induceert een homomorfisme  $f_* : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$  in iedere dimensie.*

**Stelling 4.12** *Als  $f$  de identiteit (als afbeelding) is op  $|K|$ , dan is iedere  $f_* : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$  de identiteit (als homomorfisme). Als we twee afbeeldingen  $f : |K| \rightarrow |L|$  en  $g : |L| \rightarrow |M|$  hebben, dan is  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_q(K) \rightarrow H_q(M)$  voor alle  $q$ .*

**Stelling 4.13** *Als  $f, g : |K| \rightarrow |L|$  homotoop zijn, dan  $f_* = g_* : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$  voor alle  $q$ .*

Uit deze stellingen blijkt dat we voor iedere triangulariseerbare ruimte een triangularisatie  $h : |K| \rightarrow X$  kunnen kiezen en hiermee de homologiegroepen  $H_q(X)$  kunnen definiëren. Het maakt hierbij niet uit welke triangularisatie we kiezen, want de homologiegroepen zijn (op isomorfie na) onafhankelijk van de gekozen triangularisatie.

Bij het bewijzen van de drie invariantiestellingen zullen we gebruik maken van de volgende resultaten, die we niet zullen bewijzen:

**Definitie 4.3** *Twee simpliciale afbeeldingen  $s, t : |K| \rightarrow |L|$  noemen we nabijgelegen als voor ieder simplex  $A$  van  $K$  er een simplex  $B$  in  $L$  bestaat zodat  $s(A)$  en  $t(A)$  allebei zijdes zijn van  $B$ .*

**Lemma 4.14** *Als twee simpliciale afbeeldingen  $s, t : |K| \rightarrow |L|$  nabijgelegen zijn, dan is  $s_* = t_* : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$  voor alle  $q$ .*

**Lemma 4.15** *Als twee continue afbeeldingen  $f, g : |K| \rightarrow |L|$  homotoop zijn, dan is er een barycentrische onderverdeling  $K^m$  en een rij van simpliciale afbeeldingen  $s_1, \dots, s_n : |K^m| \rightarrow |L|$  zo dat  $s_1$  een simpliciale benadering is van  $f$ ,  $s_n$  een simpliciale benadering is van  $g$ , en ieder tweetal  $s_i, s_{i+1}$  nabijgelegen is.*

**Bewijs van stelling 4.11.** We maken gebruik van de simpliciale benaderingstelling 4.3. We kiezen een simpliciale benadering  $s : |K^m| \rightarrow |L|$  voor  $f$  en definiëren  $f_* : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$  als de samenstelling  $s_* \circ \chi_*$ , waarbij  $\chi : C(K) \rightarrow C(K^m)$  de benaderende ketenafbeelding is. Het enige wat we nu nog moeten laten zien, is dat de keuze van de simpliciale benadering van  $f$  niet uitmaakt.

Stel dat  $t : |K^n| \rightarrow |L|$  een andere simpliciale benadering is van  $f$ , met  $n \leq m$ . Laat  $\chi_1 : C(K) \rightarrow C(K^m)$  en  $\chi_2 : C(K) \rightarrow C(K^n)$  onderverdelende ketenafbeeldingen zijn, en  $\theta : |K^n| \rightarrow |K^m|$  een standaard simpliciale afbeelding. Om te laten zien dat de benaderingen  $s$  en  $t$  allebei dezelfde homomorfismen induceren, moeten we laten zien dat  $s_*\chi_{1*} = t_*\chi_{2*}\chi_{1*} : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ . Niet alleen  $t$  is een simpliciale benadering voor  $f : |K^n| \rightarrow |L|$ , maar ook  $s\theta$ . Daarom zijn  $t$  en  $s\theta$  nabijgelegen afbeeldingen en  $s_*\theta_* = t_* : H_q(K^n) \rightarrow H_q(L)$ . Omdat  $\theta_*$  en  $\chi_{2*}$  elkaars inverse zijn, is  $t_*\chi_{2*}\chi_{1*} = s_*\theta_*\chi_{2*}\chi_{1*} = s_*\chi_{1*}$ .  $\square$

**Bewijs van stelling 4.12.** Het eerste deel van deze stelling volgt rechtstreeks uit de definities. Stel we hebben continue afbeeldingen  $f : |K| \rightarrow |L|$  en  $g : |L| \rightarrow |M|$  die we simpliciaal benaderen door  $s : |K^m| \rightarrow |L^n|$  en  $t : |L^n| \rightarrow |M|$ . Laat verder  $\chi_1 : C(K) \rightarrow C(K^m)$  en  $\chi_2 : C(L) \rightarrow C(L^n)$  onderverdelende simpliciale afbeeldingen zijn en  $\theta : |L^n| \rightarrow |L|$  een standaard simpliciale afbeelding. We hebben dan het volgende diagram van homomorfismen:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_q(K^m) & \xrightarrow{s_*} & H_q(L^n) & & \\
 \chi_{1*} \uparrow & & \chi_{2*} \uparrow \theta_* \downarrow & \searrow t_* & \\
 H_q(K) & \xrightarrow{f_*} & H_q(L) & \xrightarrow{g_*} & H_q(M)
 \end{array}$$

Het is eenvoudig in te zien dat  $\theta s$  een simpliciale benadering is voor  $f : |K^m| \rightarrow |L|$ , en dat  $ts$  een simpliciale benadering is voor  $gf : |K^m| \rightarrow |M|$ . Daarom is  $g_* \circ f_* = t_*\chi_{2*}\theta_*s_*\chi_{1*} = t_*s_*\chi_{1*} = (ts)_*\chi_{1*} = (g \circ f)_*$ .  $\square$

**Bewijs van stelling 4.13.** Dit bewijs volgt direct uit de twee lemma's: we kunnen een rij  $s_1, \dots, s_n$  maken zodat  $f_* = s_{1*}\chi_* = \dots = s_{n*}\chi_* = g_*$ .  $\square$

# Hoofdstuk 5

## De fixpuntstelling van Lefschetz

### 5.1 Opnieuw de Euler-karakteristiek

In hoofdstuk 2 hebben we de definitie van de Euler-karakteristiek van een complex  $K$  gezien. We zullen nu een nieuwe definitie geven in termen van de homologiegroepen van  $K$ , waarvan zal blijken dat deze equivalent is aan de vorige. Hieruit volgt direct dat de Euler-karakteristiek een topologische invariant van de ruimte is die niet afhangt van de gekozen triangularisatie. Dit resultaat hebben we al gezien voor de ruimten  $H_g$ .

We hebben het  $q$ -de Betti-getal van een complex  $K$  gedefinieerd als het getal  $r$  in  $H_q(K) \cong T \oplus \mathbb{Z}^r$ , waarbij  $T$  de torsie-ondergroep van  $H_q(K)$  is. We noteren dit als  $\beta_q$ .

**Stelling 5.1 (Euler-Poincaré formule)** *De Euler-karakteristiek van een eindig complex  $K$  is gegeven door*

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \beta_q,$$

met  $n$  de dimensie van  $K$ .

**Gevolg 5.2** *Complexen met homotope polyeders hebben dezelfde Euler-karakteristiek.*

Voor het bewijzen van deze stelling zullen we een nieuwe interpretatie van de Betti-getallen gebruiken. We hebben de homologiegroepen gedefinieerd aan de hand van  $q$ -ketens in een complex  $K$ : deze zijn van de vorm  $\lambda_1 \sigma_1 + \dots + \lambda_s \sigma_s$  waarbij  $\sigma_i$  een georiënteerd  $q$ -simplex van  $K$  is en  $\lambda_i$  gehele getallen zijn. Als we nu in plaats van gehele getallen als coëfficiënten ook rationale getallen toelaten, vinden we ketens van de vorm  $r_1 \sigma_1 + \dots + r_s \sigma_s$ , waarbij  $\sigma_i$  nog steeds een georiënteerd  $q$ -simplex van  $K$  is, maar  $r_i$  een rationaal getal. Deze lineaire combinaties vormen een vectorruimte over  $\mathbb{Q}$ , en noteren we als  $C_q(K, \mathbb{Q})$ . Merk op dat we hierbij ieder  $q$ -simplex van  $K$  met maar één oriëntatie laten voorkomen in een  $q$ -keten: de andere oriëntatie krijgen we door een negatieve coëfficiënt te kiezen. De dimensie van  $C_q(K, \mathbb{Q})$  is daarom gelijk aan het aantal  $q$ -simplices in  $K$ . Op dezelfde manier kunnen we  $Z_q(K, \mathbb{Q})$  en  $B_q(K, \mathbb{Q})$  definiëren, en dus ook de homologiegroep  $H_q(K, \mathbb{Q})$ . Dit noemen we de  $q$ -de homologiegroep van  $K$  met rationale coëfficiënten.

**Lemma 5.3**  $\beta_q$  is de dimensie van  $H_q(K, \mathbb{Q})$  als vectorruimte over  $\mathbb{Q}$ .

**Bewijs.** Kies een minimale verzameling voortbrengers  $[z_1], \dots, [z_{\beta_q}], [w_1], \dots, [w_{\gamma_q}]$  van  $H_q(K)$ , waarbij de  $[z_i]$  het vrije deel voortbrengen en de  $[w_i]$  het torsie-gedeelte. Alle  $[w_i]$  hebben daarom eindige orde. Een  $q$ -cykel  $z$  met gehele coëfficiënten kunnen we zien als een cykel met rationale coëfficiënten, en legt daarom een homologieklasse in  $H_q(K, \mathbb{Q})$  vast die we noteren als  $\{z\}$ . Stel dat

$$\frac{a_1}{b_1}\sigma_1 + \dots + \frac{a_s}{b_s}\sigma_s$$

een rationale  $q$ -cykel is, met  $a_i, b_i$  gehele getallen. Dan is

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1}\sigma_1 + \dots + \frac{a_s}{b_s}\sigma_s &= \frac{1}{b_1 b_2 \dots b_s} \times (\text{een cykel met gehele coëfficiënten}) \\ &= \frac{1}{b_1 b_2 \dots b_s} \times (\text{een lineaire combinatie van } z_i \text{'s en } w_i \text{'s}). \end{aligned}$$

Daarom wordt  $H_q(K, \mathbb{Q})$  opgespannen door  $\{z_1\}, \dots, \{z_{\beta_q}\}, \{w_1\}, \dots, \{w_{\gamma_q}\}$ .

Stel dat  $[w]$  een element is van  $H_q(K)$  van eindige orde  $m$ , dan is  $mw$  de begrenzende cykel van een  $(q+1)$ -keten met gehele coëfficiënten. Door te delen door  $m$ , vinden we dat  $w$  zelf de begrenzende cykel is van een  $(q+1)$ -keten met rationale coëfficiënten, en daarom  $\{w\} = 0$ . Dus  $H_q(K, \mathbb{Q})$  wordt opgespannen door  $\{z_1\}, \dots, \{z_{\beta_q}\}$ .

Als een lineaire combinatie van  $z_1, \dots, z_{\beta_q}$  met rationale coëfficiënten de begrenzende cykel is van een rationale  $(q+1)$ -keten, dan krijgen we door vermenigvuldiging met alle noemers van de coëfficiënten een lineaire combinatie van  $z_1, \dots, z_{\beta_q}$  met gehele coëfficiënten, die de begrenzende cykel is van een  $(q+1)$ -keten met gehele coëfficiënten. Maar dat kan alleen als de coëfficiënt van elke  $z_i$  gelijk is aan 0, dus de oorspronkelijke rationale coëfficiënten waren allemaal 0. Daarom zijn  $\{z_1\}, \dots, \{z_{\beta_q}\}$  lineair onafhankelijk.  $\square$

**Bewijs van stelling 5.1.** De Euler-karakteristiek is gedefinieerd door  $\chi(K) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \alpha_q$  met  $\alpha_q$  het aantal  $q$ -simplices in  $K$ , oftewel de dimensie van  $C_q(K, \mathbb{Q})$ . Voor het gemak zullen we de toevoeging  $(K, \mathbb{Q})$  bij groepen weglaten.

We construeren een basis voor  $C_q$  op de volgende manier. Aangezien  $K$  geen  $(n+1)$ -simplices heeft, is  $B_n = 0$  en dus is  $\beta_q$  de dimensie van  $Z_n$ . Kies een basis  $z_1^n, \dots, z_{\beta_n}^n$  voor  $Z_n$  en breidt die uit met  $c_1^n, \dots, c_{\gamma_q}^n$  tot een basis van  $C_n$ . Door  $\partial$  toe te passen op deze basis krijgen we een basis  $\partial c_1^n, \dots, \partial c_{\gamma_q}^n$  voor  $B_{n-1}$ . Deze basis breiden we uit met  $z_1^{n-1}, \dots, z_{\beta_{n-1}}^{n-1}$  tot een basis voor  $Z_{n-1}$  en verder met  $c_1^{n-1}, \dots, c_{\gamma_{n-1}}^{n-1}$  tot een basis voor  $C_{n-1}$ . Merk op dat de dimensie van  $Z_{n-1}$  min de dimensie van  $B_{n-1}$  gelijk is aan  $\beta_{n-1}$  vanwege lemma 5.3. Op deze manier gaan we verder. In het algemeen nemen we een basis  $\partial c_1^{q+1}, \dots, \partial c_{\gamma_{q+1}}^{q+1}$  voor  $B_q$ , breiden die uit met  $z_1^q, \dots, z_{\beta_q}^q$  tot een basis voor  $Z_q$  en met  $c_1^q, \dots, c_{\gamma_q}^q$  tot een basis voor  $C_q$ . Dit proces eindigt met de basis  $\partial c_1^1, \dots, \partial c_{\gamma_1}^1, z_1^0, \dots, z_{\beta_q}^0$  voor  $Z_0 = C_0$ .

Zo vinden we dat  $\alpha_q$ , de dimensie van  $C_q$ , gelijk is aan  $\gamma_{q+1} + \beta_q + \gamma_q$ , en dus

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^n (-1)^q \alpha_q &= \sum_{q=0}^n (-1)^q (\gamma_{q+1} + \beta_q + \gamma_q) \\ &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \beta_q \end{aligned}$$

omdat iedere  $\gamma_q$  eenmaal voorkomt met teken  $(-1)^q$  en eenmaal met teken  $(-1)^{q-1}$  als  $0 < q \leq n$ , en  $\gamma_0 = \gamma_{n+1} = 0$ .  $\square$

## 5.2 Lefschetz-getal en de fixpuntstelling

Laat  $f : X \rightarrow X$  een continue afbeelding zijn van een compacte triangulariseerbare ruimte naar zichzelf. Kies een triangularisatie  $h : |K| \rightarrow X$  en laat  $n$  de dimensie van  $K$  zijn. We noteren de door  $f$  geïnduceerde afbeelding van  $|K|$  naar zichzelf met  $f^h = h^{-1} \circ f \circ h$ . Wanneer we werken met rationale coëfficiënten, zijn de homologiegroepen  $H_q(K, \mathbb{Q})$  vectorruimtes over  $\mathbb{Q}$  en de homomorfismen  $f_{q*}^h : H_q(K, \mathbb{Q}) \rightarrow H_q(K, \mathbb{Q})$  lineaire afbeeldingen. De alternerende som van het spoor van deze afbeeldingen noemen we het *Lefschetz-getal* van  $f$ . Dit noteren we als

$$\Lambda_f = \sum_{q=0}^n (-1)^q \operatorname{Tr}(f_{q*}^h).$$

**Stelling 5.4 (Fixpuntstelling van Lefschetz)** *Als  $\Lambda_f \neq 0$  dan heeft  $f$  een fixpunt.*

Het bewijs van deze stelling berust voor een groot deel op de volgende stelling, die zegt dat het niet uitmaakt of je het Lefschetz-getal berekent op het niveau van ketengroepen of op het niveau van homologiegroepen.

**Stelling 5.5 (Hopf spoorstelling)** *Als  $K$  een eindig complex is met dimensie  $n$  en  $\phi : C(K, \mathbb{Q}) \rightarrow C(K, \mathbb{Q})$  een ketenafbeelding, dan is*

$$\sum_{q=0}^n (-1)^q \operatorname{Tr}(\phi_q) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \operatorname{Tr}(\phi_{q*}).$$

**Bewijs.** Kies een basis voor  $C(K, \mathbb{Q})$  zoals in het bewijs van stelling 5.1. Deze basis bestaat uit de elementen  $\partial c_1^{q+1}, \dots, \partial c_{\gamma_{q+1}}^{q+1}, z_1^q, \dots, z_{\beta_q}^q, c_1^q, \dots, c_{\gamma_q}^q$ . Een element op de diagonaal van de matrix van  $\phi_q$  ten opzichte van deze basis krijgen we door een basiselement  $w$  te nemen,  $\phi(w)$  te schrijven ten opzichte van deze basis en de coëfficiënt van  $w$  te nemen. We noemen deze coëfficiënt  $\lambda(w)$ . We kunnen het spoor van  $\phi_q$  dan schrijven als

$$\sum_{j=1}^{\gamma_{q+1}} \lambda(\partial c_j^{q+1}) + \sum_{j=1}^{\beta_q} \lambda(z_j^q) + \sum_{j=1}^{\gamma_q} \lambda(c_j^q).$$

Omdat  $\phi$  een ketenafbeelding is, geldt  $\phi \partial = \partial \phi$  en dus  $\lambda(\partial c_j^{q+1}) = \lambda(c_j^{q+1})$ . Daarom is

$$\sum_{q=0}^n (-1)^q \operatorname{Tr}(\phi_q) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \sum_{j=1}^{\beta_q} \lambda(z_j^q),$$

de andere termen vallen tegen elkaar weg. Aangezien  $\{z_1^q\}, \dots, \{z_{\beta_q}^q\}$  een basis is voor de homologiegroep  $H_q(K, \mathbb{Q})$  hebben we

$$\sum_{j=1}^{\beta_q} \lambda(z_j^q) = \operatorname{Tr}(\phi_{q*}),$$

waarmee we de stelling bewezen hebben.  $\square$

**Bewijs van stelling 5.4.** Stel dat  $f$ , en dus ook  $f^h$ , geen fixpunten heeft. We zullen nu aantonen dat  $\Lambda_f = 0$ . Laat  $d$  de metriek op  $|K|$  zijn geïnduceerd door de omliggende Euclidische ruimte. De functie op  $|K|$  gegeven door  $x \mapsto d(x, f^h(x))$  is nooit nul aangezien  $f^h$  geen fixpunten heeft, en het neemt zijn ondergrens  $\delta > 0$  aan omdat  $|K|$  compact is. Door eventueel een barycentrische onderverdeling van  $K$  te nemen, mogen we voor de maaswijdte van  $K$  aannemen dat  $\mu(K) < \delta/3$ .

Kies een simpliciale benadering  $s : |K^m| \rightarrow |K|$  van  $f^h : |K^m| \rightarrow |K|$  en laat  $\chi : C(K, \mathbb{Q}) \rightarrow C(K^m, \mathbb{Q})$  een onderverdelende ketenafbeelding zijn. Per definitie is  $f_{q*}^h = s_{q*} \circ \chi_{q*}$ . Daarom volgt uit de Hopf spoorstelling dat  $\Lambda_f = 0$  als alle lineaire afbeeldingen  $s_q \chi_q : C_q(K, \mathbb{Q}) \rightarrow C_q(K^m, \mathbb{Q})$  spoor 0 hebben.

Stel  $\sigma$  is een georiënteerd  $q$ -simplex van  $K$  en  $\tau$  een georiënteerd  $q$ -simplex in  $K^m$  dat in de keten  $\chi_q(\sigma)$  en dus ook in  $\sigma$  ligt. Als  $x \in \tau$  dan  $d(s(x), f^h(x)) < \delta/3$  omdat  $s$  een simpliciale benadering is voor  $f^h$ , en dus  $d(x, s(x)) > 2\delta/3$ . Stel nu dat  $y \in \sigma$ , dan  $d(x, y) < \delta/3$  en daarom  $d(y, s(x)) > \delta/3$ . Dit betekent dat  $s(x)$  en  $y$  niet in hetzelfde simplex van  $K$  liggen, dus  $s(\tau) \neq \sigma$ . Dus het simplex  $\sigma$  heeft coëfficiënt nul in de keten  $s_q \chi_q(\sigma)$  en daarom  $\text{Tr}(s_q \chi_q) = 0$ .  $\square$

Het Lefschetz-getal heeft de volgende belangrijke eigenschappen:

**Lemma 5.6** *Stel  $f : X \rightarrow X$  is een continue afbeelding. Dan geldt voor de Lefschetz-getal:*

(a)  $\Lambda_f$  is onafhankelijk van de gekozen triangularisatie van  $X$ .

(b) Stel  $g : X \rightarrow X$  is homotoop met  $f$ , dan is  $\Lambda_f = \Lambda_g$ .

**Bewijs.** Stel we kiezen een triangularisatie  $h : |K| \rightarrow X$  van  $X$  en een andere triangularisatie  $k : |L| \rightarrow X$ . We zagen al dat het voor de homologiegroepen van  $X$  niet uitmaakt welke triangularisatie we kiezen. Stel nu dat we een afbeelding  $f : X \rightarrow X$  hebben, deze induceert een homomorfisme  $f_{q*}^h : H_q(K, \mathbb{Q}) \rightarrow H_q(K, \mathbb{Q})$ . We gaan laten zien dat de afbeelding  $i^{-1} \circ f_{q*}^h \circ i = g_{q*}^k : H_q(L, \mathbb{Q}) \rightarrow H_q(L, \mathbb{Q})$  met  $i$  het isomorfisme tussen  $H_q(K, \mathbb{Q})$  en  $H_q(L, \mathbb{Q})$  hetzelfde spoor heeft als  $f_{q*}^h$ . We hebben nu het volgende diagram:

$$\begin{array}{ccc} H_q(L, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{g_{q*}^k} & H_q(L, \mathbb{Q}) \\ \downarrow i^{-1} & & \uparrow i \\ H_q(K, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{f_{q*}^h} & H_q(K, \mathbb{Q}) \end{array}$$

Aangezien deze groepen ook vectorruimtes zijn, is de afbeelding  $i$  niet meer dan de verandering van een basis. We weten al uit de lineaire algebra dat het spoor onafhankelijk is van de gekozen basis, dus het diagram commuteert. Hiermee hebben we laten zien dat de gekozen triangularisatie niet uitmaakt voor het bepalen van  $\Lambda_f$ .

Het tweede deel van het lemma volgt direct uit stelling 4.13: homotope afbeeldingen induceren dezelfde homomorfismen tussen homologiegroepen.  $\square$

We noemen tenslotte nog een toepassing van de fixpuntstelling van Lefschetz, die een verband legt met de Euler-karakteristiek:



**Stelling 5.7** *Als de identiteit op een compacte triangulariseerbare ruimte  $X$  homotoop is met een fixpuntvrije continue afbeelding dan is  $\chi(X) = 0$ .*

**Bewijs.** Uit stelling 5.1 volgt dat het Lefschetz-getal van de identiteit gelijk is aan  $\chi(X)$ . Verder hebben homotope afbeeldingen hetzelfde Lefschetz-getal.  $\square$

### 5.3 $H_g$ als topologische groep

Als een toepassing van de fixpuntstelling van Lefschetz, zullen we in deze paragraaf het volgende bewijzen:

**Stelling 5.8** *De enige  $H_g$  die de aanvullende structuur van een topologische groep heeft, is de torus ( $g = 1$ ).*

Hiervoor brengen we de definitie van een topologische groep nog even in herinnering:

**Definitie 5.1** *Een topologische groep  $G$  is zowel een topologische ruimte die Hausdorff is, als een groep met vermenigvuldiging. Deze twee structuren kunnen naast elkaar bestaan omdat de groepsvermenigvuldiging  $m : G \times G \rightarrow G$  en de afbeelding  $i : G \rightarrow G$  die ieder groepsselement naar zijn inverse stuurt, continu zijn.*

Voor het bewijs van de stelling maken we gebruik van het volgende lemma:

**Lemma 5.9** *Stel  $G$  is een wegsamenhangende topologische groep  $G$ . Dan is rechtsvermenigvuldiging  $R_x : G \rightarrow G$  met een element  $x \in G$  homotoop met de identiteit op  $G$ .*

**Bewijs.** We gaan een continue afbeelding  $F : G \times I \rightarrow G$  construeren zodat  $F(g, 0) = R_x(g) = gx$  en  $F(g, 1) = \text{id}_G(g) = g$ . Laat  $e$  het eenheidselement van  $G$  zijn, dan is er een pad  $\gamma : I \rightarrow G$  met  $\gamma(0) = x$  en  $\gamma(1) = e$ .  $F$  is nu de samenstelling

$$\begin{aligned} G \times I &\rightarrow G \times G \rightarrow G \\ (g, t) &\mapsto (g, \gamma(t)) \mapsto g\gamma(t) \end{aligned}$$

waarbij de tweede pijl staat voor vermenigvuldiging in  $G$ .  $F$  is continu, want  $\gamma$  is continu en vermenigvuldiging op  $G$  is per definitie continu. Verder is  $F(g, 0) = gx$  en  $F(g, 1) = g$ .  $F$  is dus een homotopie van  $R_x$  naar  $\text{id}_G$ .  $\square$

**Bewijs van stelling 5.8.** Als  $R_x$  een fixpunt heeft, dan is  $gx = g$  voor alle  $g$ , oftewel  $x = g^{-1}g = e$  en  $R_x$  is gelijk aan de identiteit. Voor  $x \neq e$  is  $R_x$  dus fixpuntvrij. Omdat  $R_x$  homotoop is met de identiteit, volgt uit stelling 5.7 dat  $\chi(H_g) = 0$ . We hebben gezien dat  $\chi(H_g) = 2 - 2g$  dus de enige  $H_g$  die voldoet is  $g = 1$ , de torus. We hebben hiermee echter de stelling nog niet bewezen: we weten nu dat als een ruimte  $H_g$  een topologische groep is, dan  $g = 1$ . We moeten nu nog laten zien dat de torus inderdaad een topologische groep is. We kunnen de torus zien als het product van twee cirkels. Wanneer we een cirkel opvatten als de punten  $e^{i\phi}$  in het complexe vlak met  $0 \leq \phi < 2\pi$ , dan is de cirkel een topologische groep. Immers, de afbeeldingen

$$e^{i\phi} \times e^{i\psi} \mapsto e^{i(\phi+\psi)}, \quad e^{i\phi} \mapsto e^{-i\phi}$$

zijn continu. Het is niet moeilijk aan te tonen (dit is uitschrijfwerk) dat het product van twee topologische groepen weer een topologische groep is. Dus de torus is als product van twee cirkels inderdaad een topologische groep.  $\square$

## 5.4 De fixpuntstelling van Brouwer

Zoals al opgemerkt is, is de fixpuntstelling van Lefschetz een generalisatie van de fixpuntstelling van Brouwer. Deze stelling is dan ook eenvoudig af te leiden uit stelling 5.4. Hiervoor maken we gebruik van een algemener resultaat:

**Stelling 5.10** *Stel  $X$  is een compacte, triangulariseerbare ruimte die dezelfde rationale homologiegroepen heeft als een punt. Dan heeft iedere continue afbeelding  $f : X \rightarrow X$  een fixpunt.*

**Bewijs.** Kies een triangularisatie  $h : |K| \rightarrow X$  en bereken de homologiegroepen van  $X$ . Deze zijn hetzelfde als die van een punt, dus  $H_0(K, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$  en  $H_q(K, \mathbb{Q}) = 0$  voor  $q > 0$ . Dus voor  $q > 0$  zijn alle geïnduceerde homomorfismen  $f_{q*}^h$  gelijk aan de nulafbeelding. Verder heeft  $|K|$  slechts één samenhangscomponent, want  $H_0(K, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ . Maar  $H_0(K, \mathbb{Q})$  is voortgebracht door de homologieklassen van ieder willekeurig hoekpunt van  $K$ , en dus is  $f_{0*}^h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  de identiteit. Hieruit volgt dat  $\Lambda_f = 1$ , dus  $f$  heeft een fixpunt.  $\square$

**Gevolg 5.11 (Fixpuntstelling van Brouwer)** *Een continue functie  $f : B^n \rightarrow B^n$  van de  $n$ -dimensionale bal naar zichzelf heeft minstens één fixpunt.*

Stelling 5.10 levert ons niet alleen de fixpuntstelling van Brouwer, maar een vergelijkbare stelling voor alle samentrekbare compacte triangulariseerbare ruimtes. Het projectieve vlak bijvoorbeeld heeft ook dezelfde homologiegroepen als een punt, dus een afbeelding van het projectieve vlak naar zichzelf heeft altijd een fixpunt.

## 5.5 Generalisaties

Het Lefschetz-getal van een afbeelding zegt iets over het bestaan van een fixpunt. Een andere interessante vraag is hoeveel fixpunten een gegeven afbeelding heeft. Dit kunnen we op twee manieren aanpakken.

Laat  $X$  een compacte polyeder zijn en  $f : X \rightarrow X$  een continue afbeelding. Wanneer de fixpunten van  $f$  geïsoleerd zijn, kunnen we onder bepaalde voorwaarden op  $f$  aan de fixpunten van  $f$  een *multipliciteit* toekennen. Dit is vergelijkbaar met het toekennen van multipliciteiten aan de nulpunten van een polynoom. Door deze multipliciteiten op te tellen voor alle fixpunten van  $f$ , vinden we het Lefschetz-getal. Er geldt dus het volgende:

**Lemma 5.12** *Laat  $X$  een compacte polyeder zijn en  $f : X \rightarrow X$  een continue afbeelding met geïsoleerde fixpunten. Dan is het aantal fixpunten van  $f$  kleiner dan of gelijk aan het Lefschetz-getal van  $f$ .*

Laat  $X$  wederom een compacte polyeder zijn en  $f : X \rightarrow X$  een continue functie. We maken een equivalentierelatie op de fixpunten van  $f$  als volgt: twee fixpunten  $x, x'$  zijn equivalent als ze verbonden kunnen worden door een pad  $\gamma$  zo dat  $\gamma$  homotoop is met  $f(\gamma)$ . Het aantal equivalentieklassen noemen we het *Nielsen-getal* en noteren we  $N(f)$ . Net als het Lefschetz-getal, is het Nielsen-getal gelijk voor homotope afbeeldingen. Het volgende resultaat over het Nielsen-getal volgt rechtstreeks uit de definitie:

**Lemma 5.13** *Laat  $X$  een compacte polyeder zijn en  $f : X \rightarrow X$  een continue afbeelding. Dan is het Nielsen-getal  $N(f)$  een ondergrens voor het aantal fixpunten van  $f$ .*

We hebben nu de relatie

$$\Lambda_f \geq \text{aantal fixpunten van } f \geq N(f).$$

Het Nielsen-getal kan in sommige gevallen berekend worden met behulp van het Lefschetz-getal en het homomorfisme dat  $f$  induceert op de fundamenteelgroep van  $X$ . De fundamenteelgroep is sterk gerelateerd aan de homologiegroep  $H_1(X)$ , iets wat de definities al doen vermoeden. We kunnen dus met behulp van  $\pi_1(X)$  en  $\Lambda_f$  zowel een boven- als een ondergrens aangeven voor het aantal fixpunten van  $f$ .

# Hoofdstuk 6

## Bibliografie

Aleksandrov, P.S., 1960. *Combinatorial topology*. Graylock Press, Albany (New York). (Russisch origineel verscheen in 1947)

Armstrong, M.A., 1983. *Basic topology*. Springer-Verlag, New York.

Brown, R.F., 1971. *The Lefschetz fixed point theorem*. Scott, Foresman and Company, Glenview (Illinois).

Brown, R.F., 2004. Review of Fixed point theory, by Andrzej Granas and James Dugundji. *Bulletin of the American Mathematical Society* Vol. 41 No. 2, 267–271.

Het merendeel van deze tekst is ontleend aan het boek van Armstrong. De andere twee boeken en met name het artikel van Brown hebben beide als informatiebron gediend over de generalisaties van de fixpuntstelling van Lefschetz.