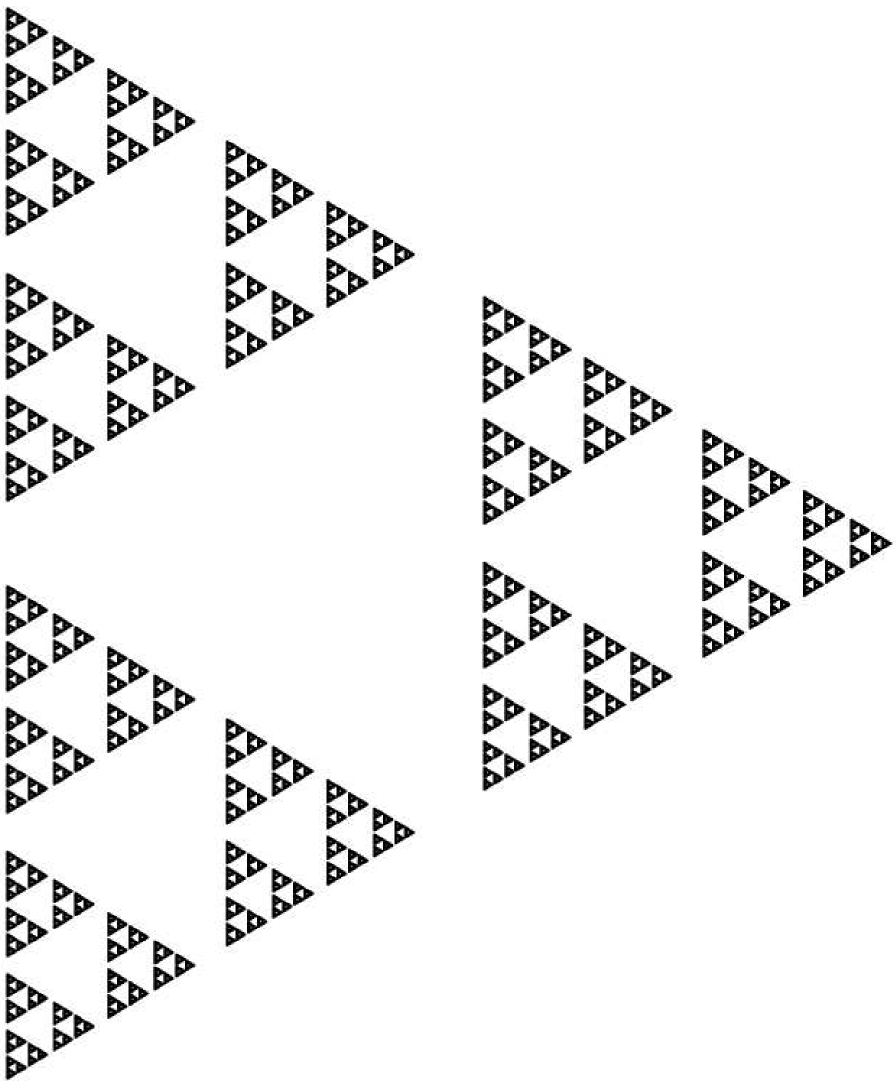
Categorieën van verzamelingen met een groepsactie

Arno Kret



Bachelorscriptie wiskunde
onder begeleiding van professor S.J. Edixhoven
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Op de voorkant: Een compacte en totaal onsamenhangende deelruimte van $\mathbf{R}^2$ geïnspireerd door de Sierpinskidriehoek. De ruimte is homeomorf met $\mathrm{Hom}_K(\varinjlim_{i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}} K^{3^i}, K_s)$, zie voorbeeld 3.14.

Opgemaakt in TEX, font Computer Modern 12.

Elektronisch beschikbaar via www.math.leidenuniv.nl/~akret

Inhoudsopgave

Inleiding

Voor een gegeven eindige, normale en separabele lichaamsuitbreiding $K \subset L$ (een Galoisuitbreiding) geeft de klassieke Galoistheorie een correspondentie tussen alle deellichamen van L die K omvatten en ondergroepen van $\mathrm{Aut}_K(L)$. De aanpak is hierbij is in zekere zin 'van boven naar benenden'. Men kijkt namelijk vanuit het bovenste lichaam L naar 'lager' gelegen tussenlichamen die K omvatten. Alexander Grothendieck heeft deze blik omgekeerd, hij kijkt vanuit het lichaam K 'omhoog' naar alle lichamen waar K naartoe afbeeldt. Op deze manier verkijg je de categorie van lichamen L (eindig en separabel over K) voorzien van een morfisme $K \to L$. Voor deze categorie is er ook een Galoiscorrespondentie: De categorie is anti-equivalent met de categorie van transitieve groepswerkingen $\pi \times E \to E$ van de *absolute Galoisgroep* π van K op een eindige verzamelingen E.

De blikwisselling van omlaag naar omhoog heeft een voordeel. Een onnodige voorwaarde die in de klassieke theorie gesteld wordt, wordt zichtbaar. Om de theorie te laten werken hoeven de groepswerkingen $\pi \times E \to E$ namelijk niet noodzakelijk transitief te zijn. Grothendieck heeft bewezen dat de categorie van groepswerkingen $\pi \times E \to E$ op eindige verzamelingen E anti-equivalent is met de categorie van separabele eindig-dimensionale K-algebra's. Binnen deze theorie zien we dat de K-algebra's die *lichamen* zijn overeenkomen met de *transitieve* werkingen.

In deze scriptie geven we een bewijs voor Grothendieck's stelling. In hoofdstuk 1 bouwen we de noodzakelijke theorie op, en in hoofdstuk 2 formuleren en bewijzen we de stelling. We volgen hierbij hoofdstuk 2 van Galois Theory for Schemes van H.W. Lenstra. Een verschil met de aanpak in [GTS] is dat daar de herformulering van Grothendieck wordt afgeleid uit klassieke Galoistheorie, we bewijzen de stelling hier *zonder* gebruik te maken van Galoistheorie. De lezer die bekend is met het bewijs van de hoofdstelling van Galoistheorie zal overlap ontdekken, maar er zijn wel verschillen. Zo gebruiken we nergens het lemma van Artin-Dedekind.

In klassieke Galoistheorie is een eindige lichaamsuitbreiding $K \subset L$ separabel als minimumpolynomen $f \in K[X]$ van elementen uit L alleen enkelvoudige nulpunten hebben in $\overline{K}$. Deze voorwaarde leent zich niet altijd voor eenvoudige bewijzen. In veel boeken wordt de voorwaarde dan ook snel geherformuleerd in een andere eigenschap, bijvoorbeeld met behulp van de separabiliteitsgraad: het aantal K-inbeddingen van L in een algebraïsche afsluiting $\overline{K}$ van K. Bij eindig dimensionale K-algebra's hebben we hetzelfde probleem; bewijzen met minimunpolynoomen kunnen ingewikkeld zijn. Voor eindig-dimensionale K-algebra's kiezen we om die reden ervoor separabiliteit uit te drukken met behulp tensorproducten. In appendix A hebben we voor lezers die tensorproducten niet kennen alle benodigde 'tensortheorie' opgebouwd.

In hoofdstuk 3 vergroten we de categorie van separabele eindig-dimensionale K-algebra's naar de categorie van *separabele algebraïsche K-algebra's.* Dit zijn algebra's die gelijk zijn aan de vereniging van hun eindig-dimensionale K-deelalgebra's. Uiteindelijk vinden we dat de categorie anti-equivalent is met de categorie van *compacte totaal onsamenhangende π-ruimten.* We bewijzen deze stelling door Grothendieck's stelling op de eindig-dimensionale K-deelalgebra's van een separabele algebraïsche K-algebra toe te passen.

Hoofdstuk 1:

Eindig-dimensionale algebra's

Zij R een commutatieve ring. We noemen een commutatieve ring B samen met een ringmorfisme $\varphi\colon R \to B$ een R-algebra. Via het morfisme φ is de optelgroep B^+ van B een R-moduul: voor $b \in B^+$ en $r \in R$ definiëren we $r \cdot b = \varphi(r) \cdot b$. Gewoonlijk laten we φ weg uit de notatie, en noemen we bovenstaande vermenigvuldiging de *scalaire vermenigvuldiging*. Een *morfisme* $f\colon B \to B'$ van R-algebra's is een ringmorfisme zó dat het diagram

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ B \arrow[rr, "f"] & & B' \end{tikzcd}$$

commuteert. De R-algebra's samen met de R-algebramorfismen vormen nu een categorie: de *categorie van R-algebra's*. Veel eigenschappen van de categorieën van ringen en R-modulen gelden ook voor de categorie van R-algebra's. Zo gaat men eenvoudig na dat producten, cokernen, inductieve en projectieve limieten voor gerichte systemen (zie hoofdstuk 3) bestaan in de categorie van R-algebra's. Met wat meer moeite hebben we in appendix A bewezen dat eindige coproducten (sommen) bestaan in de categorie van R-algebra's (stelling A.6).

Als $R = K$ een lichaam is, dan is B^+ een K-vectorruimte met een dimensie, en deze dimensie gebruiken we ook voor B als algebra. Zodoende definiëren we $\dim_K(B) := \dim_K(B^+)$. In de komende twee hoofdstukken zullen we de categorie van eindig-dimensionale K-algebra's bestuderen. Voor een eindig-dimensionale K-algebra B hebben we het volgende lemma.

Lemma 1.1 *Zij B een eindig dimensionale K-algebra. Stel B is een domein, dan is B een lichaam.*

Bewijs Zij $b \in B\backslash\{0\}$ en beschouw de K-lineaire afbeelding $\varphi_b\colon B \to B$ gegeven door $x \mapsto b{\cdot}x$. Als $b \cdot x = 0$, dan volgt $x = 0$, dus is φ_b injectief. De dimensie van het beeld $\mathrm{Im}(\varphi_b)$ is gelijk aan $\dim_K(B)$, en de enige deelruimte van B met deze dimensie is B zelf, dus $\mathrm{Im}(\varphi_b) = B$. Het origineel $\varphi_b^{-1}1 \in B$ van $1 \in B$ is een inverse van b. □

Dankzij bovenstaand lemma kunnen we iets zeggen over de structuur van alle eindig-dimensionale K-algebra's.

Stelling 1.2 *Zij B een eindig-dimensionale K-algebra. Dan heeft B eindig veel priemidealen $p_1, \ldots, p_t \subset B$, en voor zekere $k \in \{1, \ldots, \dim_K(B)\}$ groot genoeg is de natuurlijke afbeelding $B \to \prod_{i=1}^t B/p_i^k$ met $b \mapsto (i \mapsto b \bmod p_i)$ een isomorfisme. Bovendien zijn de K-algebra's B/p_i^k lokaal (de algebra heeft precies 1 maximaal ideaal) met nilpotent maximaal ideaal $p_i \bmod p_i^k$.*

[GTS, pagina 22]

Bewijs Laat I het Jacobsonradicaal van B zijn (dus $I = \bigcap_{m \subset B} m$, de doorsnede van alle maximale idealen $m \subset B$). Omdat de de dimensie van I eindig is, is de keten $I^1 \supset I^2 \supset \cdots$ vanaf zekere $k \leq \dim_K(B)$ stabiel. Uit Nakayama's lemma (zie [ICA], [Lang] of [Eisenbud]) volgt $I^k = 0$. Zij $p \subset B$ een priemideaal. Er geldt $\dim_K(B) = \dim_K(p) + \dim_K(B/p)$, en $\dim_K(B/p)$ is eindig. Wegens lemma 1.1 is B/p een lichaam, en ieder priemideaal van B is maximaal, dus $\bigcap_{p \subset B} p = I$. Elk tweetal priemmachten van twee verschillende priemen is copriem, en de Chinese reststelling stelt dat het natuurlijke K-morfisme $B \to \prod_p B/p^k$ een surjectie is met kern $I^k = 0$. De afbeelding is dus een isomorfisme. Het aantal priemidealen van B moet eindig zijn, en voor elke $p \subset B$ priem is B/p^k lokaal met nilpotent maximaal ideaal $p \bmod p^k$. □

• Separabiliteit

In deze sectie gebruiken we tensorproducten. Lezers die tensorproducten niet kennen raden we aan eerst appendix A te lezen. De meeste stellingen uit appendix A zullen we gebruiken.

Zij B een eindig-dimensionale K-algebra, en $\overline{K}$ een vaste algebraïsche afsluiting van K. Door de scalairen van B uit te breiden naar $\overline{K}$ verkrijgen we een eindig-dimensionale $\overline{K}$-algebra $\overline{B} := \overline{K} \otimes_K B$, waarop we volgende propositie kunnen toepassen:

Propositie 1.3 *Stel C is een eindig-dimensionale $\overline{K}$-algebra, dan is het $\overline{K}$-morfisme $\varphi\colon C \to \prod_{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\overline{K}}(C, \overline{K})} \overline{K}$ met $c \mapsto (\varphi \mapsto \varphi c)$ een surjectie met kern $\mathrm{nil}(C)$.*

Bewijs De kernen van de $\overline{K}$-morfismen $f \in \mathrm{Hom}_{\overline{K}}(C, \overline{K})$ zijn maximale idealen, en de lichaamsuitbreiding $\overline{K} \to C/\ker(f)$ is eindig, dus van graad 1. Alle $\overline{K}$-morfismen $C \to \overline{K}$ zijn dus gegeven door quotiëntafbeeldingen $C \to C/p$ met $p \subset C$ maximaal. Wegens stelling 1.2 zijn er slechts eindig veel priemen $p \subset C$, en wegens de Chinese reststelling is Φ een surjectie met kern $\bigcap_{p \subset C} p = \mathrm{nil}(C)$. □

Gevolg 1.4 *Zij B een eindig-dimensionale K-algebra, en $\overline{B} = \overline{K} \otimes_K B$. Het $\overline{K}$-morfisme $\Phi\colon \overline{B} \to \prod_{\varphi \in \mathrm{Hom}_K(B, \overline{K})} \overline{K}$ met $\lambda \otimes_K b \mapsto (\varphi \mapsto \lambda \cdot \varphi(b))$ is een surjectie met kern $\mathrm{nil}(\overline{B})$.*

Bewijs We gebruiken de universele eigenschap van het tensorproduct $\overline{K} \otimes_K B$. Beschouw het diagram:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "\varphi"] & \\ \overline{K} \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\mathrm{Id}_{\overline{K}}"'] & \overline{B} \arrow[dr, dotted, "\varphi'"] & \\ & & \overline{K} \end{tikzcd}$$

Wegens propositie A.6 wordt door ieder K-morfisme $\varphi: B \to \overline{K}$ een $\overline{K}$-morfisme $\varphi' = \varphi \otimes_K \mathrm{Id}_{\overline{K}}$ geïnduceerd zó dat het diagram commuteert. Andersom, als we een $\overline{K}$-morfisme $\overline{B} \to \overline{K}$ hebben dan verkrijgen we uit het diagram ook een K-morfisme $B \to \overline{K}$. De afbeelding $\mathrm{Hom}_K(B, \overline{K}) \to \mathrm{Hom}_{\overline{K}}(\overline{B}, \overline{K})$ met $\varphi \mapsto (\lambda \otimes_K b \mapsto \lambda \cdot \varphi(b))$ is een bijectie, en dus geldt $\Phi = \varphi$, waarbij $C = \overline{B}$ en φ is als in gevolg 1.3. □

Gevolg 1.5 *Stel B is een eindig dimensionale K-algebra, dan geldt de gelijkheid:* $\dim_K(B) = \#\mathrm{Hom}_K(B, \overline{K}) + \dim_{\overline{K}}(\mathrm{nil}(\overline{B}))$.

We zijn in het bijzonder geïnteresseerd in de K-algebra's waarvoor $\mathrm{nil}(\overline{B}) = 0$.

Een algebraïsche lichaamsuitbreiding $K \to L$ wordt separabel genoemd als van elk element $x \in L$ het minimumpolynoom over K een polynoom is met alleen enkelvoudige nulpunten in $\overline{K}$. Dit is precies hetzelfde als $\#\mathrm{Hom}_K(L, \overline{K}) = \dim_K(L)$ ingeval $K \to L$ eindig is (stelling 1.8 + 1.5), en door bovenstaande propositie is de uitbreiding $K \to L$ separabel dan en slechts dan als $\overline{K} \otimes_K L$ een gereduceerde ring is. We generaliseren deze eigenschap naar de definitie van separabiliteit van eindig-dimensionale K-algebra's:

Definitie 1.6 Een eindig-dimensionale K-algebra B noemen we *separabel* als de ring $\overline{B}$ gereduceerd is. Ofwel, als $\mathrm{nil}(\overline{B}) = 0$.

We gaan na dat definitie 1.6 overeenkomt met de definitie van separabiliteit van lichaamsuitbreidingen. Hiervoor hebben we eerst een lemma nodig.

Lemma 1.7 *Stel $K \to M \to L$ is een toren van eindige lichaamsuitbreidingen, waarbij we $\overline{M}$ en $\overline{K}$ identificeren. Veronderstel dat $\overline{K} \otimes_M L$ en $\overline{M} \otimes_K M$ gereduceerd zijn, dan is $\overline{K} \otimes_K L$ gereduceerd.*

Bewijs Er geldt: $\overline{K} \otimes_K L \cong \overline{K} \otimes_K M \otimes_M L \cong \overline{K}^{\dim_K(M)} \otimes_M L \cong (\overline{K} \otimes_M L)^{\dim_K(M)}$ (propositie A.9 + propositie A.11) en dus is $\overline{K} \otimes_K L$ gereduceerd. □

Stelling 1.8 *Zij $K \to L$ een algebraïsche lichaamsuitbreiding. Dan is $\overline{K} \otimes_K L$ gereduceerd dan en slechts dan als voor alle $x \in L$ het polynoom $f_K^x \in K[X]$ geen dubbele nulpunten heeft.*

bewijs ($\Rightarrow$) Voor alle $x \in L$ hebben we een inclusie $K(x) \to L$, en wegens propositie A.10 is de geïnduceerde afbeelding $\overline{K} \otimes_K K(x) \to \overline{K} \otimes_K L$ injectief. De surjectie $K[X] \to K(x)$ heeft kern (f_K^x), en wegens propositie A.10 is de geïnduceerde afbeelding $\overline{K} \otimes_K K[X] \to \overline{K} \otimes_K K(x)$ ook surjectief met kern $\overline{K} \otimes_K (f_K^x) = f_K^x \overline{K}[X]$, en dus $\overline{K} \otimes_K K(x) \cong \overline{K}[X]/(f_K^x)$. Het polynoom f_K^x ontbindt volledig in $\overline{K}[X]$, en uit de Chinese reststelling volgt:

$$\overline{K}[X]/(f_K^x) \cong \prod_{i=1}^{n} \overline{K}[X]/(X - \alpha_i)^{e_i},$$

voor zekere $n, e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ en onderling verschillende $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \overline{K}$. Als één van de exponenten e_i voor een zekere $x \in L$ groter is dan 1, dan heeft de ring $\overline{K}[X]/(f_K^x)$ een nilpotent element ongelijk 0 en de ring $\overline{K} \otimes_K L$ ook.

($\Leftarrow$) Zij $K \to L$ een algebraïsche lichaamsuitbreiding waarbij elk element $\ell \in L$ een minimumpolynoom over K heeft met alleen enkelvoudige nulpunten over $\overline{K}$. Stel $x \neq 0$ is een nilpotent element van $\overline{K} \otimes_K L$. Er geldt $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \otimes \ell_i$ voor zekere $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \overline{K}$ en $\ell_1, \ldots, \ell_n \in L$. Neem nu $L' = K(\ell_1, \ldots, \ell_n)$. Dan is er een injectie $L' \to L$, en wegens propositie A.10 een injectie $\overline{K} \otimes_K L' \to \overline{K} \otimes_K L$. Het element $x = \sum_i \lambda_i \otimes \ell_i \in \overline{K} \otimes_K L'$ is niet nul en nilpotent. We kunnen dus zonder verlies der algemeenheid aannemen dat de uitbreiding $K \to L$ eindig is.

Neem $\ell_1, \ldots, \ell_n \in L$ een verzameling voortbrengers van L over K. Dan wordt L verkregen uit de toren $K \to K(\ell_1) \to K(\ell_1, \ell_2) \to \cdots \to K(\ell_1, \ldots, \ell_n) = L$, met in elke stap enkelvoudige lichaamsuitbreidingen. Zij $M \to M(\ell_k)$ met $M = K(\ell_1, \ldots, \ell_{k-1})$ een stap uit bovenstaande toren. Dan geldt $M(\ell_k) \cong M[X]/(f_{\ell_k})$ met $f_{\ell_k} \in M[X]$ het minimpolynoom van ℓ_k over M. Dit polynoom is separabel want het is een deler van het minimumpolynoom van ℓ_k over K, en dus is $\overline{K} \otimes_K M(\ell_k) \cong \overline{K}[X]/(f_{\ell_k})$ gereduceerd. Met inductie volgt nu uit lemma 1.7 dat $\overline{K} \otimes_K L$ gereduceerd is. $\square$

Zij B een eindig dimensionale K-algebra en $b \in B$ een element. Beschouw het K-morfisme $\varphi: K[X] \to B$ met $X \mapsto b$. Omdat B eindig-dimensionaal is terwijl $K[X]$ oneindig-dimensionaal is, kan φ niet injectief zijn. De kern $\ker(\varphi) = (f)$ wordt voortgebracht door een zeker monisch polynoom $f \in K[X]$ van graad ≥ 1. Dit polynoom noemen we het *minimumpolynoom* van b over K. Separabiliteit van de algebra B in termen van minimumpolynomen is wegens de komende proposities compleet analoog aan de definitie die we al kennen voor lichaamsuitbreidingen.

Propositie 1.9 *Zij B een eindig-dimensionale K-algebra, en $\varphi: B \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{t} B_i$ de decompositie uit stelling 1.2. Dan is $\overline{B} = \overline{K} \otimes_K B$ separabel dan en slechts dan als $K \to B_i$ voor elke i een separabele lichaamsuitbreiding is.* [GTS, pagina 23]

Bewijs Er geldt $\overline{K} \otimes_K B \cong \overline{K} \otimes_K \prod_{i=1}^t B_i \cong \prod_{i=1}^t (\overline{K} \otimes_K B_i)$ (propositie A.9 en stelling 1.2). Elke term in het product is gereduceerd dan en slechts dan als het hele product gereduceerd is. Het is dus voldoende om te bewering te bewijzen voor lokale eindig-dimensionale K-algebra's B. De implicatie ($\Leftarrow$) is dan een direct gevolgt van stelling 1.8. Voor ($\Rightarrow$), beschouw de injectie $\overline{K} \otimes_K \mathrm{nil}(B) \to \overline{B}$ geïnduceerd door de inclusie $\mathrm{nil}(B) \hookrightarrow B$ (gevolg A.10). De elementen van $\overline{K} \otimes_K \mathrm{nil}(B)$ beelden af naar nilpotente elementen in $\overline{B}$ en dus $\overline{K} \otimes_K \mathrm{nil}(B) = 0$. Er geldt $0 = \dim_{\overline{K}}(\overline{K} \otimes_K \mathrm{nil}(B)) = \dim_K(\mathrm{nil}(B))$ (propositie A.9), en B is gereduceerd. Het maximale ideaal m van B is gelijk aan het nilradicaal van B (stelling 1.2), en dus geldt $m = 0$ en B is een lichaam. □

Propositie 1.10 *De K-algebra B is separabel dan en slechts dan als voor elk element $b \in B$ het polynoom $f_b \in K[X]$ een separabel polynoom is.*

Bewijs Zij $B \cong \prod_{i=1}^t B_i$ de decompositie van B uit stelling 1.2.
($\Rightarrow$) We passen propositie 1.9 toe. Zij $b \in \prod_{i=1}^t B_i$ een element. Laat b_i de projectie van b op de i-de coördinaat zijn. Het minimumpolynoom $f_{b_i} \in K[X]$ is separabel. De projectie $B \to B_i$ is een K-morfisme, en f_{b_i} deelt $f_b \in K[X]$, het minimumpolynoom van $b \in B$. Andersom, het polynoom $g = \mathrm{kgv}(f_{b_i} : i)$ heeft alle f_{b_i} als deler, en $g(b) = 0$ en dus $f_b = g$. Het kleinst gemene veelvoud van een collectie separabele polynomen is separabel en f_b is een separabel polynoom.
($\Leftarrow$) Elke B_i is een lichaamsuitbreiding van K, want nilpotente elementen $\neq 0$ hebben een inseparabel minimumpolynoom. Wegens stelling 1.8 en propositie 1.9 is B separabel. □

Definieer $K_s \subset \overline{K}$ als de verzameling van separabele elementen in $\overline{K}$ over K:

$$K_s \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \overline{K} | x \text{ is separabel over } K \right\}.$$

Propositie 1.11 *De deelverzameling $K_s \subset \overline{K}$ is een deellichaam, en een algebraïsche lichaamsuitbreiding $K_s \to L$ is separabel over K_s dan en slechts dan als $[L : K_s] = 1$.*

Bewijs Zijn $\alpha, \beta \in K_s$ twee elementen, dan verkrijgen we uit de universele eigenschap van het tensorproduct $K(\alpha) \otimes_K K(\beta)$ een surjectief K-morfisme $\varphi\colon K(\alpha) \otimes_K K(\beta) \to K(\alpha, \beta)$, en ook een surjectie $\mathrm{Id}_{\overline{K}} \otimes_K \varphi\colon \overline{K} \otimes_K (K(\alpha) \otimes_K K(\beta)) \to \overline{K} \otimes_K K(\alpha, \beta)$ (propositie A.10). Wegens proposities A.9 en A.11 geldt $\overline{K} \otimes_K (K(\alpha) \otimes_K K(\beta)) \cong \overline{K}^{\deg(\alpha)\cdot\deg(\beta)}$, en dus is $\overline{K} \otimes_K K(\alpha, \beta)$ isomorf met een quotiënt van $\overline{K}^{\deg(\alpha)\cdot\deg(\beta)}$ en gereduceerd. Voor elk tweetal elementen $\alpha, \beta \in K_s$ is het lichaam $K(\alpha, \beta)$ een deelverzameling van K_s, en K_s is een deellichaam van $\overline{K}$.

Zij $K_s \to L$ een separabele algebraïsche uitbreiding. Zij $\alpha \in L$, en M het deellichaam voortgebracht door de coëfficienten van het minimumpolynoom van α over K_s. Dan is de toren $K \to M \to M(\alpha)$ separabel, en wegens lemma 1.7: $\alpha \in K_s$. □

Stel C is een K_s-algebra, en beschouw de afbeelding $\Phi\colon C \to \prod_{\varphi:\mathrm{Hom}_{K_s}(C,\overline{K})} \overline{K}$ met $c \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(c))$ uit stelling 1.3. De kern van deze afbeelding is het nilradicaal van C, en het beeld is gegeven door $K_s^{\dim_{K_s}(C)} \subset \overline{K}^{\dim_{K_s}(C)}$ dan en slechts dan als C separabel is (propositie 1.9 + propositie 1.11). In dat geval geldt $\mathrm{nil}(C) = 0$, en de afbeelding Φ is een isomorfisme op $K_s^{\dim_{K_s}(C)}$.

Een K-algebra B kunnen we uitbreiden naar een K_s-algebra via uitbreiding van scalairen (definitie A.6): $B_s := K_s \otimes_K B$. Op deze algebra kunnen we bovenstaande observatie toepassen: B_s is separabel dan en slechts dan als Φ een isomorfisme is. De K-morfismen $\varphi\colon B \to K_s$ gaan bijectief naar de K_s-morfismen $B_s \to K_s$ door $\varphi \mapsto (\lambda \otimes b \mapsto \lambda \cdot \varphi(b))$, en we concluderen met de stelling:

Stelling 1.12 *Een K-algebra B is separabel dan en slechts dan als $\Phi\colon K_s \otimes_K B \to K_s^{\dim_K(B)}$ met $\lambda \otimes b \mapsto (\varphi \mapsto \lambda \cdot \varphi(b))$ een isomorfisme van K_s-algebra's is.* [GTS, pagina 23]

Samenvatting *Een eindig-dimensionale K-algebra B is separabel dan en slechts dan als de algebra één van de volgende equivalente eigenschappen heeft:*

- $\overline{B} = \overline{K} \otimes_K B$ *is gereduceerd (per definitie);*
- $\dim_K(B) = \#\mathrm{Hom}_K(B, \overline{K})$;
- *Alle minimumpolynomen $f_b \in K[X]$ voor $b \in B$ zijn separabel;*
- B_s *en* $K_s^{\dim_K(B)}$ *zijn isomorf als K_s algebra's;*
- $\overline{B}$ *is gereduceerd;*
- $\overline{B}$ *en* $\overline{K}^{\dim_K(B)}$ *zijn isomorf als $\overline{K}$ algebra's;*
- B *is een eindig product van eindig-dimensionale separabele lichaamsuitbreidingen van K.*

Hoofdstuk 2:

Galoistheorie voor eindig-dimensionale algebra's

Zij K een lichaam, $\overline{K}$ een vaste algebraïsche afsluiting van K en $K_s \subset \overline{K}$ de separabele afsluiting van K binnen $\overline{K}$ (zie propositie 1.11). De groep $\pi_K := \mathrm{Aut}_K(K_s)$ van K-automorfismen van K_s heeft een topologie via de inclusie $\pi_K \subset K_s^{K_s}$, waarbij K_s de discrete topologie heeft en $K_s^{K_s}$ de producttopologie. Samen met deze topologie is π_K een topologische groep en wordt de *absolute Galoisgroep* van K genoemd (zie [Alg. III, §28]). Ingeval er geen verwarring over het lichaam K bestaat laten we deze weg uit de notatie, en noteren we $\pi := \pi_K$.

Propositie 2.1 *De groep π is compact en totaal onsamenhangend*[1].

[Alg III, §28, lemma 28.4]

Bewijs De productruimte $K_s^{K_s}$ is totaal onsamenhangend, en π als deelruimte ook. Om te bewijzen dat π compact is hebben we de stelling van Tychonoff nodig (zie [Top 1]). Beschouw de inclusie $\pi \subset K_s^{K_s}$. Een K-morfisme $f\colon K_s \to K_s$ is injectief, en surjectief omdat K_s een separabele uitbreiding is van het beeld $f[K_s]$ (propositie 1.11). Dit betekent dat een afbeelding $f\colon K_s \to K_s$ niet in π ligt in één van de volgende gevallen: (1) $f(x+y) \neq f(x)+f(y)$ voor zekere $x, y \in K_s$, (2) $f(x \cdot y) \neq f(x) \cdot f(y)$ voor zekere $x, y \in K_s$ of (3) $f(k) \neq k$ voor zekere $k \in K$. De verzamelingen $\{g\colon K_s \to K_s | g(x+y) \neq g(x) + g(y)\}$, $\{g\colon K_s \to K_s | g(x \cdot y) \neq g(x) \cdot g(y)\}$ en $\{g\colon K_s \to K_s | g(k) \neq k)\}$ zijn in de gevallen (1), (2) respectievelijk (3) open omgevingen van f binnen $K_s^{K_s}$ die disjunct zijn van $\pi \subset K_s$. De verzameling π is dus een gesloten deelverzameling van $K_s^{K_s}$.

Als we nu een compacte $T \subset K_s^{K_s}$ kunnen vinden die π omvat, dan zijn we klaar want π is gesloten in T en dus compact. Definieer $\alpha_x \subset K_s$ voor $x \in K_s$ als de (eindige) verzameling geconjugeerden van x, en neem $T = \{f \in K_s^{K_s} : \forall x f(x) \in \alpha_x\}$. Dan geldt duidelijk $\pi \subset T$, en T is compact wegens de stelling van Tychonoff. $\square$

In de volgende twee hoofdstukken bestuderen we de continue acties van π op topologische ruimten. Om dit te kunnen, hebben we een aantal algemene eigenschappen van continue acties van topologische groepen nodig.

---

[1] *Een compacte topologische ruimte X is totaal onsamenhangend dan en slechts dan als voor elk tweetal punten $x, y \in X$ een open en gesloten $T \subset X$ bestaat met $x \in T$ en $y \in T^c$*

Definitie 2.2 Zij G een topologische groep. Een topologische ruimte E met een continue werking $G \times E \to E$ noemen we een *G-ruimte.* Een *morfisme van G-ruimten* $f\colon E \to E'$ is een continue afbeelding die compatibel is met de twee werkingen $G \times E \to E$ en $G \times E' \to E'$, ofwel: $\forall g \in G \, \forall e \in E : f(g \cdot e) = g \cdot f(e)$. Ingeval E een verzameling is voorzien van de discrete topologie, dan spreken we over een *G-verzameling.*

In dit hoofdstuk bekijken we enkel de categorie van G-verzamelingen, en later in hoofdstuk 3 bekijken G-ruimten. Hierom zijn een aantal lemma's die we bewijzen soms algemener dan we nu nodig hebben.

Lemma 2.3 *In een compacte topologische groep G is een gesloten ondergroep H open dan en slechts dan als $[\pi : H] < \infty$.*

Bewijs ($\Rightarrow$) De nevenklassen van H in G vormen een disjuncte open overdekking van G, deze overdekking moet eindig zijn want π is compact.
($\Leftarrow$) Als de index $[G : H]$ eindig is, dan is het complement van $H \subset \pi$ een eindige vereniging van nevenklassen van H, en dus gesloten. □

Lemma 2.4 *Stel E is discreet, dan is de werking $\eta\colon G \times E \to E$ continu dan en slechts dan als voor elk punt $e \in E$ de stabilisator $\pi_e := \{\sigma \in \pi | \sigma \cdot e = e\}$ open is.* [GTS, opgave 1.19]

Bewijs ($\Rightarrow$) De afbeelding $\eta_e\colon G \to E$ gegeven door $\sigma \mapsto \sigma \cdot e$ is continu, en $\eta_e^{-1}(\{e\}) = G_e$ is open in G.
($\Leftarrow$) Zij $e \in E$ een punt. Dan is

$$\eta^{-1}(e) = \{(\sigma, e') \in G \times E | \sigma e' = e\} = \bigcup_{(\sigma,e') \in \eta^{-1}(e)} (\sigma \cdot G_{e'}) \times \{e'\},$$

een open overdekking van het inverse beeld $\eta^{-1}(e)$. □

Gevolg 2.5 *Stel E is een G-verzameling en de G-banen $G \cdot e = \{\sigma \cdot e | \sigma \in G\}$ voor $e \in E$ zijn eindig. Dan is de werking $\eta\colon G \times E \to E$ continu dan en slechts dan als stabilisatoren van punten gesloten zijn in π.*

Lemma 2.6 *Laat E compacte G-ruimte zijn, en E' een Hausdorff G-ruimte. Stel $f\colon E \to E'$ is een bijectief G-morfisme. Dan is f een isomorfisme.*

Bewijs De afbeelding f is gesloten, want het continue beeld van gesloten is compact, en compact is gesloten in een Hausdorffruimte. De afbeelding f is dus een homeomorfisme. Zij $e' \in E'$, en $g \in G$, dan geldt $e' = f(e)$ voor zekere $e \in E$, en dus:

$$f^{-1}(g \cdot e') = f^{-1}(g \cdot f(e)) = f^{-1}(f(g \cdot e)) = g \cdot e = g \cdot f^{-1}(e'),$$

en f^{-1} is G-equivariant. □

Als $\{E_i\}_I$ een collectie G-ruimten is, dan is de disjuncte vereniging $\coprod_{i\in I} E_i$ met de natuurlijke werking de *som* of het *coproduct* van $\{E_i\}_I$ in de categorie van G-ruimten. Het product $\prod_{i\in I} E_i$, is de productruimte met de productwerking: $(\sigma,(i \mapsto e_i)) \mapsto (i \mapsto \sigma(e_i)$. Ingeval $\{E_i\}_I$ een collectie G-verzamelingen is, dan zijn product en som ook G-verzamelingen. Bovendien is elke G-verzameling E (als G-verzameling) isomorf met de som $\coprod_{i\in I} E_i$ van alle G-*banen* E_i in E.

• Fundamentele functoren

In hoofdstuk 1 hebben we de categorie $\mathcal{A}$ van separabele eindig-dimensionale K-algebra's beschreven, en in het vorige hoofdstuk de categorie $\mathcal{V}$ van eindige π-verzamelingen. We zullen een anti-equivalentie van categorieën tussen deze twee aangeven (stelling 2.10). Zo'n anti-equivalentie bestaat uit een paar contravariante functoren $A\colon \mathcal{V} \to \mathcal{A}$ en $V\colon \mathcal{A} \to \mathcal{V}$, de *fundamentele functoren* genaamd. Dit zijn functoren zó dat de samengestelde functoren $A \circ V\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ en $V \circ A\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ als functoren isomorf zijn met de identiteitsfunctoren $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ en $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Dit betekent dat voor ieder object $B \in \mathcal{A}$ er een isomorfisme $\theta_B\colon B \to A(V(B))$ bestaat zó dat voor ieder morfisme $B \to B'$ in $\mathcal{A}$ het diagram

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "\theta_B"] & B' \arrow[d, "\theta_{B'}"] \\ A(V(B)) \arrow[r] & A(V(B')), \end{tikzcd}$$

commuteert, en voor ieder object $E \in \mathcal{V}$ een isomorfisme $\eta_E\colon E \to V(A(E))$ zó dat voor ieder morfisme $E \to E'$ in $\mathcal{V}$ het diagram

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d, "\eta_E"] & E' \arrow[d, "\theta_{E'}"] \\ A(V(E)) \arrow[r] & A(V(E')), \end{tikzcd}$$

commuteert. In deze sectie definiëren we A en V.

De functor V. Zij $B \in \mathcal{A}$ een eindig-dimensionale en separabele K-algebra. We definiëren $V(B) = \mathrm{Hom}_K(B, K_s)$. De verzameling $V(B)$ is een π-verzameling door samenstelling

$$\begin{aligned} \tau\colon \pi \times V(B) &\longrightarrow V(B) \\ (\sigma, f) &\longmapsto \sigma \circ f. \end{aligned}$$

Voor een K-morfisme $g\colon B \to B'$ definieren we $V(g)$ als:

$$\begin{aligned} V(g)\colon V(B') &\longrightarrow V(B) \\ f &\longmapsto f \circ g. \end{aligned}$$

Propositie 2.7 *De toekenning V is een contravariante functor $\mathcal{A} \to \mathcal{V}$. (Met andere woorden: (1) De verzameling $V(B)$ samen met de werking τ is een object in $\mathcal{V}$; (2) voor elk morfisme $f: B' \to B'$ in $\mathcal{A}$ is $V(f): V(B') \to V(B)$ een morfisme van π-verzamelingen; en (3) V respecteert de eenheid en samenstelling van morfismen.)*

Bewijs De cardinaliteit van $V(B)$ is gelijk aande dimensie $\dim_K(B)$ (gevolg 1.5) en is eindig. Zij $f \in V(B)$ een punt, dan geldt $\pi_f = \mathrm{Aut}_{f[B]}(K_s)$ en $\mathrm{Aut}_{f[B]}(K_s) = \pi_{f[B]} \subset \pi$ is compact (stelling 2.1) en gesloten, want π is Hausdorff. Wegens gevolg 2.5 is de werking τ continu.

Zij nu $g: B \to B'$ een K-morfisme. Dan geldt:

$$V(g)(\sigma f) = (\sigma f) \circ g = \sigma \circ f \circ g = \sigma(f \circ g) = \sigma V(g)(f),$$

voor alle $\sigma \in \pi$ en $f \in V(B')$, en $V(g)$ is een morfisme van π-verzamelingen. De toekenning V stuurt samenstellingen naar samenstellingen $V(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$, en V is contravariante functor. $\square$

De functor A. Voor we de functor A kunnen definiëren hebben we eerst een lemma nodig.

Lemma 2.8 *De verzameling K_s voorzien van de discrete topologie is een π-verzameling onder de automorfismewerking.*

Bewijs De π-baan van een element $x \in K_s$ is eindig, en de stabilisator π_x wordt gegeven door $\mathrm{Aut}_{K(x)}(K_s) = \pi_{K(x)}$ en is compact en dus gesloten. Wegens lemma 2.5 is K_s een π-verzameling. $\square$

Als $E \in \mathcal{V}$ een object is, dan is de verzameling $\mathrm{Hom}_\pi(E, K_s)$ een K-algebra onder de puntsgewijze algebrastructuur:

$$\begin{aligned} (f+g)(e) &\stackrel{\text{def}}{=} f(e) + g(e); \\ (fg)(e) &\stackrel{\text{def}}{=} f(e)g(e); \\ (k \cdot g)(e) &\stackrel{\text{def}}{=} k \cdot g(e); \\ 1(e) &\stackrel{\text{def}}{=} 1, \end{aligned}$$

voor alle $f, g \in \mathrm{Hom}_\pi(E, K_s)$, $k \in K$ en $e \in E$. We definiëren nu $A(E)$ als $\mathrm{Hom}_\pi(E, K_s)$ samen met bovenstaande K-algebrastructuur. Voor een morfisme $f: E \to E'$ in $\mathcal{V}$ definieren we $A(f)$ als:

$$\begin{aligned} A(f): A(E') &\longrightarrow A(E) \\ g &\longmapsto g \circ f. \end{aligned}$$

Propositie 2.9 *De toekenning $A: \mathcal{V} \to \mathcal{A}$ is een contravariante functor.*

Bewijs We laten zien dat A een eindige π-verzameling daadwerkelijk stuurt naar een eindig-dimensionale separabele K-algebra. De afbeelding $A(E) \to \prod_{e \in E} K_s^{\pi_e}$ met $f \mapsto (e \mapsto f(e))$ is een injectief K-algebramorfisme. Het lichaam $L_e := K_s^{\pi_e}$ is voor alle $e \in E$ separabel, en als het lichaam ook eindig-dimensionaal is, dan zijn we klaar. De actie van π op $\mathrm{Hom}_K(L_e, K_s)$ is transitief, en $\mathrm{Aut}_{L_e}(K_s)$ is de stabilisator van de inclusie $L_e \to K_s$. Het is niet duidelijk dat $\mathrm{Aut}_{L_e}(K_s) = \pi_e$, maar wel dat $\pi_e \subset \mathrm{Aut}_{L_e}(K_s)$. Omdat $\pi_e \subset \pi$ open is, heeft de ondergroep eindige index en $\mathrm{Aut}_{L_e}(K_s)$ ook. De verzameling $\mathrm{Hom}_K(L_e, K_s)$ is dus eindig, en $\dim_K(L_e) = \#\mathrm{Hom}_K(L_e, K_s)$ is ook eindig.

Zij $f \colon E \to E'$ een morfisme in $\mathcal{V}$. Er geldt:

$$\begin{aligned}
(A(f)(1))(e') &= (1 \circ f)(e') = 1;\\
(A(f)(g+h))(e') &= (g \circ f)(e') + (h \circ f)(e') = (A(f)(g))(e') + (A(f)(h)))(e');\\
(A(f)(g \cdot h))(e') &= (g \circ f)(e') \cdot (h \circ f)(e') = (A(f)(g))(e') \cdot (A(f)(h)))(e');\\
(A(f)(k \cdot g))(e') &= ((k \cdot g) \circ f)(e') = k \cdot (A(f)(g))(e'),
\end{aligned}$$

voor alle $e' \in E'$, $f, g \in A(E')$ en $k \in K$, en $A(f) \colon A(E') \to A(E)$ is een K-algebramorfisme.

De toekenning A respecteert samenstellingen van morfismen en $A(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$, en A is een contravariante functor. $\square$

• Hoofdstelling

Stelling 2.10 *Het paar functoren*

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{r} \text{eindig} - \text{dimensionale} \\ \text{separabele } K\text{-algebra's} \end{array} \right\} \underset{A}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{r} \text{eindige } \pi\text{-verzameling} \\ \text{met continue actie} \end{array} \right\} = \mathcal{V}$$

$$\begin{array}{ccc} B & \longmapsto & \mathrm{Hom}_K(B, K_s) \\ \mathrm{Hom}_\pi(E, K_s) & \longleftarrow\!\!\shortmid & E, \end{array}$$

beschreven in de vorige sectie, is een anti-equivalentie van categorieën. [GTS, stelling 2.9]

Bewijs Definieer voor ieder object $B \in \mathcal{A}$ de afbeelding θ_B als:

$$\begin{aligned}
\theta_B \colon B &\longrightarrow A(V(B)) = \mathrm{Hom}_\pi(\mathrm{Hom}_K(B, K_s), K_s)\\
b &\longmapsto (f \mapsto f(b)),
\end{aligned}$$

en analoog voor ieder object $E \in \mathcal{V}$ de afbeelding η_E als:

$$\begin{aligned}
\eta_E \colon E &\longrightarrow V(A(E)) = \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_\pi(E, K_s), K_s)\\
e &\longmapsto (f \mapsto f(e)).
\end{aligned}$$

In het vervolg van het bewijs laten we zien dat η_E en θ_B aan alle eisen van een equivalentie van categorieën voldoen (zie de vorige sectie, 'Fundamentele functoren'). We beginnen met de eenvoudige. Laat $f\colon B \to B'$ en $f'\colon E \to E'$ twee morfismen zijn. We moeten nagaan na dat de diagrammen

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta_B"'] & B' \arrow[d, "\theta_{B'}"] \\ A(V(B)) \arrow[r, "A(V(f))"'] & A(V(B')) \end{tikzcd} \quad \text{en} \quad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\eta_E"'] & E' \arrow[d, "\eta_{E'}"] \\ A(V(E)) \arrow[r, "A(V(f'))"'] & A(V(E')) \end{tikzcd}$$

commuteren. Zij $b \in B$ een element, dan geldt:

$$\begin{aligned}[A(V(f))](\theta_B)(b)) &= A(V(f))(g \mapsto g(b)) = [k \mapsto k \circ (h \mapsto h \circ f)](h \mapsto h((b)) \\ &= (h \mapsto h(f(b)) = \theta_{B'}(f(b)),\end{aligned}$$

en het linker diagram commuteert. Het bewijs dat het rechter diagram commuteert is analoog. In het vervolg van deze paragraaf gaan we na dat η_E en θ_B isomorfismen zijn.

We beginnen met θ_B, hiervoor hebben we twee lemma's nodig.

Lemma 2.11 *Het invariantenlichaam $K_s^{\pi_K}$ is voor elk lichaam K gelijk aan K.*

Bewijs Het is duidelijk dat $K \subset K_s^{\pi_K}$. We bewijzen de andere inclusie. Zij $f \in K[X]$ een irreducibel separabel polynoom, en $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K_s$ de nulpunten van $f \in K_s[X]$. Voor elke i is er de afbeelding $\varphi_i\colon K[X]/(f) \to K_s$ met $X \mapsto \alpha_i$, en K-isomorfismen $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\colon K(\alpha_i) \to K(\alpha_j)$ voor alle paren $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Een algebraïsche afsluiting van $\overline{K(\alpha_j)}$ is ook een algebraïsche afsluiting van $K(\alpha_i)$, en we verkrijgen een $\sigma_{i,j} \in \pi$ zó dat het diagram

$$\begin{tikzcd} \overline{K} \arrow[r, "\sigma_{i,j}"] & \overline{K(\alpha_j)} \\ K(\alpha_i) \arrow[u] \arrow[r, "\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}"] & K(\alpha_j) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

commuteert. Als $\alpha \in K_s$ graad minstens twee heeft, dan is er dus een $\sigma \in \pi$ met $\sigma\alpha \neq \alpha$, en $K_s^\pi = K$. $\square$

Lemma 2.12 *Zij B een K-algebra, en M een K-vectorruimte waarop een eindige groep G werkt. Dan is de afbeelding $B \otimes_K (M^G) \to (B \otimes_K M)^G$, $b \otimes m \mapsto b \otimes m$ een isomorfisme van K-vectorruimten.*

Bewijs De rij $0 \to M^G \to M \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{g \in G} M$ met φ gegeven door $m \mapsto (g \mapsto (gm - m)$ is exact. Wegens de proposities A.5 en A.9 is de geïnduceerde rij $0 \to B \otimes_K M^G \to B \otimes_K M \to \bigoplus_{g \in G} B \otimes_K M$ ook exact, waarin de laatste afbeelding φ' gegeven wordt door $a \otimes_K m \mapsto (g \mapsto g(a \otimes_K m) - a \otimes_K m)$. De kern van φ' is gelijk aan $(B \otimes_K M)^G$, en dus $(B \otimes_K M)^G$ is isomorf met $B \otimes_K (M^G)$ door de afbeelding $b \otimes m \mapsto b \otimes m$. $\square$

Propositie 2.13 *De afbeelding $\theta_B\colon B \to A(V(B))$ is een isomorfisme.*

Bewijs Het K_s-morfisme $\Phi\colon K_s \otimes_K B \to \prod_{\varphi\in V(B)} K_s$ met $\lambda \otimes_K b \mapsto (\varphi \mapsto \lambda(\varphi b))$ is een isomorfisme van K_s-algebra's wegens propositie 1.12. De groep π werkt op $K_s \otimes_K B$ door $\varphi(\lambda \otimes_K b) = \varphi(\lambda) \otimes_K b$, voor $\sigma \in \pi$. Via Φ werkt π op $\prod_{\varphi\in V(B)} K_s$ door $\sigma \cdot (\ell_\varphi)_\varphi = (\sigma(\ell_\varphi))_{\sigma\varphi}$ voor alle $(\ell_\varphi) \in \prod_{\varphi\in V(B)} K_s$ en $\sigma \in \pi$, want:

$$\sigma \cdot (\lambda\varphi(b))_\varphi = (\sigma(\lambda)\varphi(b))_\varphi = (\sigma(\lambda\sigma^{-1}\varphi(b)))_\varphi = (\sigma(\lambda\varphi(b)))_{\sigma\varphi},$$

voor alle $\lambda \in K_s$, en $b \in B$. Wegens de lemma's 2.11, 2.12 en propositie A.8 is de afbeelding $B \to (K_s \otimes_K B)^\pi$, $b \mapsto 1 \otimes_K b$ een isomorfisme van K-algebra's. Door π-invarianten te nemen we vinden we de samenstelling van isomorfismen $B \xrightarrow{\sim} (K_s \otimes_K B)^\pi \xrightarrow{\sim} (\prod_{\varphi\in V(B)} K_s)^\pi$, gegeven door $b \mapsto (\varphi \mapsto \varphi b)$. Als we vervolgens $(\prod_{\varphi\in V(B)} K_s)^\pi$ identificeren met $A(V(B))$ door $(\ell_\varphi)_\varphi \mapsto (\varphi \mapsto \ell_\varphi)$ vinden we precies de afbeelding θ_B terug, en dus is θ_B een isomorfisme. □

We bewijzen dat η_E een isomorfisme is. Met de volgende lemma's kunnen we dit afleiden uit propositie 2.13.

Lemma 2.14 *Voor elke $H \subset \pi$ open is er een eindige uitbreiding $K \subset L \subset K_s$ zó dat $\mathrm{Aut}_L(K_s) \subset H$ en $\sigma L = L$ voor alle $\sigma \in \pi$.*

Bewijs Neem $N = \bigcap_{\sigma\in\pi} \sigma H \sigma^{-1} \subset \pi$, de grootste normaaldeler van G bevat in H. Voor alle $\sigma \in \pi$ zijn er eindig veel linkernevenklassen σH van H en eindig veel rechternevenklassen van σH in π. De doorsnede $\bigcap_{\sigma\in\pi} \sigma H \sigma^{-1} \subset \pi$ is dus een eindige doorsnede van open verzamelingen en dus open. Neem $O = \left(\prod_{x\in K_s} O_x\right) \cap \pi \subset N$ een open omgeving van $\mathrm{Id}_{K_s} \in \pi$ met $O_x \neq K_s$ alleen voor x in een zekere eindige verzameling $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K_s$. Neem $L \subset K_s$ het deellichaam voortgebracht door de elementen σx voor $\sigma \in \pi$ en $x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dan is L eindig dimensionaal over K en $\sigma L = L$ voor alle $\sigma \in \pi$. Als $\sigma \in \mathrm{Aut}_L(K_s)$ dan $\sigma \in O$ en dus $\sigma \in H$. □

Lemma 2.15 *Voor elke $H \subset \pi$ open is er een element $x \in K_s$ zó dat $\pi_x = H$.*

Bewijs We bewijzen de bewering eerst voor $|K| = \infty$. Neem L zoals in bovenstaand lemma, en $G = \pi/\mathrm{Aut}_L(K_s)$. De groep G is een eindige groep die werkt op L, en de kern $\bigcap_{x\in L} G_x$ van de werking is triviaal. Voor elke ondergroep $S \neq 1$ van G geldt dus $L^S \neq L$, en:

$$\bigcup_{1\neq S\subset G,\text{ondergroep}} L^S \neq L,$$

want L is niet een eindige vereniging van strikte deelruimten van L (L is oneindig). Zij $x \in L$ een element buiten deze deelruimten. Dan is x een element met $G_x = 1$, en de werking van G op $G \cdot x$ is trouw en transitief. Schrijf $H \cdot x = \{x_1, \ldots, x_d\} \subset L$, met de x_i verschillend, en $a_0, \ldots, a_{d-1}$ voor de coëfficienten van het polynoom $f = (T - x_1)(T - x_2) \cdots (T - x_d) =$

$X^d - a_{d-1}X^{d-1} + \cdots (-1)^d a_0 \in L[T]$. De groep G werkt op de polynoomring $L[T]$ door te definiëren: $g \cdot T = T$ voor alle $g \in G$, en door de werking van G op L additief en multiplicatief voort te zetten. Omdat de werking van G trouw en transitief is, is H precies de stabilisator van het polynoom f, ofwel, H is de stabilisator van het element $a := (a_0, \ldots, a_{d-1}) \in L^d$.

Als er een element $k = (k_0, \ldots, k_{d-1}) \in K^d$ is zó dat het π-morfisme $p_k\colon L^d \to L$ met $(y_0, \ldots, y_{d-1}) \mapsto k_0 y_0 + \cdots + k_{d-1} y_{d-1}$ injectief is op $G \cdot a$, dan is het beeldpunt van a in $L \subset K_s$ een element met stabilisator H, en zijn we klaar.

De verzameling $G \cdot a = \{g_1, \ldots, g_n\} \subset L^d$ is eindig. Als p_k niet injectief is op $G \cdot a$, dan is k een element van één van de $d-1$-dimensionale deelruimten $\{k \in K^d : p_k(g_i) = p_k(g_j)\} \subset K^d$ voor $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ met $i \neq j$. De oneindige vectorruimte K^d is niet een eindige vereniging van $d-1$-dimensionale deelruimten, en dus bestaat er een $k \in K^d$ zó dat p_k injectief is op $G \cdot a$.

Voor $|K| < \infty$ bewijzen we de stelling met behulp van de stelling van het primitieve element, welke voor eindige lichamen eenvoudig te bewijzen is. Dus stel $K \to L$ is een eindige uitbreiding van eindige lichamen. Beschouw het polynoom $f = X^{\#L^*} - 1 \in L[X]$. De orde van elk element van L^* is een deler van $\#L^*$, en dus is elk element van L nulpunt van $f \cdot X \in L[X]$. Voor $d | \#L^*$ deelt het polynoom $X^d - 1 \in L[X]$ het polynoom f, en dus heeft $X^d - 1 \in L[X]$ precies d nulpunten. De ondergroepen in L^* van vaste orde $d | \#L^*$ bestaan en zijn uniek, en L^* is cyclisch. Een element $x \in L^*$ met $\langle x \rangle = L^*$ is zeker een voortbrenger van L over K als lichaam.

Zij $H \subset \pi$ open. Het lichaam $L = K_s^H$ is eindig-dimensionaal over K, en er is een $x \in L$ met $K(x) = L$. Schrijf $H \cdot x = \{x_1, \ldots, x_d\}$ met de x_i verschillend. Nu is H de stabilisator van het polynoom $f = \prod_{i=1}^d (T - x_i) \in L[T]$, en dus $H = \bigcap_{i=1}^d \pi_{a_i}$ waarbij $a_0, \ldots, a_d$ de coëfficienten van f zijn. Definieer $M = K(a_0, \ldots, a_d)$. We zien $H = \mathrm{Aut}_M(K_s)$, neem nu $a \in M$ zó dat $K(a) = M$, en dan volgt $H = \pi_a$. □

Propositie 2.16 *De afbeelding $\eta_E\colon E \to A(V(E))$ is voor alle eindige π-verzamelingen E een π-isomorfisme.*

Bewijs De verzameling E is een vereniging van π-banen: $E = \coprod_{i \in I} E_i$. Er geldt $V(A(E)) = \coprod_{i \in I} V(A(E_i))$, en $\eta_E = \coprod_{i \in I} \eta_{E_i}$. We kunnen zonder verlies der algemeenheid aannemen dat de werking $\pi \times E \to E$ transitief is. Zij $e_0 \in E$ een basispunt en $H = \pi_{e_0}$ de stabilisator van e_0, en $x \in K_s$ zó dat $H = \pi_x$ (lemma 2.15). Voor het deellichaam $B = K(x) \subset K_s$ geldt $E \cong V(B)$, en dus is $V(\theta_B)\colon V(A(V(B))) \to V(B)$ een isomorfisme wegens propositie 2.13. Zij $h \in V(B)$, dan geeft berekening:

$$V(\theta_B) \circ \eta_{V(B)}(h) = V(\theta_B)(\varphi \mapsto \varphi(h)) = (b \mapsto (f \mapsto f(b))(h)) = (b \mapsto h(b)) = h,$$

dus $V(\theta_B) \circ \eta_{V(B)} = \mathrm{Id}_{V(B)}$ en $\eta_{V(B)}$ is een isomorfisme. □

Opmerkingen 2.18 De functoren uit de anti-equivalentie van 2.10 sturen linker limieten naar rechter limieten, en omgekeerd. Zo corresponderen tensorproducten van algebra's in de categorie $\mathcal{A}$ via de functor V met eindige producten van π-verzamelingen in de categorie $\mathcal{V}$, en eindige productalgebra's in $\mathcal{A}$ met eindige disjuncte verenigingen in $\mathcal{V}$. Injecties en surjecties zijn ook duaal: als $f: B \to B'$ een injectie respectievelijk een surjectie is in $\mathcal{A}$, dan is $V(f)$ een surjectie respectievelijk injectie in $\mathcal{V}$, en dit geldt net zo voor morfismen in de categorie $\mathcal{V}$. In het volgende hoofdstuk passen we deze observaties toe op inductieve systemen van algebra's, en projectieve systemen van π-ruimten.

Hoofdstuk 3:
Algebraïsche algebra's

De eindige Galoistheorie kan worden veralgemeniseerd naar de zogenaamde *oneindige Galoistheorie*, hierin staat men oneindige Galoisuitbreidingen $K \subset L$ toe: algebraïsche lichaamsuitbreidingen die normaal en separabel zijn, maar niet noodzakelijk eindig-dimensionaal. Om deze stelling af te leiden, kan men proberen de bewering te reduceren naar eindige Galoistheorie; elk tussenlichaam $K \subset M \subset L$ is namelijk de vereniging (i.e. de inductieve limiet met inclusiemorfismen) van *eindig*-dimensionale tussenlichamen $K \subset M' \subset M$ en de corresponderende Galoisgroep $\mathrm{Aut}_K(M)$ is de projectieve limiet van de Galoisgroepen $\mathrm{Aut}_K(M')$. Voor een uiteenzetting van de oneindige Galoistheorie zie [Alg III, §28], [GTS], of [Topics].

In dit hoofdstuk passen we dezelfde strategie toe op de hoofdstelling (2.10). We nemen weer K een lichaam, $\overline{K}$ een vaste algebraïsche afsluiting van K, $K_s \subset \overline{K}$ de separabele afsluiting van K binnen $\overline{K}$ en $\pi := \mathrm{Aut}_K(K_s)$ de absolute Galoisgroep van K. We bekijken de *algebraïsche* K-algebra's. In analogie met de oneindige Galoistheorie definiëren we deze algebra's precies zó dat ze óók verenigingen zijn van hun eindig-dimensionale delen: de eindig-dimensionale K-deelalgebra's.

Definitie 3.1 Een K-algebra B is *algebraïsch* als voor elke $b \in B$ de afbeelding $K[X] \to B$ met $X \mapsto b$ niet injectief is. De monische voortbrenger van de kern van de afbeelding $K[X] \to B$ noemen we het *minimumpolynoom* van $b \in B$ over K. De algebra B is *separabel* als $\overline{B} := \overline{K} \otimes_K B$ gereduceerd is.

Propositie 3.2 *Een algebraïsche K-algebra B is separabel dan en slechts dan alle eindige K-deelalgebra's $B' \subset B$ separabel zijn.*

Bewijs ($\Rightarrow$) Stel $B' \subset B$ is een eindige K-deelalgebra. Wegens propositie A.10 is de afbeelding $\overline{B'} \to \overline{B}$ met $\lambda \otimes b \mapsto \lambda \otimes b$ injectief, en dus is $\overline{B'}$ gereduceerd.
($\Leftarrow$) Stel $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes x_i \in \overline{B}$ met $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \overline{K}$ en $b_1, \dots, b_n \in B$ is nilpotent. De K-algebra $B' \subset B$ voortgebracht door de elementen $x_1, \dots, x_n$ is eindig-dimensionaal en dus $\sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes x_i = 0 \in \overline{B'}$. Omdat de afbeelding $\overline{B'} \to \overline{B}$ met $\lambda \otimes b \mapsto \lambda \otimes b$ injectief is, volgt $x = 0$ en $\overline{B}$ is gereduceerd. $\square$

Gevolg 3.3 *Een algebraïsche K-algebra B is separabel dan en slechts dan voor alle $b \in B$ het minimumpolynoom $f_b \in K[X]$ een separabel polynoom is.*

Bewijs Pas proposities 1.9 en 3.2 toe. $\square$

Stelling 3.4 *Een K-algebra B is isomorf met een inductieve limiet van eindig-dimensionale K-algebra's dan en slechts dan als B algebraïsch is.*

Bewijs ($\Rightarrow$) Stel B is de inductieve limiet van een inductief systeem $F\colon I \to$ (e.d. K-algebra's). Zij $b \in B$, dan is er een zekere $i \in I$ en een zekere $b' \in F(i)$ zó dat b' afbeeldt op b onder de natuurlijke afbeelding $B_i \to B$. Het diagram

$$\begin{tikzcd} K[X] \arrow[rr, "X \mapsto b"] \arrow[dr, "X \mapsto b'"'] & & B \\ & F(i) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

commuteert, en dus is de afbeelding $K[X] \to B$ niet injectief.

($\Leftarrow$) We laten zien dat het systeem $F\colon I \to$ (K-algebra's) van eindig-dimensionale K-deel-algebra's in B een gericht systeem is. Zodra we dat bewezen hebben, bestaat de inductieve limiet van F en dan volgt de bewering direct uit de opmerking dat elke $x \in B$ bevat is in de kleinste K-deelalgebra B_x die x bevat; deze algebra is eindig-dimensionaal want $K[X] \to B_x$ met $X \mapsto x$ is surjectief, maar niet injectief. Laat $B_1, B_2 \subset B$ twee eindig-dimensionale K-algebra's zijn, en $B_3 \subset B$ de kleinste K-deelalgebra die B_1 en B_2 omvat. Het tensorproduct $B_1 \otimes_K B_2$ beeldt af naar B_3, en het beeld omvat de deelalgebra's B_1 en B_2. De afbeelding is dus surjectief. Omdat B_1 en B_2 eindig-dimensionaal zijn, is $B_1 \otimes_K B_2$ eindig-dimensionaal (propositie A.9), en de algebra B_3 is ook eindig-dimensionaal. □

• *G*-Ruimten

We herhalen de definitie uit Hoofdstuk 2. Zij G een topologische groep. Een topologische ruimte E en een continue werking $G \times E \to E$ noemen we een G-ruimte. Een *morfisme van G-ruimten* $f\colon E \to E'$ is een continue afbeelding die compatibel is met de twee werkingen $G \times E \to E$ en $G \times E' \to E'$, ofwel: $\forall \sigma \in G\, \forall e \in E : f(g \cdot e) = g \cdot f(e)$.

In hoofdstuk 2 hebben we gekeken naar discrete G-ruimten, en daarom spraken we over G-verzamelingen. We bekijken nu het geval dat E compact en totaal onsamenhangend is. We bewijzen dat een dergelijke ruimte isomorf is met een projectieve limiet van eindige G-verzamelingen. Voor we dit kunnen bewijzen hebben we eerst een aantal algemene feiten van topologische ruimten met continue groepsacties nodig.

Propositie 3.5 *Projectieve limieten bestaan in de categorie van G-ruimten.*

Bewijs Het bewijs van dit lemma is een recht-toe-recht-aan verificatie, en gebruikt dezelfde constructie voor projectieve limieten van topologische ruimten, verzamelingen, groepen en ringen. We geven een bewijsschets. Zij $F\colon I \to$ (G-ruimten) een projectief systeem. Definieer de verzameling

$$P = \left\{ f\colon I \to \coprod_{i\in I} F(i) | \forall g \in \mathrm{Hom}(i,j) : F(g)(f(j)) = f(i) \right\} \subset \prod_{i\in I} E_i,$$

met de werking $\eta\colon G\times P \to P$ gegeven door $(\sigma, f) \mapsto (i \mapsto \sigma f(i))$, en de natuurlijke surjecties $P \to E_i$. Door $\prod_{i\in I} E_i$ te voorzien van de producttopologie, en P van de geïnduceerde topologie is P een G-ruimte, en de projectieve limiet van F. □

Zij E een G-ruimte, dan werkt de groep G als een automorfismengroep op E: de groepswerking induceert een groepsmorfisme $G \to \mathrm{Aut}(E) = (\{f\colon E \to E | f \text{ homeomorfisme}\}, \circ)$. Een open verzameling $O \subset E$ gaat door linksvermenigvuldiging met g naar $g\cdot O = \{g\cdot e | e \in O\}$, en deze verzameling is weer open. De topologische groep G werkt dus als groep, behalve op E, ook op de topologie $\mathcal{T}(E) = \{U \subset E | U \text{ is open}\}$ van E.

Propositie 3.6 *Zij G een topologische groep en E een topologische ruimte met een continue werking $\eta\colon G\times E \to E$ en stel de projectie $p_G\colon G\times E \to E$ is een gesloten afbeelding. Zij $O \in \mathcal{T}(E)$ een open en gesloten verzameling, dan is de stabilisator $G_O \subset G$ onder de werking van G op $\mathcal{T}(E)$ open.*

Bewijs Definieer $A = \{g \in G | g\cdot O \subset O\}$, en $B = \{g\in G | g\cdot O \supset O\}$. Dan geldt $G_O = A\cap B$, en het volstaat te bewijzen dat A en B open zijn in G. Er geldt:

$$A^c = \{g \in G | \exists e \in O : g\cdot e \in O^c\} = p_G(\eta^{-1}(O^c) \cap p_E^{-1}(O)),$$

en $A \subset G$ is open. Er geldt $B = i(A)$, met $i\colon G \to G$ het inversiehomeomorfisme: $g \mapsto g^{-1}$. De ondergroep B is ook open, en $G_O \subset G$ is open. □

Zij G een compacte topologische groep, en zij E een compacte totaal onsamenhangende G-ruimte. Definieer I als de verzameling van partities van E in eindig veel open stukken die door G worden gepermuteerd, formeel:

$$I \overset{\text{def}}{=} \left\{ x \subset \mathcal{T}(E) | \coprod_{U\in x} U = E, \forall g \in G \forall U \in x : g\cdot U \in x \right\}.$$

De verzameling I is geordend door de relatie:

$$x \leq y \iff (\forall U \in y \exists V \in x : U \subset V),$$

en deze ordening is gericht, want $V^* \geq x, y$ als we $V = x \cup y$ nemen in het volgende lemma:

Lemma 3.7 *Stel $V = \{O_i\}_{i\in I}$ is een eindige collectie open verzamelingen die E overdekken, met voor alle $i \in I, g \in G : g\cdot O_i = O_j$ voor zekere $j \in I$. Voor $e \in E$, definieer $v_e = \bigcap_{O_i \ni e} O_i$,* *dan is* $V^* = \{v_e\}_{e \in E}$ *een eindige disjuncte collectie open verzamelingen die* E *overdekken, met ook voor alle* $e \in E$ *de eigenschap* $g \cdot v_e \in V^*$.

Bewijs De overdekking is wegens de constructie disjunct en eindig. Stel $g \cdot O_i = O_{i_g}$ voor $i \in I$, dan volgt $g \cdot \bigcap_{i \in F} O_i = \bigcap_{i \in F} O_{i_g}$, en $g \cdot v_e = v_{g \cdot e}$. □

Als $x \leq y$ voor twee elementen $x, y \in I$, dan hebben we een natuurlijke surjectie $\mu_{yx}: y \to x$ van G-ruimten: $e \bmod y \mapsto e \bmod x$. De toekenning $F(x) = x$ bij objecten $x \in I$, en bij ongelijkheden $x \leq y$ de morfismen μ_{yx} geeft een projectief systeem $F: I \to (G\text{-ruimten})$.

Stelling 3.8 *Zij* G *een compacte topologische groep, en zij* E *een compacte totaal onsamenhangende* G*-ruimte, dan is* E *isomorf met de projectieve limiet* P *van het systeem* F.

Bewijs De natuurlijke afbeeldingen $E \to x$ induceren een G-morfisme $\varphi: E \to P$. We bewijzen dat de afbeelding een isomorfisme van G-ruimten is. Om de notatie te vereenvoudigen beschouwen we P als deelverzameling van het product $\prod_{x \in I} x$. Als we dit gedaan hebben, wordt de afbeelding φ gegeven door: $e \mapsto (x \mapsto p_x(e))$, waarbij $p_x e = U \Leftrightarrow e \in U \in x$.

De verzameling $\varphi[E] \subset P$ is compact, dus gesloten in P. Zij $O \subset P$ open, en niet leeg. Volgt $O \supset P \cap \prod_{x \in I} O_x$ met $O_x = x$, tenzij x element is van een zekere eindige verzameling $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset I$. Laat $y \in I$ groter zijn dan alle x_i, $P \in O_y$ een niet-lege verzameling uit O_y zijn, en $p \in P$ een punt. Dan volgt $\varphi(p) \in O$, en $\mathrm{im}(\varphi)$ ligt dicht in P. Omdat de verzameling $\mathrm{im}(\varphi)$ ook gesloten is, is φ surjectief. Als φ ook injectief is, dan is φ een π-isomorfisme wegens lemma 2.6.

Laat $e, e' \in E$ twee verschillende punten zijn. Zij $T \subset E$ open en gesloten met $e \in T$ en $e' \in T^c$. Neem $H = G_T$, dan is $H \subset G$ open (lemma 3.6) want de projectieafbeelding $p_G: G \times E \to G$ is een afbeelding van een compacte ruimte naar een Hausdorff ruimte, en dus gesloten. De banen van T en T^c onder de werking van G op $\mathcal{T}(E)$ zijn eindig, want de ondergroep $H \subset G$ heeft eindige index (lemma 2.3). Laat $A \subset \mathcal{T}(E)$ en $B \subset \mathcal{T}(E)$ de H-baan van T respectievelijk de H-baan van T^c zijn. Dan is $A \cup B$ een eindige overdekking van E, en wegens lemma 3.7 is de verzameling $x = \{v_e = \bigcap_{O \in A \cup B, O \ni e} O | e \in E\}$ een element van I. Er geldt $p_x(e) \neq p_x(e')$ omdat $e \in T$ terwijl $e' \in T^c$, en dus is φ injectief. □

• Hoofdstelling

Laat $\mathcal{A}^*$ de categorie van separabele algebraïsche K-algebra's zijn, en $\mathcal{V}^*$ de categorie van compacte en totaal onsamenhangende π-ruimten. In deze sectie geven we een anti-equivalentie tussen deze categorieën aan. We beginnen met de fundamentele functoren $V: \mathcal{A}^* \to \mathcal{V}^*$, en $A: \mathcal{V}^* \to \mathcal{A}^*$.

De functor V. Definieer $V: \mathcal{A}^* \to \mathcal{V}^*$ door $V(B) = \mathrm{Hom}_K(B, K_s)$ voor $B \in \mathcal{A}^*$, met de dezelfde werking als in stelling 2.10:

$$\pi \times V(B) \longrightarrow V(B)$$
$$(\sigma, f) \longmapsto \sigma \circ f.$$

De verzameling $V(B)$ is een topologische ruimte door de inclusie $V(B) \subset K_s^B$, waarbij K_s^B de gebruikelijke topologie heeft: K_s discreet, en K_s^B de producttopologie. De ruimte $V(B)$ is dus totaal onsamenhangend; dat de ruimte compact is, is misschien nog niet duidelijk. Laat hiertoe $f_b \in K[X]$ voor elke $b \in B$ het minimumpolynoom van b zijn, en laat $\alpha_b \subset K_s$ de nulpuntsverzameling van f_b zijn. Neem $\alpha = \prod_{b \in B} \alpha_b$. Dan zien we $V(B) \subset \alpha \subset K_s^B$. De nulpuntsverzamelingen α_b zijn eindig, en dus is α compact (stelling van Tychonoff). Is $V(B)$ gesloten in α, dan is $V(B)$ ook compact. Als $f \in K_s^B \backslash V(B)$ geen K-algebramorfisme is, dan zijn er een aantal mogelijkheden, bijvoorbeeld kan $f(b+b') \neq f(b) + f(b')$ gelden voor zekere $b, b' \in B$. In dat geval is verzameling van alle functies $g \in K_s^B$ met $g(b+b') \neq g(b) + g(b')$ een open omgeving van f van functies die geen K-algebramorfismen zijn. Analoog kan men open omgevingen van f maken indien $f(b \cdot b') \neq f(b) \cdot f(b')$, $f(1) \neq 1$, of $f(k \cdot b) \neq k \cdot f(b)$. We concluderen dat $V(B)^c \subset K_s^B$ open is, en $V(B)$ is inderdaad compact.

We gaan na dat de werking $\eta \colon \pi \times V(B) \to V(B)$ continu is. Een basis voor de topologie op $V(B)$ wordt gegeven door verzamelingen van de vorm $U_{f,F} = \{g \in V(B) | g|_F = f|_F\}$, waarbij $f \in V(B)$ en $F \subset B$ een zekere eindig-dimensionale K-deelalgebra is. Als $(\sigma, g) \in \eta^{-1}(U_{f,F})$, dan ook $(\sigma \pi_{g|_F}) \times U_{\sigma^{-1} f,F} \subset \eta^{-1}(U_{f,F})$ want voor $(\tau, h) \in (\sigma \pi_{g|_F}) \times U_{\sigma^{-1} f,F}$ geldt

$$\tau \circ h|_F = \tau \circ \sigma^{-1} f|_F = \tau \circ g|_F = \sigma \circ g|_F = f|_F.$$

Er geldt $g|_F \in V(F)$ en F is een eindig dimensionale K-algebra. Wegens propositie 2.7 is de stabilisator $\pi_{g|_F} \subset \pi$ open. De verzamelingen $(\sigma \pi_{g|_F}) \times U_{\sigma^{-1} f,F} \subset \pi \times V(B)$ zijn open, en dus is het volledig origineel $\eta^{-1}(U_{f,E})$ open.

Als $f \colon B \to B'$ een morfisme is, dan definiëren we net als in 2.10 het geïnduceerde morfisme $V(f) \colon V(B') \to V(B)$ door $g \mapsto g \circ f$. Men gaat eenvoudig na dat deze afbeelding continu en π-equivariant is.

De functor A. De functor $A \colon \mathcal{V}^* \to \mathcal{A}^*$ definiëren we door $A(E) = \mathrm{Hom}_\pi(E, K_s)$; de verzameling morfismen $E \to K_s$ als π-ruimten, voorzien van de coördinaatsgewijze K-algebrastructuur, gedefinieerd net als in stelling 2.10:

$$(f+g)(e) \stackrel{\text{def}}{=} f(e) + g(e);$$
$$(fg)(e) \stackrel{\text{def}}{=} f(e)g(e);$$
$$(k \cdot g)(e) \stackrel{\text{def}}{=} k \cdot g(e);$$
$$1(e) \stackrel{\text{def}}{=} 1,$$

voor alle $f, g \in A(E)$, $k \in K$ en $e \in E$. Zij $g \in A(E)$ een element. Omdat E compact is, is het beeld van $\mathrm{im}(g) \subset K_s$ ook compact. Het beeld $\mathrm{im}(g)$ is eindig, en het minimumpolynoom van g wordt gegeven door het kleinst gemene veelvoud van eindig veel separabele polynomen in $K[X]$. De algebra $A(E)$ is dus algebraïsch en separabel.

We definieren $A(f)\colon A(E') \to A(E)$ als $g \mapsto g \circ f$ voor een morfisme $f\colon E \to E'$. De verificatie dat f inderdaad een K-algebramorfisme is, is analoog aan die we al gedaan hebben in stelling 2.10.

We kunnen nu de hoofdstelling voor algebraïsche algebra's formuleren en bewijzen.

Stelling 3.9 *Het paar functoren*

$$\left\{\begin{matrix}\text{algebraische separa-} \\ \text{bele } K\text{-algebra's}\end{matrix}\right\} \underset{A}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\text{compacte totaal onsa-} \\ \text{menhangende } \pi\text{-ruimten}\end{matrix}\right\}$$

gegeven door

$$\begin{matrix} B & \longmapsto & \mathrm{Hom}_K(B, K_s) \\ \mathrm{Hom}_\pi(E, K_s) & \longleftarrow\!\shortmid & E. \end{matrix}$$

is een anti-equivalentie van categorieën.

Bewijs Definieer voor ieder object $B \in \mathcal{A}^*$ de afbeelding θ_B als:

$$\begin{aligned} \theta_B\colon B &\longrightarrow A(V(B)) = \mathrm{Hom}_\pi(\mathrm{Hom}_K(B, K_s), K_s) \\ b &\longmapsto (f \mapsto f(b)), \end{aligned}$$

en analoog voor ieder object $E \in \mathcal{V}^*$ de afbeelding η_E als:

$$\begin{aligned} \eta_E\colon E &\longrightarrow V(A(E)) = \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_\pi(E, K_s), K_s) \\ e &\longmapsto (f \mapsto f(e)). \end{aligned}$$

We stellen de verificatie dat η_E en θ_B morfismen zijn uit; het zal volgen omdat we de afbeeldingen zullen schrijven als een samenstelling van morfismen. Analoog aan de verificatie in het bewijs van stelling 2.10 gaat men na dat voor elk morfisme $f\colon B \to B'$ in $\mathcal{A}^*$ en elk morfisme $f'\colon E \to E'$ de diagrammen

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta_B"'] & B' \arrow[d, "\theta_{B'}"] \\ A(V(B)) \arrow[r, "A(V(f))"'] & A(V(B')) \end{tikzcd} \quad \text{en} \quad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\eta_E"'] & E' \arrow[d, "\eta_{E'}"] \\ A(V(E)) \arrow[r, "A(V(f))"'] & A(V(E')) \end{tikzcd}$$

commuteren. Om te bewijzen dat θ_B en η_E isomorfismen zijn, gebruiken we de volgende reductielemma's.

De lemma's zijn misschien in grotere algemeenheid waar, zie stelling 5.4.1 en opgaven 5.4 en 5.5 in [MacLane].

Lemma 3.10 *Zij $F: I \to \mathcal{A}^*$ een inductief systeem van separabele algebraïsche K-algebra's. Laat B, samen met voor elke $i \in I$ een morfisme $\mu_i: F(i) \to B$, de inductieve limiet van het systeem F zijn. Dan is $V(B)$ samen met de geïnduceerde afbeeldingen $V(\mu_i)$ een projectieve limiet van het projectieve systeem $V \circ F$.*

Bewijs Zij $T \in \mathcal{V}^*$ een object en $\{f_i: T \to V(F(i)) : i \in I\}$ een systeem compatibele morfismen. Zij $t \in T$ een element. Dan is $\{f_i(t): F(i) \to K_s : i \in I\}$ een compatibel systeem morfismen naar K_s. Uit de universele eigenschap van de inductieve limiet verkrijgen we een uniek morfisme $g(t): B \to K_s$ zó dat $f_i(t) = g(t) \circ \mu_i$ voor alle $i \in I$. De afbeelding $g: T \to V(B)$ met $t \mapsto g(t)$ is dus een uniek π-morfisme zó dat $f_i = V(\mu_i) \circ g$ voor alle $i \in I$. □

Lemma 3.11 *Zij $F: I \to \mathcal{V}^*$ een projectief systeem van compacte en totaal onsamenhangende π-ruimten. Laat E samen met morfismen $p_i: E \to F(i)$ de projectieve limiet van F zijn. Dan is $A(E)$ isomorf met de inductieve limiet van het geïnduceerde systeem $V \circ F$.*

Bewijs Zij $T \in \mathcal{A}^*$ een object, en $\{g_i: A(F(i)) \to T : i \in I\}$ een systeem compatibele morfismen naar T. Zij $h \in A(E)$. We claimen dat er een paar (i, h^*) met $i \in I$ en $h^* \in A(F(i))$ is zó $h = h^* \circ p_i$. Merk op dat h^* voor een gegeven $i \in I$ uniek is als hij bestaat. Definieer nu $g: A(E) \to T$ door $g(h) = g(h^*)$. Dan is g een uniek en welgedefinieerd K-morfisme zó dat voor alle $i \in I$ geldt $g_i = A(p_i) \circ g$.

We bewijzen de claim. Zij $h \in A(E)$. We zoeken een $i \in I$ en een $h^* \in A(F(i))$ zó dat $h = h^* \circ p_i$. Laat $x_h = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{V}$ de (eindige) verzameling vezels van h zijn. Door deze vezels tot één punt te indentificeren vinden we een met h overeenkomstige $h' \in A(x_h)$, i.e. een afbeelding zó dat h de samenstelling is van de surjectie $E \to x_h$ en h'. We zoeken een $i \in I$ zó dat en een surjectie $t: F(i) \to x_h$ zó dat

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F(p_i)"] \arrow[d] & F(i) \arrow[dl, "t"] \\ x_h & \end{tikzcd}$$

commuteert, de gezochte h^* is dan $h' \circ t$. Zo'n surjectie bestaat precies wanneer elke vezel van de afbeelding $F(p_i)$ geheel binnen één van de vezels van h ligt. De surjectie $F(i) \to x_h$ wordt dan gegeven door een element $e \in F(i)$ te liften naar e en dan naar x_h te sturen. Beschouw de inclusie $\varphi: E \to \prod_{i \in I} F(i)$ van G-ruimten. Kies $i_{k,1}, \ldots, i_{k,n}$ en voor alle $i \in I$ open verzamelingen $O_{k,i} \subset F(i)$ zó dat $\prod_{i \in I} O_{k,i} \subset \varphi(x_k)$ voor alle i en $O_{k,i} \neq F(i)$ alleen voor $i \in \{i_{k,1}, \ldots, i_{k,n}\}$. Neem $i \in I$ groter dan alle $i_{t,s}$, dan heeft $F(i)$ de gewenste eigenschap. □

Vervolg bewijs stelling 3.9 We bewijzen dat η_E een isomorfisme is. Zij $F\colon I \to \mathcal{V}$ het projectieve systeem gedefinieerd als in stelling 3.8, zó dat E de projectieve limiet is van F. De π-ruimten in $F(I)$ zijn eindige π-verzamelingen. In stelling 2.10 hebben we gezien dat $\eta_{F(i)}\colon F(i) \to V(A(F(i)))$ voor alle $i \in I$ een isomorfisme is, en dus is de samenstelling $\eta_E^*\colon E \to V(A(E))$

$$E \longrightarrow \varprojlim_{i\in I} F(i) \longrightarrow \varprojlim_{i\in I} V(A(F(i))) \longrightarrow V(\varinjlim_{i\in I} A(F(i))) \longrightarrow V(A(E)),$$

een samenstelling van isomorfismen en dus een isomorfisme. Een element $e \in E$ gaat onder η_E^* naar

$$e \mapsto (i \mapsto e \bmod F(i)) \mapsto (i \mapsto \eta_{F(i)}(e \bmod F(i)) = \varphi_i$$

We bepalen de afbeelding $\varprojlim_{i\in I} V(A(F(i))) \to V(\varinjlim_{i\in I} A(F(i)))$. Gegeven een $f \in \varinjlim_{i\in I} A(F(i))$ is er een $i \in I$ en een $f^* \in A(F(i))$ zó dat f de samenstelling is van de inclusie $A(F_i) \to A(E)$ en f^*. We kunnen nu het beeld van de afbeelding φ_i berekenen:

$$\varphi_i \mapsto (f \mapsto \varphi_i(f^*)).$$

Het element $(f \mapsto \varphi_i(f^*)) \in V(\varinjlim_{i\in I} A(F(i)))$ beeldt onder $V(\varinjlim_{i\in I} A(F(i))) \to V(A(E))$ af op de evaluatie $(f \mapsto f(e)) \in V(A(E))$. We concluderen dat η_E gelijk is aan η_E^*, en dit bewijst dat η_E een isomorfisme is.

Voor θ_B passen we hetzelfde argument toe. Zij B een separabele algebraïsche K-algebra, en $H\colon I \to \mathcal{A}$ het inductieve systeem eindig-dimensionale K-deelalgebra's. Dan geldt $B = \bigcup_{i\in I} F(i) \cong \varinjlim_{i\in I} F(i)$ (stelling 3.4). De samenstelling $\theta_B^*\colon B \to A(V(B))$

$$B \to \varinjlim_{i\in I} A(V(F(i))) \to A(\varprojlim_{i\in I} V(F(i))) \to A(V(B)),$$

is een samenstelling van isomorfismen en dus een isomorfisme. De eerste afbeelding stuurt een element $b \in B$ naar de klasse van afbeeldingen $\varphi_i \in A(V(F(i)))$ die een $f \in V(F(i))$ evalueren in b voor alle $i \in I$ zó dat $F(i)$ het element b bevat. Onder de tweede afbeelding gaat deze klasse $\overline{\varphi}_i$ naar het π-morfisme $\Phi\colon \varprojlim_{i\in I} V(F(i)) \to K_s$ die een element $\sigma\colon I \to \coprod_{i\in I} V(F(i))$ stuurt naar de waarde die alle coördinaatfuncties $\sigma(i)$ op b aannemen waarbij $i \in I$ is zó dat $b \in F(i)$. Onder de laatste afbeelding gaat Φ naar de evaluatieafbeelding in B: $b \mapsto f(b)$, en dit bewijst de stelling. $\square$

• Voorbeelden

We geven een aantal voorbeelden van K-algebra's en G-ruimten die voorkomen in de anti-equivalentie in stelling 3.9.

Voorbeeld 3.12 Neem $C \subset [0,1] = I$ de *Cantorverzameling* in $\mathbf{R}$: De verzameling gedefiniëerd als het beeld van de injectie

$$\begin{aligned} \varphi \colon \{0,2\}^{\mathbf{Z}_{\geq 1}} &\longrightarrow I \\ (i \mapsto a_i) &\longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot 3^{-i}. \end{aligned}$$

Merk op dat de afbeelding een homeomorfisme op zijn beeld is als we $\{0,2\}^{\mathbf{Z}_{\geq 1}}$ voorzien van de producttopologie (en $\{0,2\}$ van de discrete topologie).

(a) Voor elk lichaam K kunnen we de triviale actie $\pi \times C \to C$ bekijken: $(\sigma, c) \mapsto c$. Om te begrijpen wat voor soort K-algebra bij C hoort (in de zin van stelling 3.9) is makkelijker om naar de ruimte $\{0,2\}^{\mathbf{Z}_{\geq 1}}$ te kijken. De ruimte $\{0,2\}^{\mathbf{Z}_{\geq 1}}$ is homeomorf met de projectieve limiet van het systeem $(\{0,2\}^n)_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}}$ met de natuurlijke surjecties $f_m^n \colon \{0,2\}^m \to \{0,2\}^n$ voor $m \geq n$, en waarbij $\{0,2\}^n$ voorzien is van de discrete topologie. Voor $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ geldt $A(\{0,2\}^n) = \mathrm{Hom}_\pi(\{0,2\}^n, K_s) \cong K^{2^n}$, en $A(f_m^n)$ is de natuurlijke inclusie $K^{2^n} \to K^{2^m}$, en dus is $A(C)$ gegeven door de inductieve limiet van het systeem $\{K^{2^n}\}_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}}$.

(b) Als we K specificeren kunnen we ook een niet-triviale actie op C opschrijven. Neem $K = \mathbf{R}$, dan is π eenvoudig: $\pi \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. We kunnen π op C laten werken door spiegeling:

$$\begin{aligned} \eta \colon \pi \times C &\longrightarrow C \\ (\sigma, x) &\longmapsto \begin{cases} x & \sigma = \mathrm{Id} \\ 1 - x & \sigma \neq \mathrm{Id}. \end{cases} \end{aligned}$$

De werking η induceert via φ de werking η^* op $\{0,2\}^{\mathbf{Z}_{\geq 1}}$ waarin $\sigma \in \pi$ òf een element invariant laat (de identiteit) òf alle nullen en tweeën verwisselt. De π-ruimte $\{0,2\}^{\mathbf{Z}_{\geq 1}}$ is ook met de niet-triviale actie η^* isomorf met de projectieve limiet van het systeem $(\{0,2\}^n)_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}}$ met de natuurlijke surjecties $f_m^n \colon \{0,2\}^m \to \{0,2\}^n$ voor $m \geq n$, maar nu werkt π op de verzamelingen $\{0,2\}^n$ door wisseling van nullen en tweeën. We vinden $A(\{0,2\}^n) \cong \bigotimes_{\mathbf{R}}^n A(\{0,2\})$, het n-voudig tensorproduct van $A(\{0,2\})$ over $\mathbf{R}$. Als we K_s identificeren met $\mathbf{C}$, dan is de $\mathbf{R}$-algebra $A(\{0,2\})$ isomorf met $\mathbf{C}$ via de afbeelding

$$\begin{aligned} A(\{0,2\}) &\longrightarrow \mathbf{C} \\ f &\longmapsto f(0), \end{aligned}$$

De $\mathbf{R}$-algebra $A(C)$ is dus isomorf met de inductieve limiet van het systeem $\{\bigotimes_{\mathbf{R}}^n \mathbf{C}\}_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}}$ van alle eindige tensorproduct-algebra's van $\mathbf{C}$ met zichzelf en de natuurlijke inclusie-afbeeldingen.

(c) Voorbeeld c is een opgave voor de lezer. Voor $K = \mathbf{F}_q$ een eindig lichaam is er een uniek isomorfisme van topologische groepen $\pi \cong \hat{\mathbf{Z}}$ zó dat $x \mapsto x^q$ correspondeert met $1 \in \hat{\mathbf{Z}}$.

Opgave *De onderliggende topologische ruimte van $\mathbf{Z}_2$ is een $\hat{\mathbf{Z}}$-ruimte door het surjectieve morfisme $\hat{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}_2$ van topologische groepen, uniek bepaald door $1 \mapsto 1$. Bewijs dat $A(\mathbf{Z}_2)$ een lichaam is, en dat $A(\mathbf{Z}_2)$ isomorf is met het deellichaam van $\overline{\mathbf{F}}_q$ van elementen van tweemachtgraad over $\mathbf{F}_q$.*

(De Cantorverzameling is isomorf met de onderliggende topologische ruimte van de 2-adische getallen, en we hebben nòg een werking op C gevonden met een corresponderende K-algebra.)

Voorbeeld 3.13 Neem $K = \mathbf{F}_2$, S een verzameling, en $\mathbf{F}_2^S$ de ring van $\mathbf{F}_2$-waardige functies op S. Deze $\mathbf{F}_2$-algebra is algebraïsch want elk element $x \in \mathbf{F}_2^S$ is nulpunt van het polynoom $X^2 - X \in \mathbf{F}_2[X]$, en separabel want dit polynoom is separabel. De π-actie op de ruimte $V(\mathbf{F}_2^S) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_2}(\mathbf{F}_2^S, \overline{\mathbf{F}}_2)$ is triviaal, want elk element $f \in V(\mathbf{F}_2^S)$ stuurt elementen $b \in \mathbf{F}_2^S$ naar 0 of 1; de enige oplossingen van $X^2 - X = 0$ in $\overline{\mathbf{F}}_2$. De algebra $\mathbf{F}_2^S$ kunnen we identificeren met de machtsverzameling $\mathcal{P}(S)$ van S via $\sigma\colon B \to \mathcal{P}(S)$, $f \mapsto f^{-1}(0)$. Met deze identificatie verkijgen we de afbeelding

$$\begin{aligned} \varphi\colon V(\mathbf{F}_2^S) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(S)) \\ f &\longmapsto \sigma(\ker(f)). \end{aligned}$$

De afbeelding heeft als beeldpunten F verzamelingen met de eigenschappen (1) $F \neq \emptyset$, $F \neq \mathcal{P}(S)$ (2) $\forall V, W \in F : V \cap W \in F$ (3) $\forall V \in F, W \subset X : V \subset W \Rightarrow W \in F$, die komen van het feit dat $\ker(f)$ een ideaal is. De eigenschappen stellen dat $\ker(f)$ een *filter* is op E. Omdat de kernen van de afbeeldingen $f \in V(\mathbf{F}_2^S)$ maximale idealen zijn, komt er nog een vierde eis bij: (4) F is een *ultrafilter*, ofwel F is niet bevat in een groter filter. Andersom geven deze 4 eisen ook een volledige beschrijving van het beeld: $\varphi(V(\mathbf{F}_2^S))$ is de verzameling ultrafilters op S. De verzameling ultrafilters heeft een natuurlijke topologie door de gesloten verzamelingen te definiëren door:

$$V'(F) = \{U \supset F | U \text{ is ultrafilter op } S\},$$

voor alle filters F op S, en men kan nagaan dat φ een homeomorfisme $V(\mathbf{F}_2^S) \to \mathrm{im}(\varphi)$ is als we de verzameling ultrafilters voorzien van deze topologie. In het artikel [Hart] wordt het geval $X = \mathbf{N}, \mathbf{R}$ bestudeerd, en worden $V(\mathbf{F}_2^{\mathbf{N}})$ respectievelijk $V(\mathbf{F}_2^{\mathbf{R}})$ de *Čech-Stone Compactification* van $\mathbf{N}$ en $\mathbf{R}$ genoemd.

Opmerking bij voorbeeld 3.13 Voor K een lichaam en B een separabele algebraïsche K-algebra kan men nagaan dat de afbeelding

$$\begin{aligned} V(B)/\pi &\longrightarrow \mathrm{Spec}(B) \\ \overline{f} &\mapsto \ker(f), \end{aligned}$$

een homeomorfisme is. In het bijzonder als de π-actie op $V(B)$ triviaal is (zoals in bovenstaand voorbeeld) kan men $\mathrm{Spec}(B)$ dus identificeren met $V(B)$, en we zien dat het spectrum van $\mathbf{F}_2^S$

homeomorf is met de verzameling ultrafilters op S voorzien van de topologie gedefinieerd als in voorbeeld 3.13.

Voorbeeld 3.14 Neem $\zeta_3 = e^{\frac{2}{3}\pi \cdot i} \in \mathbf{C}$, en een $\varepsilon > 0$. Op de voorpagina staat een benadering van het beeld S_ε van de afbeelding

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon \colon \{1, \zeta_3, \zeta_3^2\}^{\mathbf{Z}_{\geq 1}} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ (i \mapsto a_i) &\longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot (1/2 + \varepsilon)^i, \end{aligned}$$

voor $\varepsilon = 0.3$. Deze ruimte is totaal onsamenhangend en compact, want φ is continu als we $\{1, \zeta_3, \zeta_3^2\}^{\mathbf{Z}_{\geq 1}}$ voorzien van de producttopologie (en $\{1, \zeta_3, \zeta_3^2\}$ van de discrete topologie). Zij K een lichaam. De ruimte $\{1, \zeta_3, \zeta_3^2\}^{\mathbf{Z}_{\geq 1}}$ is de projectieve limiet van de discrete ruimten $\{1, \zeta_3, \zeta_3^2\}^n$ voor $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$, met de 'vergeetsurjecties' $f_m^n \colon \{1, \zeta_3, \zeta_3^2\}^n \to \{1, \zeta_3, \zeta_3^2\}^m$ gegeven door $(i \mapsto a_i) \longmapsto (i \mapsto a_i)$, voor $m \leq n$. De K-algebra $A(S_\varepsilon)$ is dus isomorf met de inductieve limiet B van de objecten $A(\{1, \zeta_3, \zeta_3^2\}^n) \cong K^{3^n}$ met de geïnduceerde injecties $K^{3^m} \to K^{3^n}$ voor $m \leq n$. Als we nu weer teruggaan door $V(B)$ te bepalen, dan vinden we dat de topologische ruimte $\mathrm{Hom}_K(B, K_s)$ homeomorf is met de ruimte S_ε.

NB: Voor $\varepsilon = 0$ is het beeld S_0 van φ_0 de Sierpinskidriekhoek. Deze ruimte is samenhangend, en dus is $\mathrm{Hom}_\pi(S_0, K_s)$ voorzien van de K-algebrastructuur als in sectie 3.3 K-isomorf met K door de afbeelding $f \mapsto f(e)$ voor elk punt $e \in S_0$.

Appendix A:

Tensorproducten

Voor een ring R en R-modulen A, B wordt het tensorproduct $A \otimes_R B$ gedefinieerd aan de hand van *R-bilineaire* functies φ op $A \times B$. Als C een derde R-moduul is, en $\varphi\colon A \times B \to C$ een afbeelding, dan is φ R-bilineair indien voor alle $a \in A$ en $b \in B$ de afbeeldingen $x \mapsto \varphi(a, x)$, $x \mapsto \varphi(x, b)$ R-lineair zijn.

Definitie A.1 Het *tensorproduct* $A \otimes_R B$ is gedefinieerd als een R-moduul T en een R-bilineaire afbeelding $\psi\colon A \times B \to T$ zó dat voor ieder R-moduul C iedere R-bilineaire afbeelding $\varphi\colon A \times B \to C$ een unieke R-lineaire afbeelding $\varphi'\colon T \to C$ bestaat zó dat $\varphi = \varphi' \circ \psi$. Deze eigenschap wordt de universele eigenschap van het tensorproduct genoemd.

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & C \\ & T \arrow[ur, dotted, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

In deze appendix leiden we een aantal algemene eigenschappen van tensorproducten af die we gebruiken in hoofdstuk 1, 2 en 3. Niet alle proposities bewijzen we in volle algemeenheid, voor een bredere uiteenzetting zie [Lang, H16], [ICA, H2], [Alg. II, §17] en [Eisenbud, H2.2 en appendix 5]. De meeste proposities die we hier zullen bewijzen komen ook uit deze boeken.

Lemma A.2 *Zij (T, ψ) een tensorproduct van A en B, dan geldt $\langle \mathrm{im}(\psi) \rangle = T$.*

Bewijs Beschouw het diagram

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "f' \circ \psi = f \circ \psi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & T/\langle \mathrm{im}(\psi) \rangle \\ & T \arrow[ur, shift left, "f'"] \arrow[ur, shift right, "f"'] & \end{tikzcd}$$

waarin $f\colon \langle \mathrm{im}(\psi) \rangle \to T/\langle \mathrm{im}(\psi) \rangle$ de nulafbeelding, en $f'\colon \langle \mathrm{im}(\psi) \rangle \to T/\langle \mathrm{im}(\psi) \rangle$ de quotiëntafbeelding is. Er geldt de gelijkheid $f \circ \psi = f' \circ \psi$, en deze samengestelde afbeelding is bilineair. Uit uniciteit van geïnduceerde afbeeldingen volgt nu $f = f'$. $\square$

Propositie A.3 *Het tensorproduct $A \otimes_R B$ bestaat voor ieder paar R-modulen A, B en is op een uniek isomorfisme na uniek: Als (T, ψ) en (T', ψ') twee tensorproducten zijn, dan wordt het isomorfisme $T \to T'$ op het beeld van ψ gegeven door $\psi(a, b) \mapsto \psi'(a, b)$.*

Bewijs Definieer het vrije R-moduul

$$T = R^{(A \times B)} \stackrel{\text{def}}{=} \{f\colon A \times B \to R | f(a, b) = 0 \text{ voor bijna alle } (a, b) \in A \times B\},$$

waarbij de laatste verzameling is voorzien van de puntsgewijze R-moduulstructuur:

$$\begin{aligned}(f+g) &\stackrel{\text{def}}{=} ((a,b) \mapsto f(a,b) + g(a,b)) \\ r \cdot f &\stackrel{\text{def}}{=} ((a,b) \mapsto r \cdot f(a,b)),\end{aligned}$$

voor alle $r \in R$ en $f, g \in T$ en $(a,b) \in A \times B$. Zij $\psi: A \times B \to T$ de verzamelingstheoretische afbeelding gegeven door:

$$(a,b) \longmapsto \begin{cases} (a',b') \mapsto 1 & (a',b') = (a,b) \\ (a',b') \mapsto 0 & (a',b') \neq (a,b), \end{cases}$$

We definiëren nu een zo'n klein mogelijk deelmoduul $M \subset T$ zó dat de door ψ geïnduceerde afbeelding $\overline{\psi}: A \times B \to T/M$ naar het quotiënt een bilineaire afbeelding wordt:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \begin{array}{l|l} \psi(a+a',b) - \psi(a,b) - \psi(a',b), \psi(a,b+b') - \psi(a,b) - \psi(a,b') & a, a' \in A \\ \psi(r \cdot a, b) - r \cdot \psi(a,b), \psi(a, rb) - r \cdot \psi(a,b) & b, b' \in B,\ r \in R \end{array} \right\rangle.$$

We claimen dat $(T/M, \overline{\psi})$ een tensorproduct van A met B is. Zij C een R-moduul, en $\varphi: A \times B \to C$ een bilineaire afbeelding. Definieer de lineaire afbeelding $\varphi': T \to C$ als $f \mapsto \sum_{(a,b) \in A \times B} f(a,b) \cdot \varphi(a,b)$. De afbeelding φ' is identiek 0 op M, en factoriseert over het quotiënt in een afbeelding $\varphi'': T/M \to C$. Er geldt $\varphi = \varphi' \circ \psi$ en ook $\varphi = \varphi'' \circ \overline{\psi}$, en φ factoriseert naar een lineaire afbeelding $\varphi'': T/M \to C$. De afbeelding φ'' ligt vast op $\mathrm{im}(\overline{\psi})$, en dus op $\langle \overline{\psi} \rangle = T/M$, en φ'' is een unieke afbeelding zó dat het diagram

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\overline{\psi}"'] & & C \\ & T/M \arrow[ur, dotted, "\varphi''"'] & \end{tikzcd}$$

commuteert. We concluderen dat $(T/M, \overline{\psi})$ een tensorproduct van A met B is.

We bewijzen dat het tensorproduct op isomorfie na uniek is. Stel (T, ψ) en (T', ψ') zijn twee tensorproducten van A en B. De afbeelding ψ is bilineair, en wegens de universele eigenschap van een tensorproduct is er een unieke lineaire afbeelding $f: T' \to T$ zó dat $\psi = f \circ \psi'$ en andersom een unieke lineaire afbeelding $f': T \to T'$ zó dat $\psi' = f' \circ \psi$. Nu volgt $\psi = f \circ f' \circ \psi$ en $\psi' = f' \circ f \circ \psi'$. Omdat ook $\psi = \mathrm{Id}_T \circ \psi$ en $\psi' = \mathrm{Id}_{T'} \circ \psi'$ volgt $f \circ f' = \mathrm{Id}_T$ en $f' \circ f = \mathrm{Id}_{T'}$. De afbeelding f is dus een isomorfisme. □

Voor het tensorproduct (T, ψ) noteren we $A \otimes_R B$, en we noteren $a \otimes_R b$ voor beeldpunten van de afbeelding ψ, met $a \in A$ en $b \in B$. De elementen $a \otimes b \in A \otimes_R B$ worden de *elementaire tensoren* genoemd. Het moduul voorgebracht door deze elementaire tensoren is het hele tensorproduct (lemma A.2). Ofwel, ieder element in het tensorproduct is te schrijven als een eindige som

$\sum a_i \otimes b_i$ met $a_i \in A$ en $b_i \in B$. Veel zaken van het tensorproduct kunnen worden afgeleid door ze eerst te bewijzen voor de elementaire tensoren, en vervolgens op te merken dat de bewering ook geldt voor sommen van tensoren. Voorschriften van lineaire afbeeldingen hoeven dankzij lemma A.2 ook alleen gegeven te worden voor de elementaire tensoren.

Definitie A.4 (Het tensorproduct van lineaire afbeeldingen)
Laat A, B, C en D vier R-modulen zijn, en $f\colon A \to C$ en $g\colon B \to D$ lineaire afbeeldingen. Definieer de afbeelding $(f \times g)\colon A \times B \to C \times D$ als $(a, b) \mapsto (f(a), g(b))$. De samenstelling $\varphi := \psi' \circ (f \times g)$ is bilineair, en factoriseert over het tensorproduct $A \otimes_R B$. We verkrijgen een unieke afbeelding $\varphi'\colon A \otimes_R B \to C \otimes_R D$, zó dat het diagram rechts commuteert. Er geldt $\varphi'(a \otimes b) = \varphi(a, b) = \psi'(f(a), f(b)) = f(a) \otimes f(b)$ voor alle elementaire tensoren $a \otimes b \in A \otimes_R B$. De afbeelding φ' wordt het *tensorproduct* van de lineaire afbeeldingen f en g genoemd, en noteren we als $\varphi' = f \otimes_R g$.

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f\times g"] \arrow[dr, "\varphi"] & A \otimes_R B \arrow[d, dotted, "\varphi'"] \\ C \times D \arrow[r, "\psi'"] & C \otimes_R D \end{tikzcd}$$

Gevolg A.5 *Laat C een R-moduul zijn. De toekenning $C \otimes_R A$ en $\mathrm{Id}_C \otimes_R f$ bij een R-moduul A en een morfisme $f\colon A \to B$ geeft een covariante functor $C \otimes_R \_ \colon R$-**mod**$\to R$-**mod** van de categorie van R-modulen naar de categorie van R-modulen.*

• Uitbreiding van scalairen en het tensorproduct van algebra's

Stel R is een ring, A een R-moduul en B een R-algebra. Laat B^+ het onderliggende R-moduul van B zijn, en zij $\phi\colon B \to \mathrm{End}(B^+)$ het ringmorfisme dat een element $b \in B$ stuurt naar linksvermenigvuldiging met b: $x \mapsto b \cdot x$. Dan definieert ϕ een B-moduulstructuur op B^+. De afbeelding φ die aan ieder endomorfisme $f\colon B^+ \to B^+$ het endomorfisme $\mathrm{Id}_A \otimes_R f \in \mathrm{End}(A \otimes_R B^+)$ toekent, is wegens propositie A.5 een ringmorfisme $\mathrm{End}(B^+) \to \mathrm{End}(A \otimes_R B^+)$. De samenstelling

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{End}(B^+) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{End}(A \otimes_R B^+) \\ b & \longmapsto & & & ((a \otimes b^+) \mapsto (a \otimes b^+ \cdot b)), \end{array}$$

definieert dus een B-moduulstructuur $\phi_B\colon B \to \mathrm{End}(A \otimes_R B)$ op $A \otimes_R B^+$. Deze moduulstructuur wordt de *uitbreiding van scalairen* van het moduul A genoemd. In het vervolg zullen we de '+' uit de notatie weglaten, en $A \otimes_R B$ noteren voor $A \otimes_R B^+$.

De uitbreiding van scalairen is in zekere zin een tegengestelde operatie van *restrictie van scalairen*: Als A een R-moduul is, en $f\colon R' \to R$ een ringmorfisme, dan geeft de samenstelling $R' \to R \to \mathrm{End}(A)$, een R'-moduulstructuur op A die de restrictie van scalairen wordt genoemd.

We kunnen nu het geval bekijken waarin A èn B R-algebra's zijn. Wegens bovenstaande is het tensorproduct dan zowel een A-moduul als een B-moduul. We beschouwen de lineaire afbeeldingen $\alpha\colon A \to A \otimes_R B$ en $\beta\colon B \to A \otimes_R B$ gegeven door $a \mapsto a \otimes_R 1$ respectievelijk $b \mapsto 1 \otimes_R b$.

Stelling A.6 *De A, B-moduulstructuur samen met de vermenigvuldigingsoperatie*

$$(a \otimes_R b) \cdot (a' \otimes_R b') \stackrel{\text{def}}{=} aa' \otimes_R bb',$$

geeft een R-algebrastructuur op $A \otimes_R B$ zó dat α en β twee R-algebramorfismen zijn. Samen met deze R-algebrastructuur en de morfismen α en β vormt $A \otimes_R B$ het coproduct (de som) van de R-algebra's A en B in de categorie van R-algebra's.

Bewijs Beschouw de afbeelding $\Phi'\colon A \times B \to \mathrm{End}(A \otimes_R B)$, gegeven door $(a, b) \mapsto \phi_A(a) \circ \phi_B(b)$. Deze afbeelding is bilineair want $\mathrm{End}(A \otimes_R B)$ is een ring en ϕ_A en ϕ_B zijn lineair. De afbeelding $\Phi\colon A \otimes_R B \to \mathrm{End}(A \otimes_R B)$ met $a \otimes_R b \mapsto \phi_A(a) \circ \phi_B(b)$ is welgedefinieerd en lineair (definitie A.1). We kunnen nu een vermenigvuldiging op $A \otimes_R B$ definiëren als $x \cdot y := (\Phi(x))(y)$ voor $x, y \in A \otimes_R B$. Omdat Φ een morfisme is, is deze vermenigvuldiging distributief met de optelling.

Wegens de distributieve wet en lemma A.2 behoeven we de overige algebra-eigenschappen van $A \otimes_R B$ slechts na te gaan voor de elementaire tensoren. Stel $x = a \otimes_R b$ en $y = a' \otimes_R b'$ zijn twee elementaire tensoren, dan wordt het product van deze tensoren gegeven door:

$$(a \otimes_R b) \cdot (a' \otimes_R b') = (\phi_A(a) \circ \phi_B(b))(a' \otimes_R b') = \phi_A(a)(a' \otimes_R bb') = aa' \otimes_R bb'.$$

Met bovenstaande formule is nu eenvoudig na te gaan dat $A \otimes_R B$ een ring is met eenheid $1 \otimes_R 1$ en dat α, β R-algebrahomomorfismen zijn. We hebben nevenstaand commutatief diagram van ringmorfismen verkregen.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & A \otimes_R B \end{tikzcd}$$

We laten zien dat het diagram *cocartesisch* is, ofwel dat $A \otimes_R B$ (samen met de morfismen α en β) het coproduct van A met B is via de morfismen α en β. Stel C is een R-algebra, en f, g zijn R-algebramorfismen zó dat het diagram

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ B \arrow[r, "\beta"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & A \otimes_R B \arrow[dr, dotted, "\varphi"] & \\ & & C \end{tikzcd} \qquad (*)$$

(zonder de afbeelding φ) commutatief is. De afbeelding $\alpha \cdot \beta\colon A \times B \to A \otimes_R B$ gegeven door $(a, b) \mapsto \alpha(a) \cdot \beta(b) = a \otimes_R b$ is de tensorafbeelding, en de afbeelding $f \cdot g\colon A \times B \to C$ gegeven door $(a,b) \mapsto f(a) \cdot g(b)$ is bilineair, en de afbeelding φ verkregen uit het diagram

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "f\cdot g"] \arrow[dr, "\alpha\cdot\beta"'] & & C \\ & A \otimes_R B \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

is lineair en uniek. Het is duidelijk dat de afbeelding φ ook multiplicatief is, dat $\varphi(1 \otimes_R 1) = 1$, $f = \varphi \circ \alpha$ en dat $g = \varphi \circ \beta$. Diagram $(*)$ commuteert dus. Elk ander algebramorfisme φ' dat het diagram $(*)$ commutatief maakt, past ook in bovenstaand tensordiagram, en wegens de universele eigenschap van het tensorproduct geldt $\varphi' = \varphi$. De afbeelding φ is dus een uniek algebramorfisme zó dat bovenstaand diagram commuteert. $\square$

Voor het tensorproduct van modulen hebben we in propositie A.3 een uniciteitseigenschap gezien. Een analoge eigenschap geldt ook wanneer de modulen algebra's zijn, en we het tensorproduct van een algebrastructuur voorzien.

Propositie A.7 *Stel A en B zijn R-algebra's, en (T,ψ) en (T',ψ') zijn twee tensorproducten voorzien van de R-algebrastructuur uit propositie A.6. Dan is R-moduulisomorfisme $\varphi\colon T \xrightarrow{\sim} T'$ uit propositie A.3 ook een R-algebraisomorfisme.*

Bewijs Omdat T en T' beiden coproducten zijn wegens stelling A.6, is er een R-algebraisomorfisme $T \to T'$. Dit isomorfisme is in het bijzonder lineair, en moet wegens propositie A.3 samenvallen met φ. $\square$

• Eigenschappen

We leiden een aantal eigenschappen van tensorproducten van modulen en algebra's af. We zullen deze eigenschappen in hoofdstukken 1,2 en 3 vaak gebruiken.

Propositie A.8 *Laat A, B twee R-modulen zijn. Dan zijn de afbeeldingen*

$$\begin{aligned} (i) \quad & f\colon A \otimes_R B \longrightarrow B \otimes_R A \\ & \qquad a \otimes b \longmapsto b \otimes a; \\ (ii) \quad & h\colon R \otimes_R B \longrightarrow B \\ & \qquad (r \otimes b) \longmapsto rb, \end{aligned}$$

welgedefinieerd en isomorfismen. Als de twee R-modulen A en B algebra's over R zijn, dan zijn bovenstaande R-moduulisomorfismen ook R-algebra-isomorfismen.

Bewijs De afbeelding $A \times B \to B \otimes_R A$ gegeven door $(a,b) \mapsto b \otimes a$ is bilineair, en f is welgedefinieerd en lineair. Analoog is de afbeelding $B \otimes_R A \to A \otimes_R B$ gegeven door

$b \otimes a \mapsto a \otimes b$ ook welgedefinieerd en lineair. De afbeeldingen zijn duidelijk elkaars inversen. Dit bewijst (i).

De afbeelding $R \times A \to A$ gegeven door $(r, a) \mapsto ra$ is bilineair, en de afbeelding $h\colon R \otimes_R A \to A$ gegeven door $r \otimes a \mapsto r \cdot a$ is lineair en welgedefinieerd (definitie A.1). De afbeelding $h'\colon A \to R \otimes_R A$ gedefinieerd door $a \mapsto 1 \otimes a$ is lineair, en voor alle elementaire tensoren $r \otimes a \in R \otimes_R A$ geldt: $h' \circ h(r \otimes a) = h'(ar) = 1 \otimes ar = r \otimes a$, en andersom, voor alle $a \in A$ geldt: $h \circ h'(a) = h(1 \otimes a) = 1 \cdot a = a$. De lineaire afbeeldingen zijn inversen van elkaar, en dus isomorfismen.

Ingeval A en B algebra's over R zijn, dan zijn de afbeeldingen ook multiplicatief en dus R-algebraisomorfismen. $\square$

Propositie A.9 *Zij A een R-moduul. Laat $I \neq \emptyset$ een indexverzameling zijn, en B_i een R-moduul voor iedere $i \in I$. De afbeelding*

$$\begin{aligned} f\colon A \otimes_R \bigoplus_{i \in I} B_i &\longrightarrow \bigoplus_{i \in I} A \otimes_R B_i \\ a \otimes_R (b_i)_{i \in I} &\longmapsto (a \otimes_R b_i)_{i \in I}, \end{aligned}$$

is een isomorfisme van R-modulen.

Bewijs We laten zien dat $\left(\bigoplus_{i \in I} A \otimes_R B_i, \psi\colon (a, (b_i)_{i \in I}) \mapsto (a \otimes_R b_i)_{i \in I}\right)$ een tensorproduct van A met $\bigoplus_{i \in I} B_i$ is. Uit propositie A.3 volgt dan dat f een isomorfisme is.

Stel C is een R-moduul, en $\varphi\colon A \times \bigoplus_{i \in I} B_i \to C$ is een bilineaire afbeelding. Zij $i \in I$ een element, dan hebben we het diagram met natuurlijke afbeeldingen:

$$\begin{tikzcd}
A \times B_i \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\psi \circ j_i"] \arrow[dd, "j_i"'] & & A \otimes_R B_i \arrow[dl, "\varepsilon_i"] \arrow[dd, dotted, "\varphi_i"] \\
& \bigoplus_{i \in I} A \otimes_R B_i \arrow[dr, dotted, "\varphi'"] & \\
A \times \bigoplus_{i \in I} B_i \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, "\varphi"] & & C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \psi_i\colon (a, b) &\longmapsto a \otimes_R b \\ j_i\colon (a, b) &\longmapsto \left(a, \left(j \mapsto \begin{cases} b & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}\right)\right) \\ \varepsilon_i\colon a \otimes b &\longmapsto \left(j \mapsto \begin{cases} a \otimes b & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}\right) \end{aligned}$$

(zonder de gestippelde afbeeldingen). We gebruiken de universele eigenschappen om de afbeeldingen φ_i en φ' te verkrijgen. Ten eerste is de afbeelding $\varphi \circ j_i$ bilineair, en factoriseert via ψ_i in de afbeelding $\varphi_i\colon A \otimes_R B_i \to C$. Voor iedere $i \in I$ hebben we een dergelijke afbeelding, en wegens de universele eigenschap van de directe som een vaste afbeelding φ' zó dat de rechter driehoek in bovenstaand diagram voor iedere $i \in I$ commuteert.

We bewijzen dat de onderste driehoek in het diagram commuteert. Uit de voorschriften van $\psi_i, \varepsilon_i, j_i$ en ψ volgt $\psi \circ j_i = \varepsilon_i \circ \psi_i$, en er geldt $\varphi' \circ \psi \circ j_i = \varphi' \circ \varepsilon_i \circ \psi_i = \varphi_i \circ \psi_i = \varphi \circ j_i$ voor alle $i \in I$. Uit de universele eigenschap van de directe som volgt $\varphi' \circ \psi = \varphi$, hetgeen te bewijzen viel. Voor de uniciteit passen we voorgaand argument in de omgekeerde volgorde toe. Stel $\varphi'' \colon \bigoplus_{i \in I} A \otimes_R B_i \to C$ is nòg een lineaire afbeelding zó dat de onderste driehoek in bovenstaand diagram commuteert. Er geldt $\varphi = \varphi'' \circ \psi$, dus $\varphi \circ j_i = \varphi'' \circ \psi \circ j_i$ en $\varphi_i \circ \psi_i = \varphi'' \circ \varepsilon_i \circ \psi_i$ voor alle $i \in I$. Waaruit volgt $\varphi'' \circ \varepsilon_i = \varphi_i$ voor alle $i \in I$, en dus $\varphi' = \varphi''$. $\square$

Als A een R-algebra is en $\{B_i\}_{i \in I}$ een eindige collectie R-algebra's, dan is de afbeelding f in propositie A.9 ook een R-algebramorfisme, en dus een R-algebraisomorfisme.

Gevolg A.10 *Stel de ring $R = K$ is een lichaam en C een K-vectorruimte, dan is de functor $C \otimes_K \_ \colon K$-**vect**$\to K$-**vect** exact.*

Bewijs De K-vectorruimte C is vrij, en dus $C \cong K^{(\beta)}$ met β een zekere basis van C. De functor $C \otimes_K \_$ van de categorie van K-vectorruimten naar de categorie van K-vectorruimten is wegens propositie A.9 dezelfde als $\_^{(\beta)}$, en de laatste is exact. $\square$

Propositie A.11 *Laat R een ring zijn, A, B twee R-algebra's, en C een B-algebra. Dan geldt $(A \otimes_R B) \otimes_B C \cong A \otimes_R C$ met $(a \otimes_R b) \otimes_B c \mapsto a \otimes_R bc$.*

Bewijs In het diagram

$$
\begin{tikzcd}
 & & & T \\
A \arrow[r] \arrow[urrr, bend left, two heads] & A \otimes_R B \arrow[r] \arrow[urr, dotted, "a"] & (A \otimes_R B) \otimes_B C \arrow[ur, dotted, "b"] & \\
R \arrow[r] \arrow[u] & B \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[u] \arrow[uur, bend right] &
\end{tikzcd}
$$

zijn de twee kleine blokken cocartesisch. We laten zien dat het grote blok ook cocartesisch is. We hebben al een testobject T in het diagram gezet. Omdat het linkerdiagram cocartesisch is, verkrijgen we een uniek morfisme $a \colon A \otimes_R B \to T$ zó dat alle driehoeken in het diagram waarin a voorkomt commuteren. Het rechterdiagram is ook cartesisch, en dus is er een uniek morfisme $b \colon (A \otimes_R B) \otimes_R C \to T$ zoals aangegeven. $\square$

Appendix B:

Inductieve en projectieve limieten

In dit hoofdstuk leggen we notatie voor inductieve en projectieve limieten vast. Deze appendix is niet bedoeld als een volledige behandeling van inductieve en projectieve limieten; voor meer volledigheid, zie [Lang] of [Eisenbud].

Zij I een gericht geordende indexverzameling. Dit wil zeggen dat I voorzien is van een relatie $\leq$ met de eigenschappen.

- $i \leq j \wedge j \leq i \Longleftrightarrow i = j$;
- $i \leq j \wedge j \leq k \Longrightarrow i \leq k$;
- $i, j \in I \Longrightarrow \exists k \in I : i \leq k \wedge j \leq k$.

De geordende verzameling I kan men opvatten als een categorie door als objecten de elementen van I te nemen, en te definiëren:

$$\#\mathrm{Hom}(i,j) = \begin{cases} 0 & i \not\leq j \\ 1 & i \leq j, \end{cases}$$

Zij C een categorie.

Definitie B.1 Een *inductief systeem* in de categorie C is een covariante functor $I \to C$, en een *projectief systeem* in de categorie C is een contravariante functor $I \to C$.

Zij $F\colon I \to C$ een inductief systeem. Definieer de deelcategorie C_F van C door als objecten paren $(T, \{T_i\}_{i\in I})$ te nemen, waarbij $T \in C$ objecten zijn en de T_i morfismen $T \to F(i)$ zó dat voor elke ongelijkheid $i \leq j$ het diagram

$$\begin{tikzcd} F(j) \arrow[rr] & & F(i) \\ & T \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

commuteert.

Definitie B.2 Een *inductieve limiet* van F is een initiaal object F^* van de categorie C_F, i.e. een object F^* in C_F met de eigenschap dat voor elk ander object $H \in C_F$ een uniek morfisme $F^* \to H$ bestaat. De inductieve limiet noteren we als $\varinjlim_{i\in I} F(i)$.

Voor een projectief systeem $F\colon I \to C$ definiëren we de deelcategorie C_F van C door als objecten paren $(T, \{T_i\}_{i\in I})$ te nemen, waarbij $T \in C$ en de T_i morfismen $F(i) \to T$ zijn zó dat voor elke ongelijkheid $i \leq j$ het diagram

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[rr] \arrow[dr] & & F(j) \arrow[dl] \\ & T & \end{tikzcd}$$

commuteert.

Definitie B.3 Een *projectieve limiet* van F is een terminaal object F^* van de categorie C_F, i.e. een object F^* in C_F met de eigenschap dat voor elk ander object $H \in C_F$ een uniek morfisme $H \to F^*$ bestaat. De projectieve limiet noteren we als $\varprojlim_{i\in I} F(i)$.

Referenties

[GTS] *Galois Theory for Schemes*, H.W. Lenstra, Jr. De volledige tekst is te vinden op de webpagina www.math.leidenuniv.nl/algebra.

[Lang] *Algebra*, Revised Third Edition of Third Edition, Serge Lang.

[ICA] *Introduction to Commutative Algebra*, M.F. Atiyah & I.G. MacDonald.

[Eisenbud] *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, David Eisenbud.

[Alg. I], [Alg. II] en [Alg. III] collegedictaten behorende bij de colleges *Algebra I, II en III*, P. Stevenhagen. De dictaten zijn te vinden op www.math.leidenuniv.nl/algebra

[Alg. II, §17] *Commutatieve Algebra*, P. Stevenhagen.

[Alg. III, §28] H.W. Lenstra. College-aantekeningen behorende bij het onderdeel oneindige Galoistheorie van het college Algebra III, te vinden op www.math.leidenuniv.nl/$\sim$ astolk/algebra3.

[Hart] *The Čech-stone Compactifications of* $\mathbf{N}$ *and* $\mathbf{R}$, K.P. Hart. De tekst is te vinden op dutiaw37.twi.tudelft.nl/$\sim$ kp/onderwijs/topologie

[Top. 1] collegedictaat behorende bij het college *Topologie I*, K.P. Hart. Zie dutiaw37.twi.tudelft.nl/$\sim$ kp/onderwijs/topologie

[MacLane], *Categories for the Working Mathematician*, Saunders Mac Lane.

Index