P. van der Linden

Speltheorie en Oekraïne

Masterscriptie

Scriptiebegeleider: Dr. F.M. Spieksma

Datum Masterexamen: 28 augustus 2014

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inleiding

Wat is speltheorie en wat voor betekenis heeft speltheorie in de praktijk? In deze scriptie worden eerst een aantal basisbegrippen bekeken, zoals het Nash-evenwicht.
Het Nash-evenwicht heeft in de praktijk niet altijd een gewenste uikomst. Bij het beroemde gevangenendilemma zouden beide spelers een langere straf krijgen, terwijl zij bij samenwerking beiden een kleine straf zouden krijgen. Om te kijken of dit resultaat verbeterd kan worden, kijken we naar de theorie van zetten door S.J. Brams[1], [2].
Naast het zoeken naar evenwichten in spellen, zullen we een aantal bekende spellen als het gevangenendilemma en het havik-duif-spel algemeen classificeren. Dit zorgt er voor dat we niet meer naar de opbrengsten hoeven te kijken, maar alleen naar de vorm van het spel.
Wanneer deze basis gelegd is zullen we dit toepassen op conflicten uit de realiteit. Eerst kijken we terug naar een reeds veelbesproken conflict: de Cubacrisis. Vervolgens zullen we kijken naar een huidig conflict in Oekraïne. Het doel hiervan is proberen te verklaren waarom dit conflict nog niet geëscaleerd is, terwijl er genoeg dingen gebeuren die ook de rest van de wereld beïnvloeden.
Als laatste willen we nog een opmerking maken over de oorspronkelijke opzet van deze scriptie. In eerste instantie is de tekst gericht op wiskunde D leerlingen in het middelbaar onderwijs. Hierdoor is de manier van schrijven nog veel op leerlingen gericht.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding speltheorie en matrixspelen

Speltheorie bestudeert problemen waarbij meer dan 1 beslisser aanwezig is. Een beslisser neemt op vaste momenten een beslissing, in de speltheorie heet een beslisser een speler. Spelers hebben als doelstelling om het beste resultaat voor zichzelf te halen. Spelers kunnen hiervoor strategieën kiezen waaronder zij een bepaalde uitbetaling verwachten.
Een belangrijke afspraak is dat er sprake is van volledige informatie: alle spelers weten wat de opbrengst is van hun keuze gecombineerd met de keuzes van andere spelers. Een strategie is niets anders dan vooraf bepalen welke keuzes een speler op welk moment zal maken. De spelers kennen op dat moment niet de gekozen strategie van een ander.
Door de jaren heen zijn er verschillende modellen ontstaan. Deze zijn als volgt ingedeeld:

- tweepersoons-spelen en meer-persoons-spelen.
- nulsomspelen (de ene speler betaalt aan de andere speler) en niet-nulsomspelen.
- coöperatieve spelen en noncoöperatieve spelen.

Wij zullen veelal coöperatieve spelen met twee spelers beschouwen. Voordat wij dit kunnen uitleggen, zullen we eerst een aantal dingen moeten bespreken, zoals bijvoorbeeld matrices en bimatrices. Veel van de lezers weten waarschijnlijk al wat een matrix is, maar voor de volledigheid behandelen we de definitie hier.

1.1 Matrices

Een matrix is een rechthoek met getallen. Deze getallen staan netjes onder elkaar in rijen en kolommen. Wanneer we over een n x m-matrix spreken, dan bedoelen we een matrix met n rijen en m kolommen. We noemen dit de omvang van een matrix. Hierbij mogen n en m ook gelijk zijn aan elkaar. Wanneer dit het geval is spreken we over een vierkantsmatrix. De getallen in een matrix noemen we elementen. Een algemeen voorbeeld van een n x m-matrix A is:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Zoals je kunt zien, wordt een getal op een willekeurige rij en willekeurige kolom, zeg rij i en kolom j, weergegeven met a_{ij}.
Bekijk de volgende 2 x 3-matrix A:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Het element a_{12} in deze matrix is het element op de eerste rij en de eerste kolom, dus $a_{12} = 4$.
Nu we weten wat een matrix is, kun je je afvragen: ”Wat kunnen we hier nu mee?”. Voordat we matrices in zullen zetten om tweepersoonspellen op te lossen, bespreken we een belangrijke bewerking die wij uit kunnen voeren met matrices: matrixvermenigvuldiging.

1.2 Matrixvermenigvuldiging

Net zoals we getallen met elkaar kunnen vermenigvuldigen, kunnen we ook matrices met elkaar vermenigvuldigen. Dit gaat alleen net een beetje anders dan dat je gewend bent. Het is namelijk niet altijd mogelijk om twee matrices met elkaar te vermenigvuldigen.
Laten we beginnen bij het begin en eerst afspreken hoe je twee matrices moet vermenigvuldigen. We beginnen met een voorbeeld.

Voorbeeld
Gegeven zijn de matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \textit{ en } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Het resultaat van de vermenigvuldiging $A \cdot B$ is nu:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 11 & 25 \\ 19 & 20 \end{pmatrix}.$$

Met het bovenstaand resultaat heb je waarschijnlijk nog geen idee wat er nu gebeurd is om tot dit resultaat te komen. Laten we kijken naar het element 11. Om deze te berekenen bekijken we rij 1 van matrix A en kolom 1 van matrix B. Het eerste element van deze rij vermenigvuldigen we met het eerste element van de kolom. Dit doen we ook met het tweede en derde element. Deze 3 vermenigvuldigingen worden opgeteld om 11 te krijgen: $1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 2 + 0 + 9 = 11$.
Om 25 te krijgen doe je hetzelfde alleen nu combineer je rij 1 van matrix A met kolom 2 van matrix B: $1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 1 + 12 + 12 = 25$. *De getallen 19 en 20 zijn op dezelfde manier te berekenen, alleen nu wordt rij 2 van matrix A met kolom 1 respectievelijk kolom 2 van matrix B vermenigvuldigd (probeer dit eens zelf uit).*

Dit voorbeeld laat dus zien dat je de elementen van matrix $A \cdot B$ krijgt door een rij van matrix A met een kolom van matrix B te vermenigvuldigen en op te tellen. Maar lukt dit ook als de rij van matrix A langer is dan de kolom van matrix B? Het antwoord hier op is nee, want dan blijft er een getal over. Algemeen geldt:

Twee matrices kunnen alleen vermenigvuldigd worden als de het aantal kolommen van de eerste matrix gelijk is aan het aantal rijen van de tweede matrix.

Wanneer we dit beschrijven met behulp van het begrip 'omvang', betekent dit dat twee matrices alleen vermenigvuldigd kunnen worden als matrix A omvang $n \times m$ heeft en matrix B omvang $m \times p$. Het resultaat van de vermenigvuldiging geeft een matrix van omvang $n \times p$.
Tot op dit punt hebben we alleen maar een voorbeeld gezien en aan de hand daarvan besproken wanneer 2 matrices vermenigvuldigd mogen worden. Hieronder zullen we het concept matrixvermenigvuldiging nu algemeen maken.

Matrixvermenigvuldiging

De elementen van de matrix, die ontstaat door het vermenigvuldigen van matrix A met omvang $n \times m$ en matrix B met omvang $m \times p$, zijn als volgt te berekenen:

$$(A \cdot B)_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{im} \cdot b_{mj} = \textstyle\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Het teken $\sum_{k=1}^{m}$ is een snellere manier om op te schrijven dat je moet optellen. De notatie $k = 1$ en m onder en boven het sommatieteken geven aan waar je begint met optellen en waar je eindigt.
Nu we weten hoe matrixvermenigvuldiging te werk gaat, kunnen we ons gaan richten op speltheorie. Daarvoor zullen we in de volgende paragraaf kijken naar zogenaamde bimatrices.

1.3 Bimatrices en bimatrixspelen

In een matrix staat op elke combinatie van een rij en een kolom 1 getal. Deze getallen zijn in de speltheorie de uitbetalingen aan 1 of meer spelers. Echter in de meeste gevallen is het zo dat niet elke speler dezelfde uitbetaling heeft. Bij matrixspelen voor 2 spelers worden dan zogenaamde bimatrices gebruikt. Een bimatrix ziet er als volgt uit:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} a_{11}, b_{11} & a_{12}, b_{12} & \dots & a_{1j}, b_{1j} & \dots & a_{1n}, b_{1n} \\ a_{21}, b_{21} & a_{22}, b_{22} & \dots & a_{2j}, b_{2j} & \dots & a_{2n}, b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}, b_{i1} & a_{i2}, b_{i2} & \dots & a_{ij}, b_{ij} & \dots & a_{in}, b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}, b_{m1} & a_{m1}, b_{m1} & \dots & a_{mj}, b_{mj} & \dots & a_{mn}, b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Een bimatrix bestaat dus als het ware uit twee matrices, zogenaamde uitbetalingsmatrices. Een matrix A die de uitbetalingen bevat voor speler 1 en een matrix B die de uitbetalingen bevat voor speler 2. Het eerste getal van een element in een bimatrix is de uitbetaling aan speler 1 en het tweede getal is de uitbetaling aan speler 2.
Het is de bedoeling dat beide spelers een keuze gaan maken. Afspraak is dat speler 1 altijd een rij kiest uit matrix A en speler 2 kiest altijd een kolom uit matrix B. Elke rij of kolom correspondeert met een strategie. Het kiezen van een strategie doen de spelers onafhankelijk van elkaar, zij kunnen dus niet overleggen.
Laten we de rijen van boven naar beneden nummeren van 1 t/m n en de

kolommen van links naar rechts met nummer van 1 t/m m. Het kiezen van strategie 2 door speler 1 betekent dan dat hij kiest voor rij 2. Het kiezen van strategie 1 door speler 2, betekent dat speler 2 kiest voor kolom 1.
Wanneer beide spelers een keuze voor een strategie gemaakt hebben, ontstaat er een strategiepaar. Dit strategiepaar geeft aan wat de uitbetaling aan beide spelers wordt. Een strategiepaar $(2, 1)$ geeft de spelers als uitbetaling element a_{21} respectievelijk b_{21} uit hun uitbetalingsmatrices.
Ondanks het feit dat de spelers niet van elkaar weten welke strategie zij kiezen is er wel sprake van open informatie. Dit betekent dat de spelers weten hoe matrices A en B er uit zien. Met andere woorden: beide spelers weten welke opbrengst iedere speler heeft bij het spelen van een strategie.
Om het een en ander te verduidelijken, kijken we naar onderstaand voorbeeld van een bimatrixspel.

Voorbeeld
Gegeven is de volgende bimatrix:

$$\begin{pmatrix} 4,3 & 0,0 \\ 0,0 & 2,1 \end{pmatrix}.$$

Zowel speler 1 als speler 2 willen een zo groot mogelijk winst, dus zullen beiden strategie 1 spelen. De oplossing van dit spel is strategiepaar (1,1) en speler 1 krijgt 4 uitbetaald en speler 2 krijgt 3.

Dit voorbeeld is natuurlijk makkelijk op te lossen. Speler 1 zal nooit strategie 2 kiezen, omdat hij dan minder uitbetaald krijgt. Dit geldt ook voor speler 2. Een oplossing waarbij het kiezen van andere strategie door één van de spelers tot een slechtere uitbetaling leidt, noemen we een evenwicht. John Nash heeft in 1951 bewezen dat elk bimatrixspel een evenwicht heeft, zo'n evenwicht wordt dan ook een Nash-evenwicht genoemd. Dit evenwicht hoeft niet deterministisch te zijn, dit houdt in dat het evenwicht van kansen af kan hangen.

Nash-evenwicht
Een strategiepaar waarbij het kiezen van een andere strategie door precies één van de spelers niet tot een betere uitbetaling leidt voor deze speler, heet een Nash-evenwicht.

Een spel kan meer dan een Nash-evenwicht hebben, maar hoeft niet altijd makkelijk te vinden zijn, zoals in het voorgaande voorbeeld. Een voorbeeld van een spel waarbij dit het geval is, is 'the battle of the sexes'.
Bij dit spel kijken we naar een man en een vrouw die ieder kunnen kiezen om naar een voetbalwedstrijd gaan of naar het theater. De man wil liever naar de voetbalwedstrijd en de vrouw liever naar het theater. Diegene die zijn zin krijgt, beschouwt dit als een uitbetaling van 3 en de ander als uitbetaling van 1. Krijgen ze geen van beiden hun zin dan beschouwen zij dit als een

uitbetaling van 0.
Het bimatrixspel dat bij the battle of the sexes hoort, staat hieronder:

Voorbeeld: "The battle of the sexes"

$$\begin{pmatrix} 3,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,3 \end{pmatrix}.$$

De man is speler 1 en kiest als strategie een rij en de vrouw kiest een kolom. De man zal kiezen voor rij 1, omdat hij dan uitbetaling 3 hoopt te krijgen. De vrouw zal voor de rechterkolom kiezen, omdat zij daar uitbetaling 3 hoopt te krijgen. Wanneer zij deze keuzes maken, dan krijgt de man uitbetaling $a_{12} = 0$ *en de vrouw uitbetaling* $b_{12} = 0$. *Zowel de man als de vrouw staan dan met lege handen. De vraag luidt nu dus: "Hoe kunnen de man en de vrouw een hogere uitbetaling krijgen, zonder te overleggen?".*

Om een Nash-evenwicht te vinden bij de 'the battle of the sexes' zijn er twee mogelijkheden: het spelen van een beste antwoord-strategie of het spelen van een zogenaamde gemengde strategie. Wat beide soorten strategieën inhouden, zullen we beschrijven in de volgende paragrafen.

1.3.1 Beste antwoord strategie

Het spelen van een beste antwoord-strategie is gebaseerd op het feit dat een speler zijn uitbetaling wil maximaliseren. Algemeen betekent dit: speler 1 wil graag dat zijn strategie i^* een zo hoog mogelijke uitbetaling geeft tegen de strategie j^* van speler 2:

$$a_{i^*j^*} = \max_i a_{ij^*}.$$

Dit houdt dus in dat speler 1 een strategie i^* kiest zo, dat wanneer speler B strategie j^* kiest, hij de grootste uitbetaling krijgt uit kolom j^*.
Op dezelfde manier wil speler 2 graag dat zijn strategie j^* een zo hoog mogelijke uitbetaling krijgt tegen strategie i^* van speler 1:

$$b_{i^*j^*} = \max_j b_{i^*j}.$$

Praktisch gezien betekent dit dat speler 1 zijn strategie zal kiezen door er vanuit te gaan dat speler 2 met zekerheid strategie 1 of strategie 2 speelt. Om het een ander duidelijk te krijgen, kijken we nogmaals naar de 'the battle of the sexes'.
Het spelen van een beste antwoord-strategie van de man houdt in dat hij aanneemt dat de vrouw strategie 1 speelt. De man heeft dan keuzes uit de uitbetalingen 3 en 0. Hij zal in dat geval altijd voor strategie 1 kiezen.

Vervolgens doet hij hetzelfde voor het geval de vrouw met strategie 2 speelt. De man heeft dan keuze uit de uitbetaling 0 en 1. En kiest dan voor strategie 2.
Als de vrouw ook een beste antwoord-strategie speelt, dan komt zij tot dezelfde conclusie. De Nash-evenwichten die we dan vinden zijn de strategieparen (1,1) en (2,2). Ofwel uitbetaling 3 voor de man en 1 voor de vrouw of andersom. In beide gevallen heeft het geen nut voor zowel de man of de vrouw om een andere keuze te maken: de uitbetalingen zijn dan 0.

Helaas is het niet altijd mogelijk om een Nash-evenwicht te vinden met behulp van het spelen van beste antwoord strategieën. Een voorbeeld hiervan is de volgende bimatrix:

Voorbeeld

$$\begin{pmatrix} 1,4 & 4,3 \\ 2,3 & 3,9 \end{pmatrix}.$$

Wanneer speler 1 er vanuit gaat dat speler 2 altijd strategie 1 speelt, dan kiest speler 1 strategie 2 (want $2 > 1$). Als speler 1 er vanuit gaat dat speler 2 strategie 2 speelt, dan kiest speler 1 voor strategie 1.
In de uitbetalingsmatrix voor speler 1 is met sterretjes aangegeven wat zijn beste reacties zijn op speler 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4^* \\ 2^* & 3 \end{pmatrix}$$

Speler 2 doet nu hetzelfde en zal voor strategie 1 kiezen wanneer, speler 1 altijd voor strategie 1 zal kiezen. Als speler 1 altijd strategie 2 zal spelen, dan speelt speler 2 ook strategie 2. Ook in de uitbetalingsmatrix van speler 2 zijn de beste reacties met sterretjes aangegeven.

$$\begin{pmatrix} 4^* & 3 \\ 3 & 9^* \end{pmatrix}$$

In de onderstaande bimatrix zijn bovenstaande uitbetalingsmatrices weer samengevoegd met sterretjes.

$$\begin{pmatrix} 1,4^* & 4^*,3 \\ 2^*,3 & 3,9^* \end{pmatrix}$$

We zien nu dat er geen plek in de bimatrix is, waarbij zowel speler 1 als speler 2 een sterretje heeft staan. Dit betekent dat er geen Nash-evenwicht te vinden is met behulp van beste antwoorden. In elke geval zal één van de spelers een betere uitbetaling kunnen krijgen door af te wijken.

De manier waarop we een Nash-evenwicht hebben geprobeerd te vinden in het bovenstaande voorbeeld, heet een deterministisch evenwicht. Je probeert dan een evenwicht te vinden, waarvan de uitbetalingen in de uitbetalingsmatrices staan. Dit kan niet altijd. Echter met het spelen van zogenaamde gemengde strategieën, kun je alsnog een Nash-evenwicht vinden. Hoe dit werkt, zullen we in de volgende paragraaf bespreken.

1.3.2 Gemengde strategie

Bij het spelen van een gemengde strategie gaan we er vanuit dat beide spelers de keuze voor en strategie kunnen maken aan de hand van een kansexperiment. Een voorbeeld hiervan kan zijn dat speler 1 een munt opwerpt en aan de hand van het resultaat van de worp boven, (K) of onder, (M) kiest (beide met kans $\frac{1}{2}$).
Wanneer spelers een kansexperiment gebruiken om hun keuze te bepalen, kunnen we de verwachting van een speler uitrekenen. Voor de vrouw in 'the battle of the sexes' geeft dit de volgende verwachte opbrengsten wanneer zij links respectievelijk rechts kiest:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 0 &= \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 3 &= 1\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

In dit geval zal de vrouw dus altijd rechts spelen wanneer de man een munt opwerpt, omdat haar verwachte opbrengst dan groter is dan wanneer zij links zal spelen. Het opwerpen van een munt noemen we een gemengde strategie, omdat de man met kans $\frac{1}{2}$ boven kiest en met kans $\frac{1}{2}$ onder kiest. Aangezien de vrouw bij het kiezen van rechts een hogere verwachte uitbetaling heeft dan bij het kiezen van links noemen we het kiezen van rechts een beste antwoord op $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
Door gemengde strategieën hebben beide spelers dus meer mogelijkheden. Door het spelen van een gemengde strategie kunnen we nog een Nash-evenwicht bepalen voor 'the battle of the sexes'. Noem hiervoor de gemengde strategie van de man $(\lambda, 1-\lambda)$ en de gemengde strategie van de vrouw $(\mu, 1-\mu)$. Hiervoor geldt: $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$.
Als we de uitbetalingsmatrix voor de vrouw bekijken:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Dan kunnen we de verwachtingswaarde van beide strategieën van de vrouw berekenen:

$$\begin{aligned}E_v(\textit{strategie } 1)=\lambda\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 0 &= \lambda\\ E_v(\textit{strategie } 2)=\lambda\cdot 0+(1-\lambda)\cdot 3 &= 3(1-\lambda).\end{aligned}$$

De man wil nu zijn strategie zo kiezen dat de verwachtingswaarde van strategie 1 en strategie 2 aan elkaar gelijk zijn. Het maakt dan voor hem niet meer uit welke strategie de vrouw kiest. Er moet dus gelden: $\lambda = 3(1-\lambda)$. Dit geeft $p = \frac{3}{4}$. Dus wanneer de man de gemengde strategie $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ speelt, dan maakt het voor de vrouw niet uit welke strategie zij kiest.

De vrouw kan hetzelfde doen voor zijn uitbetalingsmatrix. Wanneer je dit oplost vind je: $\mu = \frac{1}{4}$. Dus wanneer de vrouw de gemengde strategie $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ speelt, dan maakt het niet uit welke strategie de man speelt.
Wanneer de man en vrouw deze gemengde strategieën spelen, loont het voor geen van beiden om een andere strategie te kiezen, omdat de verwachte uitbetaling dan kleiner is. Het strategiepaar $((\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}))$ is dan ook een Nash-evenwicht is voor de 'battle of the sexes'.

1.3.3 Algemeen

In voorgaande paragrafen zijn de begrippen gemengde strategieën en beste antwoord strategieën toegepast op twee voorbeelden waarbij beide spelers evenveel keuzes hebben. Beide spelers hebben dus een vierkante uitbetalingsmatrix van dezelfde omvang. Wij zullen voorlopig blijven kijken naar spellen waarvoor dit geldt. In deze paragraaf zullen we, met behulp van matrixvermenigvuldiging, de Nash-evenwichten van een spel leren te bepalen. Op deze manier kunnen we gelijk alle evenwichten vinden, dus we hoeven niet apart naar het beste antwoord of gemengde strategieën te kijken.
De kans dat speler 1 strategie 1 kiest noemen we nu λ en de kans dat speler 2 strategie 1 kiest noemen we μ. Als we de uibetalingsmatrices van 'the battle of the sexes' nogmaals bekijken, dan kunnen we nu sneller uitrekenen wat de verwachte opbrengst is voor zowel de man als de vrouw:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

De verwachte opbrengst voor de man is nu te vinden door te realiseren dat de uitbetaling 3 met kans $\lambda\mu$ plaatsvind en de uitbetaling 1 met kans $(1-\lambda)(1-\mu)$. Voor de vrouw is dit precies omgekeerd: uitbetaling 1 vindt plaats met kans $\lambda\mu$ en uitbetaling 3 met kans $(1-\lambda)(1-\mu)$.
Dit geeft de volgende verwachte uitbetalingen:

$$\begin{array}{rclcl} E(man) & = & 3\lambda\mu + (1-\lambda)(1-\mu) & = & 1 + \lambda(4\mu - 1) - \mu \\ E(vrouw) & = & 1\lambda\mu + 3(1-\lambda)(1-\mu) & = & 3 + \mu(4\lambda - 3) - 3\lambda \end{array}$$

Door gebruik te maken van matrices van omvang 2×1, ook wel vectoren genoemd, kunnen we een gemakkelijkere schrijfwijze gebruiken. Het berekenen van de verwachte uitbetalingen voor beide spelers gebeurt dan door het uitrekenen van $x^T Ay$ en $x^T By$. Hier betekent x^T dat de vector verandert in een vector van afmeting 1×2, waarbij de kolom een rij is geworden. Dit heet de getransponeerde van x, dus:

$$x^T Ay = \begin{pmatrix} \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ 1-\mu \end{pmatrix} = 1 + \lambda(4\mu - 1) - \mu \tag{1.1}$$

en

$$x^T By = \begin{pmatrix} \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ 1-\mu \end{pmatrix} = 3 + \mu(4\lambda - 3) - 3\lambda. \tag{1.2}$$

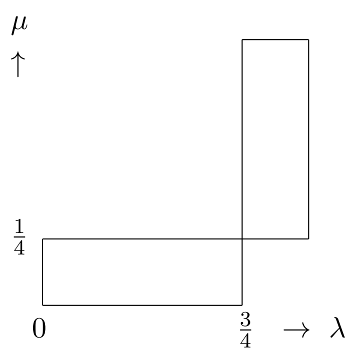
Vanaf dit punt kunnen we de Nash-evenwichten bepalen door naar verschillende waarden λ en μ te kijken. We weten dat beide spelers hun uitbetaling willen maximaliseren. Als we vergelijking (1.1) bekijken, dan hangt het maximaliseren van de uitbetaling voor de man af van de keuze voor μ van de vrouw.

Stel nu dat de vrouw μ kiest zodat $4\mu - 1 < 0$, dan kiest de vrouw dus voor $0 \leq \mu < \frac{1}{4}$. In dit geval zal het niet lonen voor de man om te kiezen voor $\lambda > 0$, want dan zou zijn verwachte uitbetaling kleiner worden dan wanneer hij kiest voor $\lambda = 0$. De man zal dus kiezen voor $\lambda = 0$, wanneer de vrouw een μ kiest waarvoor geldt $0 \leq \mu < \frac{1}{4}$.

Wanneer de vrouw μ nu kiest zodat $4\mu - 1 > 0$, dan kiest de vrouw dus voor $\frac{1}{4} < \mu \leq 1$. Nu loont het voor de man λ zo groot mogelijk te kiezen. Immers zijn verwachte uitbetaling wordt dan groter. Dus de man zal kiezen voor $\lambda = 1$, wanneer de vrouw een μ kiest waarvoor geldt $\frac{1}{4} < \mu \leq 1$.

Maar wat nu als $4\mu - 1 = 0$? Dan wordt (1.1): $1 + \mu$. De keuze van λ door de man heeft dan geen invloed meer, en dus is zijn uitbetaling maximaal voor een willekeurige keuze van λ. Dit is het geval wanneer $\mu = \frac{1}{4}$, immers alleen dan geldt $4\mu - 1 = 0$.

Hetzelfde kun je doen voor vergelijking (1.2). Wanneer je dit goed doet dan vind je: $\mu = 0$ wanneer $0 \leq \lambda < \frac{3}{4}$, $\mu = 1$ wanneer $\frac{3}{4} < \lambda \leq 1$ en een willekeurige keuze voor μ wanneer $\lambda = \frac{3}{4}$. Wanneer we dit in een grafiek zetten, dan kunnen we makkelijk aflezen voor welke combinaties van μ en λ we te maken hebben met een (gemengd) Nash-evenwicht.



Uit de grafiek is bij het snijpunt van de lijnen $\lambda = \frac{3}{4}$ en $\mu = \frac{1}{4}$ af te lezen welke gemengde strategieën een Nash-evenwicht leveren. De overige 2 Nash-evenwichten zijn de combinatie van $\lambda = \mu = 0$ en $\lambda = \mu = 1$. Dit geeft de volgende Nash-evenwichten:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ geeft Nash-evenwicht (3,1).}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ geeft Nash-evenwicht (1,3).}$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ en } y = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ geeft een gemengd Nash-evenwicht } (\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}).$$

Kortom voor het oplossen van een bimatrixspel voeren we eerst de vermenigvuldingen $x^T Ay$ en $x^T By$ uit om de verwachte uitbetalingen te bepalen. Aan de hand daarvan kunnen we voor speler 1 en 2 deze uitbetalingen maximaliseren en bepalen welke combinaties van en μ tot Nash-evenwichten leiden. Het is zelfs altijd zo dat we 2 van de Nash-evenwichten kunnen vinden door het combineren van de minimale en maximale waarden van λ en μ.
De formele definitie van het proces zoals hierboven beschreven luidt als volgt:

Evenwichtspaar(L.C.M. Kallenberg [7])
Een paar strategieën (x^*, y^*) heet een evenwichtspaar wanneer:

$$(x^*)^T Ay^* \geq x^T Ay^* \textit{ en } (x^*)^T By^* \geq (x^*)^T Ay \textit{ voor alle } x \in X \textit{ en } y \in Y$$

Hierbij zijn X en Y de verzamelingen van strategieën die speler 1 respectievelijk speler 2 kunnen spelen.

Hoofdstuk 2

Classificatie van 2x2 bimatrix spelen

In dit hoofdstuk zullen we kijken naar bi-matrix spelen van de volgende vorm:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} P, P & Q, R \\ R, Q & S, S \end{pmatrix}$$

Voor de situaties die wij gaan bekijken spreken we het volgende af: $P > S$ en $R > Q$. We willen er op deze manier voor zorgen dat het kiezen van strategie 1 van beide spelers een betere uitbetaling geeft dan als er gekozen wordt voor strategie 2 door beide spelers. De keuze voor $R > Q$ is een keuze die genomen is voor het gemak van de analyse. Er kan gekeken worden naar gelijkheid van P en S en/of R en Q, echter de analyse daarvan verschilt per situatie. Om die reden laten we gelijkheid voorlopig buiten beschouwing.

Op basis van de gestelde voorwaarden, kunnen we de volgende 6 classificaties maken:

1. $R > P > Q > S$
2. $P > R > S > Q$
3. $P > S > R > Q$
4. $R > Q > P > S$
5. $R > P > S > Q$
6. $P > R > Q > S$

Voor deze situaties kunnen we proberen evenwichtsparen te vinden op de manier zoals beschreven in hoofdstuk 1. We zullen zien dat deze manier maar in 4 van de 6 gevallen werkt.

2.1 Nash-evenwichten

Zoals gezegd zullen we eerst kijken naar de classificaties waarbij we Nash-evenwichten kunnen vinden op de manier zoals beschreven in hoofdstuk 1. Voor dat we de classificaties per stuk zullen bekijken, werken we hier eerst de te vinden evenwichtsparen uit. Dit zal ons dubbel werk besparen. We beginnen met het berekenen van $x^T Ay$ en $x^T By$:

$$x^T Ay = S + \lambda(\mu(P - R + S - Q) + Q - S) + \mu(R - S) \tag{2.1}$$

en

$$x^T By = S + \mu(\lambda(P - R + S - Q) + Q - S) + \lambda(R - S). \tag{2.2}$$

Deze uitkomsten zijn op verwisseling van λ en μ hetzelfde. Dit is te verklaren door het feit dat beide spelers voor dezelfde keuze staan. Hierdoor geldt $B = A^T$. In hoofdstuk 1 hebben we uitgelegd dat dit betekent dat de rijen en kolommen verwisseld worden. Met andere woorden de kolommen van matrix B zijn de rijen van matrix A en omgekeerd.
Net als in hoofdstuk kunnen we nu uitrekenen voor welke waarden van λ en μ de verwachte uitbetalingen van de spelers maximaal is. En dus bij het spelen van welke (gemengde) strategieën er is sprake is van een Nash-evenwicht.

2.1.1 Uitbetalingen voor $\mu = 0$ of $\mu = 1$

Laten we eerst speler 1 bekijken. Wanneer speler 2 kiest voor $\mu = 0$, dan wordt (2.1): $S + \lambda(Q - S)$. We kunnen nu nog niets zeggen over de keuze van λ door speler 1, immers dit hangt af $Q - S$. Wanneer $Q - S > 0$, dan wordt de verwachte uitbetaling groter bij een keuze van een grotere λ. Maar wanneer $Q - S < 0$, dan leidt een keuze voor een grotere λ voor een slechter verwachte uitbetaling.
Hetzelfde doet zich voor wanneer er voor $\mu = 1$ wordt gekozen door speler 2. Dan wordt (2.1): $\lambda(P - R) + R$. Nu hangt de verwachte uitbetaling af van $P - R$. Dus de keuze van λ hangt voor speler 1 af van de classificatie die we gaan bekijken. Hetzelfde geldt voor speler 2: ook bij hem zal de keuze van μ afhangen van $Q - S$ en $P - R$.

2.1.2 Uitbetalingen voor gemengde strategieën

Er kan nog wel gekeken worden wat er gebeurt wanneer $\mu(P - R + S - Q) + Q - S = 0$ en $\lambda(P - R + S - Q) + Q - S = 0$. Omdat $P - R \neq 0$ en $S - Q \neq 0$, is dit niet het geval voor λ of μ gelijk aan 0 of 1. De verwachte uitbetalingen van de spelers worden nu:

$$x^T Ay = S + \mu(R - S) \tag{2.3}$$

en

$$x^T By = S + \lambda(R - S). \tag{2.4}$$

Omdat geldt $\mu(P-R+S-Q)+Q-S = 0$ en $\lambda(P-R+S-Q)+Q-S = 0$, kunnen we bepalen dat dit het geval is wanneer $\lambda = \frac{S-Q}{P-R+S-Q} = \mu$. We laten hier vooralsnog buiten beschouwing of er wordt voldaan aan $0 < \lambda, \mu < 1$ en of $P - R + S - Q \neq 0$.
We kunnen (2.3) en (2.4) nu schrijven als:

$$x^T Ay = S + \frac{(S-Q)(R-S)}{P-R+S-Q} \tag{2.5}$$

en

$$x^T By = S + \frac{(S-Q)(R-S)}{P-R+S-Q}. \tag{2.6}$$

Het spelen van gemengde strategieën levert een Nash-evenwicht met de volgende strategieën x en y op:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{S-Q}{P-R+S-Q} \\ \frac{P-R}{P-R+S-Q} \end{pmatrix} \text{ en } y = \begin{pmatrix} \frac{S-Q}{P-R+S-Q} \\ \frac{P-R}{P-R+S-Q} \end{pmatrix}.$$

Zoals gezegd weten wij niet of voldaan wordt aan de voorwaarde: $0 < \lambda, \mu < 1$. Daarom zullen per classificatie bekijken of $\frac{S-Q}{P-R+S-Q}$ hieraan voldoet.
In onderstaande tabel staat aangegeven voor welke classificaties er met zekerheid vastgesteld kan worden dat geldt $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$. We hebben naar zowel naar het teken van de noemer als die van de teller gekeken.

	1	2	3	4	5	6
$S-Q$	-	+	+	-	+	-
$P-R+S-Q$	-	+	+	-	+/-	+/-

Uit de tabel kunnen we nu concluderen dat voor situaties 1 tot en met 4 aan de voorwaarde $0 < \lambda, \mu < 1$ wordt voldaan. Dit kan doordat het quotiënt positief(zowel noemer als teller hebben hetzelfde teken) is en $|P-R+S-Q| > |S-Q|$. Dit laatste klopt omdat in deze vier gevallen $P-R$ en $S-Q$ hetzelfde teken hebben. Hierdoor weten we ook zeker dat $P-R+S-Q \neq 0$. Echter voor situatie 5 en 6 wordt, zoals gezegd, niet aan de voorwaarden voldaan. Dit is in de tabel terug te zien door $+/-$. Dit betekent dat het teken van $P-R+Q-S$ niet vast staat. Deze kan zowel positief als negatief zijn, afhankelijk van de waarden van P, Q, R en S.
De oplossing van deze classificaties is te vinden aan de hand van zogenaamde dominante strategieën. Hoe dit werkt, zullen we later op terug komen. We gaan nu eerst voor elke classificatie kijken naar een bekend spel en wat voor elke situatie de Nash-evenwichten zijn.

2.2 $R > P > Q > S$

Bij het bekijken van de classificaties zullen wij bij elke classificatie een voorbeeld van een bekend spel geven. In deze paragraaf zullen we kijken naar de 'hawk-dove-game', of wel het havik-duif spel.
Bij dit spel gaat het om het verkrijgen van voedsel. Een havik zal vechten voor zijn voedsel en een duif niet. Dit betekent dat een speler als aggresief beschouwt wordt wanneer hij vecht voor zijn uitbetaling. Een speler wordt als vredelievend gezien wanneer hij niet om zijn uitbetaling vecht.
Dit houdt in dat er zich een aantal situaties voor kunnen doen:

1. Beide spelers zijn vredelievend en delen de buit.
2. Een van de spelers is aggresief en neemt de hele buit mee.
3. Beide spelers is aggresief en zullen elkaar verwonden.

De volgende bimatrix is een mogelijke beschrijving voor het havik-duifspel:

Havik-duif

$$\begin{pmatrix} 2,2 & 0,5 \\ 5,0 & -1,-1 \end{pmatrix}.$$

We hebben er hiervoor gekozen om bij rechtsonder voor een negatieve uitbetaling te kiezen, omdat de spelers elkaar zullen 'verwonden'.
Met behulp van paragraaf 2.1.2 kunnen we nu de gemengde strategie die bij dit spel hoort bepalen. Met de bovenstaande getallen zijn dit: $((\frac{1}{4}, \frac{3}{4}); (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}))$.
We weten uit paragraaf 2.1.1 dat er nog 2 Nash-evenwichten te vinden zijn. Wanneer speler 2 kiest voor $\mu = 0$ of $\mu = 1$, dan zal speler 1 kijken naar het teken van $Q - S$ respectievelijk $P - R$.
In het geval van het gegeven havik-duif-spel is $Q - S = 0 - -1 = 1$. Het teken is positief, dus zal speler 1 kiezen voor $\lambda = 1$ wanneer $\mu = 0$. $P - R = 2 - 5 = -3$. Het teken van $P - R$ is negatief, dus wanneer speler 2 kiest voor $\mu = 1$, dan kiest speler 1 voor $\lambda = 0$. De strategieën die de andere 2 Nash-evenwichten beschrijven zijn: $((0, 1); (1, 0))$ en $((1, 0); (0, 1))$.
In het algemeen zijn de Nash-evenwichten van de classificatie $R > P > Q > S$:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ geeft Nash-evenwicht } (R, Q).$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ geeft Nash-evenwicht } (Q, R).$$

$x = \begin{pmatrix} \frac{S-Q}{P-R+S-Q} \\ \frac{P-R}{P-R+S-Q} \end{pmatrix}$ en $y = \begin{pmatrix} \frac{S-Q}{P-R+S-Q} \\ \frac{P-R}{P-R+S-Q} \end{pmatrix}$ geeft een gemengd Nash-evenwicht $(\frac{SP-QR}{P-R+S-Q}, \frac{SP-QR}{P-R+S-Q})$.

2.3 $P > R > S > Q$

Een bekend spel dat bij deze classificatie hoort is de zogenaamde 'Stag hunt', ofwel hertenjacht. Dit spel kan als volgt beschreven worden: 2 jagers hebben een grote bok in het bos gesignaleerd. Zij weten precies de plekken waar hij vaak komt, echter wanneer hij daar precies komt is niet bekend. Het vangen van een bok levert extra veel vlees op.
In hetzelfde bos wonen ook meerdere hindes. Deze herten leveren minder vlees op dan een bok. De bok kunnen de jagers alleen samen vangen, maar een hinde is alleen te vangen. In het eerste geval delen ze de bok en anders kunnen ze alleen een hinde houden.
Een jager kan dus kiezen om te wachten op de bok of om toch voor een eerder verschenen hinde te gaan. Dit levert de volgende drie situaties op:

1. Beide jagers wachten niet en vangen de eerste de beste hinde en moeten deze delen.

2. Een van de jagers vangt een hinde en de ander blijft met lege handen achter.

3. Beide jagers wachten en vangen de bok, die zij delen.

Om dit probleem om te zetten naar een spel, zullen wij de opbrengsten van de bok en hinde in getallen uitdrukken. Een mogelijke bimatrix bij dit spel is:

Hertenjacht

$$\begin{pmatrix} 5,5 & 0,4 \\ 4,0 & 2,2 \end{pmatrix}.$$

Het element linksboven komt dan overeen met beiden op de bok wachten en samen voor de hinde gaan is rechtsonder. Omdat de hinde gedeeld wordt, heeft deze waarde 4 wanneer 1 van de jagers haar alleen vangt. Dit hoeft voor andere situaties niet het geval te zijn.
Met behulp van paragraaf 2.1.2 kunnen we nu de gemengde strategie die bij dit spel hoort bepalen. Met de bovenstaande getallen is dit: $((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}); (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$. We weten uit paragraaf 2.1.1 dat er nog 2 Nash-evenwichten te vinden zijn. Wanneer speler 2 kiest voor $\mu = 0$ of $\mu = 1$, dan zal speler 1 kijken naar het

teken van $Q - S$ respectievelijk $P - R$.
In het geval van het gegeven hertenjacht-spel is $Q - S = 0 - 2 = -2$ en dus is het teken negatief. Speler 1 zal dan kiezen voor $\lambda = 0$ wanneer $\mu = 0$. $P - R = 5 - 4 = 1$ heeft een positief teken, dus wanneer speler 2 kiest voor $\mu = 1$, dan kiest speler 1 voor $\lambda = 1$. De strategieën die de andere 2 Nash-evenwichten beschrijven zijn: $((1, 0); (1, 0))$ en $((0, 1); (0, 1))$.
In het algemeen geval zijn de Nash-evenwichten van de classificatie $P > R > S > Q$:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ geeft Nash-evenwicht } (P, P).$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ geeft Nash-evenwicht } (S, S).$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{S-Q}{P-R+S-Q} \\ \frac{P-R}{P-R+S-Q} \end{pmatrix} \text{ en } y = \begin{pmatrix} \frac{S-Q}{P-R+S-Q} \\ \frac{P-R}{P-R+S-Q} \end{pmatrix} \text{ geeft een gemengd Nash-evenwicht } \left(\frac{SP-QR}{P-R+S-Q}, \frac{SP-QR}{P-R+S-Q}\right).$$

2.4 $P > S > R > Q$

Van de classificaties die in deze en de volgende paragraaf besproken worden, zijn er geen bekende spellen binnen de speltheorie. Dit kan te maken hebben met de structuur van de bimatrix die ontstaat bij deze spellen. Bij de overige classificaties is het zo dat P en/of S een waarde van R en/of Q insluit. Echter dat is nu niet het geval: P, S zijn nu strict groter dan R, Q. Voor beide classificaties zullen we daarom een beroemd spel aanpassen, zodat we toch spellen binnen deze classificaties kunnen bekijken.
Het spel dat we daarvoor zullen bekijken is 'the matching pennies game'[8], een variant voor twee spelers van het 'steen-schaar-papier-spel'. In het nederlands is dit het best te bestempelen met 'kop-of-munt-spel'. De spelregels zijn simpel, beide spelers hebben een munt in hun bezit en mogen de kop- of muntzijde boven leggen. Er kunnen zich de volgende 4 situaties voor doen:

1. Als beide spelers kop boven hebben, dan krijgt iedere speler 2 punten.
2. Als speler 1 kop heeft en speler 2 munt, dan krijgt speler 1 een punt aftrek.
3. Als speler 2 munt heeft en speler 2 kop, dan krijg speler 2 een punt aftrek.
4. Als beide spelers munt boven hebben, dan krijgt iedere speler 1 punt.

Het verschil met het originele spel is dat de spelers beide beloond worden, wanneer zij dezelfde kant van de munt boven hebben gelegd. In het originele spel zou dit betekenen dat één van de spelers de andere speler geld zou betaald, en dus een negatieve uitbetaling zou hebben.

De bimatrix die we bij dit spel op kunnen stellen is de volgende:

Kop-of-munt-spel

$$\begin{pmatrix} 2,2 & -1,0 \\ 0,-1 & 1,1 \end{pmatrix}.$$

Met behulp van paragraaf 2.1.2 kunnen we nu de gemengde strategie die bij dit spel hoort bepalen. Met de bovenstaande getallen zijn dit: $((\frac{1}{2},\frac{1}{2});(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$. In het geval van kop-of-munt is het teken van $Q-S=-1-1=-2$ negatief, dus zal speler 1 kiezen voor $\lambda=0$ wanneer $\mu=0$. $P-R=2-0$ heeft een positief teken, dus wanneer speler 2 kiest voor $\mu=1$, dan kiest speler 1 voor $\lambda=1$. De strategieën die de andere 2 Nash-evenwichten beschrijven zijn: $((1,0);(1,0))$ en $((0,1);(0,1))$. In het algemeen geval zijn de Nash-evenwichten van de classificatie $P>S>R>Q$:

$$x=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } y=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ geeft Nash-evenwicht } (P,P).$$

$$x=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } y=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ geeft Nash-evenwicht } (S,S).$$

$$x=\begin{pmatrix} \frac{S-Q}{P-R+S-Q} \\ \frac{P-R}{P-R+S-Q} \end{pmatrix} \text{ en } y=\begin{pmatrix} \frac{S-Q}{P-R+S-Q} \\ \frac{P-R}{P-R+S-Q} \end{pmatrix} \text{ geeft een gemengd Nash-evenwicht } \left(\frac{SP-QR}{P-R+S-Q},\frac{SP-QR}{P-R+S-Q}\right).$$

2.5 $R>Q>P>S$

Voor de classificatie $R>Q>P>S$ geldt hetzelfde als wat beschreven wordt in voorgaande paragraaf, alleen nu worden de uitbetalingen van kop-of-munt anders genoteerd. Een andere uitbetalingsmatrix die voldoet aan deze classificatie zou kunnen zijn:

Kop-of-munt-spel

$$\begin{pmatrix} -1,-1 & 2,4 \\ 4,2 & -2,-2 \end{pmatrix}.$$

Zoals te zien is aan de bimatrix, krijgen de spelers nu punten aftrek wanneer zij beiden kop of beiden munt boven hebben liggen. In de overige 2 situaties krijgen zij 2 of 4 uitbetaald.
Met behulp van paragraaf 2.1.2 kunnen we nu de gemengde strategie die bij dit spel hoort bepalen. Met de bovenstaande getallen zijn dit: $((\frac{4}{9}, \frac{5}{9}); (\frac{4}{9}, \frac{5}{9}))$. In het geval van kop-of-munt is het teken van $Q - S = 2 - -2 = 4$ positief, dus zal speler 1 kiezen voor $\lambda = 1$ wanneer $\mu = 0$. $P - R = -1 - 4 = -5$ heeft een negatief teken, dus wanneer speler 2 kiest voor $\mu = 1$, dan kiest speler 1 voor $\lambda = 0$. De strategieën die de andere 2 Nash-evenwichten beschrijven zijn: $((0, 1); (1, 0))$ en $((1, 0); (0, 1))$. In het algemeen geval zijn de Nash-evenwichten van de classificatie $R > Q > P > S$:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ geeft Nash-evenwicht } (R, Q)$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ geeft Nash-evenwicht } (Q, R).$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{S-Q}{P-R+S-Q} \\ \frac{P-R}{P-R+S-Q} \end{pmatrix} \text{ en } y = \begin{pmatrix} \frac{S-Q}{P-R+S-Q} \\ \frac{P-R}{P-R+S-Q} \end{pmatrix} \text{ geeft een gemengd Nash-evenwicht } \left(\frac{SP-QR}{P-R+S-Q}, \frac{SP-QR}{P-R+S-Q}\right).$$

2.6 $R > P > S > Q$ en $P > R > Q > S$

In deze paragraaf bekijken we de overige 2 classificaties $R > P > S > Q$ en $P > R > Q > S$. We zullen maar 1 classificatie bekijken, omdat de classificaties elkaars ‘spiegelbeelden’ zijn.
Zoals gezegd kunnen de Nash-evenwichten van deze classificaties niet gevonden worden met behulp van gemengde strategieën. In plaats daarvan zullen we kijken naar zogenaamde dominante strategieën. We zullen dit doen aan de hand van een beroemd spel, genaamd het gevangenendilemma.
Het gevangenendilemma wordt als volgt beschreven: twee criminelen plegen een overval en worden opgepakt. Bij gebrek aan bewijs zal de politie beide criminelen apart van elkaar verhoren. Het doel van de politie is om een bekentenis af te dwingen. Om dit te bereiken, legt de politie beide criminelen de volgende opties voor:

1. Als jij zwijgt en jouw partner blijkt ook te zwijgen, dan krijgen jullie beiden 1 jaar cel.

2. Als jij zwijgt, maar jouw partner besluit jou te veraden, dan krijg je 10 jaar cel.

3. Als jij bekent dan ga jij vrijuit, wanneer jouw partner besluit te zwijgen.

4. Als jij bekent en jouw partner blijkt ook te bekennen, dan krijgen jullie beiden 5 jaar cel.

Beide criminelen krijgen dus dezelfde keuzes en kunnen een beslissingsmatrix voor zichzelf en de ander opstellen. Hierdoor hebben zij dus open informatie en kunnen zij gaan redeneren wat zij moeten kiezen. Wanneer wij de bimatrix op zouden stellen voor dit probleem, dan ziet deze er als volgt uit:

Gevangenen dilemma

$$\begin{pmatrix} -1,-1 & -10,0 \\ 0,-10 & -5,-5 \end{pmatrix}.$$

Je kunt nu zelf nagaan dat dit probleem hoort binnen de classificatie $R > P > S > Q$. Er wordt bij dit probleem gekozen voor negatieve getallen, omdat een celstraf in de ogen van een crimineel in principe 1 jaar, 5 jaar of 10 jaar verliezen is.
Hoe werkt nu het idee van dominantie? Laten we daarvoor alleen de uitbetalingsmatrix A van de crimineel bekijken die de rijen kiest:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Deze crimineel kan nu als volgt redeneren: als ik de bovenste rij kies kan ik 1 jaar of 10 jaar cel krijgen en als ik de onderste rij kies, dan kan ik 0 of 5 jaar cel krijgen.
Hij zal dus ook moeten bedenken wat zijn partner zal kiezen, maar de echte keuze weet hij pas wanneer hij gekozen heeft. Dus kan hij beredeneren dat wanneer zijn partner links kiest, hijzelf het beste onder kan kiezen. Maar wanneer zijn collega voor rechts kiest, dan is dat ook het geval! Immers 0 jaar cel is minder dan 1 jaar cel en 5 jaar cel is minder dan 10 jaar cel.
De keuze voor de onderste rij, geeft dus altijd een beter uitkomst dan wanneer hij de bovenste rij zal kiezen. Wanneer dit het geval is, dan spreken wij van een dominante strategie. Je zult met goed verstand namelijk nooit voor een rij kiezen waarbij je gegarandeerd slechter uit zult komen.

Dominante strategie
Een strategie heet dominant, wanneer de uitkomsten van deze strategie altijd minstens even goed zijn als de uitkomsten van een andere strategie, ongeacht de keuze van de andere speler.

Voor het bepalen van een dominante strategie kun je de uitbetalingen dus per rij met elkaar vergelijken. Laten we ook naar de andere crimineel kijken:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ook hij kan een dominante strategie spelen: als zijn partner voor de bovenste rij kiest, dan geeft rechts kiezen een betere uitbetaling. Wanneer zijn partner de onderste rij kiest, geldt hetzelfde. Dus de andere crimineel heeft als dominante strategie rechts kiezen en zal dus nooit voor links kiezen.
Het feit dat beide criminelen een dominante strategie hebben, leidt ons naar het Nash-evenwicht dat wij zoeken. De ene crimineel zal altijd onder kiezen en de ander altijd rechts. Dus de gespeelde strategieën zijn $((0,1);(0,1))$ met verwachte uitbetaling -5 voor beide criminelen. Het is opmerkelijk te noemen dat de meest gewenste uitkomst $(-1,-1)$ geen evenwicht is.

Wanneer we nu de matrix behorend bij $R > P > S > Q$ bekijken dan zien we dat het Nash-evenwicht hier altijd de uitbetalingen S zal geven voor beide spelers. Immers er is sprake van dominantie. Voor de rijen geldt $R > P$ en $S > Q$, dus rij 2 is een dominante strategie. Voor de kolommen geldt hetzelfde, omdat $B = A^T$. Dus speler 1 zal altijd voor rij 1 kiezen en speler 2 altijd kolom 2. Bovendien is dit het enig Nash-evenwicht van dit spel, want het spelen van een gemengde strategie is hier niet zinvol.

Als we $P > R > Q > S$ bekijken, dan zien dat hier ook sprake is van dominantie. Dit is al te zien aan de classificatie: de uitbetalingen op rij 1 respectievelijk kolom 1, zijn nu groter dan de uitbetaling op rij 2 en kolom 2. Dus $P > R$ in plaats van $R > P$ en $Q > S$ in plaats van $S > Q$.
Dit betekent dus dat de dominante strategieën voor dit spel zijn het spelen van rij 1 en het spelen van kolom 1. Met andere woorden: $((1,0);(1,0)$ spelen met uitbetaling P.
Een bekend spel dat bij deze classificatie hoort is het zogenaamde 'Deadlock'-spel. In dit spel wordt dus de uitkomst die het slechtst is voor beide spelers gedomineerd, waardoor de classificatie $P > R > Q > S$ praktisch gezien minder interessant is dan $R > P > S > Q$.

2.7 Discontinuïteit in P

Wanneer we de classificaties $P > R > S > Q$ en $P > S > R > Q$ nogmaals bekijken, dan zien wij wat opmerkelijks. De uitbetaling P is rationeel gezien de meest gewilde uitbetaling bij deze classificaties, aangezien deze uitbetaling het hoogst en dus het beste resultaat is.
Wanneer we P heel groot zouden maken, dan zien we dat er iets tegen intuïtiefs gebeurt. We kunnen bekijken wat er gebeurt wanneer we de waarde

van P laten toenemen. Dan wordt $\lambda = \frac{S-Q}{P-R+S-Q}$ gelijk aan 0! Met andere woorden:

$$\lim_{P\to\infty} \frac{S-Q}{P-R+S-Q} \quad = \quad 0. \tag{2.7}$$

Dit betekent dat wanneer de meest gewenste uitbetaling heel groot is, dan zal het spelen van een gemengde strategie er juist toe leiden dat spelers vaker een strategie zullen spelen die tot een minder gewenst resultaat leidt. Het spelen van een gemengde strategie zal voor grote waarden van P dus hetzelfde resultaat opleveren als het spelen van $((0,1);(0,1))$.
Een verklaring van dit resultaat kan komen door het wantrouwen van de spelers. Immers als speler 1 besluit om strategie 1 te spelen, dan zal speler 2 bij het spelen van strategie 2 een betere uitkomst kunnen bereiken. Dit geeft dan het slechtste resultaat voor speler 1. Speler 1 zal dan voor de zekerheid toch strategie 2 spelen wat hem toch een beter resultaat oplevert.

Hoofdstuk 3

Een ander evenwicht

In de voorgaande hoofdstukken zijn een aantal 2×2-bimatrixspellen besproken en geclassificeerd. Echter zoals we hebben kunnen zien, is het Nash-evenwicht niet altijd logisch wanneer we dit vanuit menselijk oogpunt bekijken. Zo zal een weldenkend persoon niet snel zijn strategie zodanig kiezen, dat hij zeker weet dat hij een veel slechtere uitbetaling krijgt. Bij de gevonden Nash-evenwichten is dit vaak juist wel het geval. Sterker nog: wanneer P erg groot wordt, leiden gemengde strategieën ook vaker tot een minder wenselijk resultaat.
Dit heeft te maken met de definitie van rationaliteit. Tot nu toe zijn wij uitgegaan van het feit dat een speler zijn verwachte opbrengst zal maximaliseren. Echter in de realiteit zullen spelers ook de uitbetalingen afwegen tegen het risico dat zij nemen.
Daarom zullen wij in dit hoofdstuk namelijk het oplossen van 2×2-bimatrixspelen vanuit een andere hoek bekijken, met behulp van de theorie van zetten. We zullen daarvoor de uitbetaling P, Q, R en S achterwege laten. Het is immers in praktische situaties erg lastig om een uitkomst in een uitbetaling uit te drukken. De volgorde waarin we de classificaties zullen behandelen, verschilt met hoofdstuk 2. We zullen namelijk zien dat bij de classificaties $R > P > S > Q$, $R > Q > P > S$ en $R > P > Q > S$ deze aanpak een probleem aan het licht brengt.

3.1 Waarderingsmatrices

We zullen nu eerst een rangschikking aanbrengen in de uitbetalingen, zodat we niet meer in termen van P, Q, R en S hoeven te spreken. Deze rangschikking baseren wij op waarderingen. Dit houd in dat een betere uitbetaling, een hogere waardering krijgt.
In het geval van 2×2-bimatrixspelen kan iedere speler dus een rangschikking van 1 tot en met 4 maken, waarbij 1 de beste uitkomst is en 4 de slechtste

uitkomst. We kunnen de bimatrices behorend bij de classificaties uit hoofdstuk 2 nu omzetten in zogenaamde waarderingsmatrices (S.J Brams [1],[2].

Waarderingsmatrix
Een waarderingsmatrix is een matrix waarin de uitkomsten van goed naar minder goed worden gerangschikt aan de hand van waarderingen. Een hogere plek in de rangschikking betekent een hogere waardering.

De waarderingsmatrices die horen bij de classificaties uit hoofdstuk 2 staan hieronder:

$$\begin{array}{cc} \mathbf{R{>}P{>}Q{>}S} & \mathbf{P{>}R{>}S{>}Q} \\ \begin{pmatrix} 2,2 & 3,1 \\ 1,3 & 4,4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1,1 & 4,2 \\ 2,4 & 3,3 \end{pmatrix} \\ \\ \mathbf{P{>}S{>}R{>}Q} & \mathbf{R{>}Q{>}P{>}S} \\ \begin{pmatrix} 1,1 & 4,3 \\ 3,4 & 2,2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3,3 & 2,1 \\ 1,2 & 4,4 \end{pmatrix} \\ \\ \mathbf{R{>}P{>}S{>}Q} & \mathbf{P{>}R{>}Q{>}S} \\ \begin{pmatrix} 2,2 & 4,1 \\ 1,4 & 3,3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1,1 & 3,2 \\ 2,3 & 4,4 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Nu we weten welke waarderingsmatrices er bij de classificaties horen, zullen we een manier moeten vinden om via deze weg tot een oplossing te komen. Daarvoor zullen wij kijken naar de theorie van zetten van Brams [1],[2].

3.2 Theorie van zetten

Het doel van de theorie van zetten is om een oplossing te vinden voor bimatrixspelen uitgaande van waarderingsmatrices in plaats van het maximaliseren van de verwachte opbrengst. Om de theorie van zetten toe te passen moeten we een aantal afspraken maken. Hiervoor zullen wij spelregels opstellen.

3.2.1 De spelregels

In het voorgaande zijn wij er vanuit gegaan dat spelers onafhankelijk van elkaar een keuze maken die het resultaat zal bepalen van het spel. Echter in de praktijk blijkt vaak dat de spelers zich al in een positie van een spel bevinden en daarop hun keuze zullen baseren. Dit betekent dat we een startpunt hebben en dus dat ieder spel een andere uitkomst kan hebben, afhankelijk van het startpunt. We zullen voor elke classificatie dus vier startpunten

moeten bekijken.
Een speler die de theorie van zetten toepast, denkt als het ware vooruit. Hij bekijkt wat de mogelijke gevolgen zouden zijn, wanneer de spelers om en om zouden kiezen. Om dit te kunnen doen moeten we een spel in boomrepresentatie weergeven. Hoe een spel in boomrepresentatie eruit ziet, zullen we later bespreken.
Beide spelers gaan er nu vanuit dat zij niet tegelijk een keuze maken, maar dat zij op elkaar reageren. Dit betekent dat de spelers om en om een keuze mogen maken. De spelers hebben de keuze om te wisselen van rij/kolom of juist niet te wisselen.
De boom die spelers maken, worden niet in het echt uitgevoerd. Beide spelers proberen zo een beeld te krijgen van de mogelijke uitkomsten die zich voor kunnen doen wanneer zij een keuze maken. Beide spelers gaan er vanuit dat er rationele keuzes gemaakt worden: een speler probeert een zo hoog mogelijke waardering te halen. Dit is belangrijk bij het teruglopen van een boom, aangezien een speler geen keuze kan maken als niet duidelijk is of de andere speler rationeel handelt.

De spelregels van de theorie van zetten zijn voor beide spelers als volgt:

1. Het spel begint in een startpunt, dat voor beide spelers hetzelfde is.
2. De speler die aan de beurt is, kiest om te wisselen van strategie of om niet te wisselen.
3. Daarna is de volgende speler aan de beurt en ook hij maakt een keuze om al dan niet te wisselen van strategie.

In theorie zou een spel op deze manier oneindig door kunnen gaan, maar wij willen zekerheid dat een spel ook stopt. Daarom zullen we de volgende regels afspreken om het spel te beeïndigen:

1. De speler die aan de beurt is, krijgt op dat moment zijn hoogst gewaardeerde uitkomst (alleen als dit de beginpositie is, zal de speler toch een keuze maken).

   of

2. Beide spelers hebben achtereenvolgens voor een strategie gekozen die dezelfde uitkomst geeft.

Het spel stopt dus wanneer één van de speler zijn hoogste waardering uitbetaald krijgt of wanneer één van de spelers niet van strategie wisselt. Alleen wanneer de eerste speler niet wisselt van strategie, mag de andere speler nog een keuze maken. De bedenker van de theorie van zetten, Brams, hanteert nog een voorrangsregel [2]: als het voor één van de spelers rationeel is om te

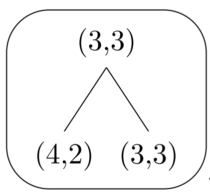
wisselen van strategie en voor de andere speler niet, dan wisselt deze speler van strategie. Hierdoor ontstaat een nieuwe uitkomst. Deze voorrangsregel gebruiken wij niet, want deze voorrangsregel legt een beginspeler vast. Wij zullen later in dit hoofdstuk bekijken wat de invloed is van welke speler er als eerste een keuze maakt.
In de volgende paragrafen zullen we de theorie van zetten toepassen op de verschillende classificaties. We hopen dat dit tot een beter resultaat leidt, dan wanneer we het spel bekijken aan de hand van Nash-evenwichten. Een beter resultaat is dan een uitkomst waarbij geen speler achteruit gaat en minstens één speler een hogere waardering als uitbetaling krijgt.

3.2.2 $P > R > S > Q$

In deze paragraaf zullen we voor de eerste keer de theorie van zetten toepassen. We nemen daarvoor aan dat het spel zich in een bepaalde startpositie bevindt. We zullen de theorie van zetten dus 4 keer gaan toepassen. De waarderingsmatrice van de classificatie $P > R > S > Q$ is:

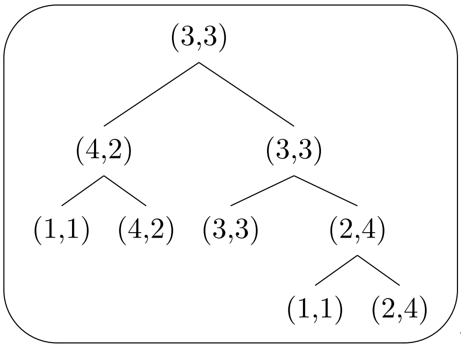
$$\begin{pmatrix} 1,1 & 4,2 \\ 2,4 & 3,3 \end{pmatrix}.$$

We weten uit hoofdstuk 2 dat de Nash-evenwichten die niet bij een gemengde strategie horen (3,3) en (1,1) zijn. De gemengde strategie zal ook tot uitkomst (3,3) leiden wanneer P erg groot is. We zullen zien dat deze uitkomst niet ontstaat als de theorie van zetten wordt toegepast.
We zullen een boom maken met keuzemomenten. Daarvoor nemen we aan dat spelers om en om een keuze mogen maken om het spel te beïnvloeden. Het maakt voor de eerste vier classificaties niet uit welke speler wij eerst laten kiezen, het resultaat blijft hetzelfde.
Zoals gezegd gaan we er bij de theorie van zetten vanuit dat het spel in een startpositie is. Dit zijn er vier, echter (1,1) is als startpositie niet relevant. Immers beide spelers krijgen al de uitbetaling met de hoogste waardering. Laten we daarom beginnen met het Nash-evenwicht (3,3). We gaan er vanuit dat speler 1 als eerste mag kiezen.
We zullen eerst een boom maken met de keuzemogelijkheden op ieder moment. Speler 1 kan in (3,3) kiezen voor in (3,3) blijven of naar (4,2) gaan door de bovenste rij te kiezen. Het begin van de boom ziet er dan als volgt uit:



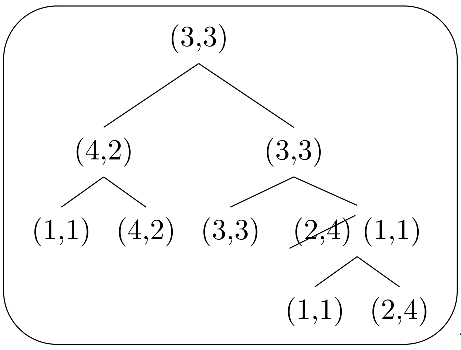
.

Nu mag speler 2 een kolom kiezen. In (4,2) kan hij er voor kiezen om naar (1,1) te gaan of in (4,2) te blijven. Welke keuze er ook volgt, speler 1 mag daarna niet meer kiezen. In het eerste geval krijgt speler 1 zijn hoogste waardering. En in het tweede geval kiezen beide voor situatie (4,2) als uitkomst, omdat speler 2 dan niet wisselt van strategie.
In (3,3) kan speler 2 in (3,3) blijven of wisselen naar (2,4). Vanuit (2,4) kan speler 1 weer kiezen uit (1,1) en (2,4). We krijgen dan de volgende boom:



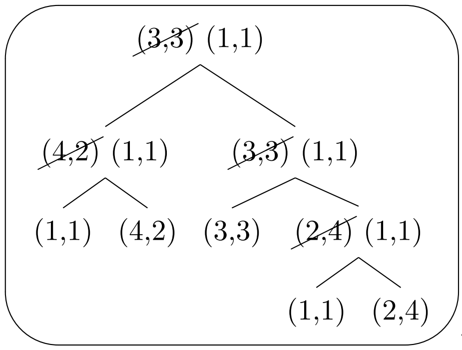
.

We gaan deze boom nu ‘teruglopen’. Dit betekent dat we onderaan de boom beginnen en elk keuze moment langs gaan. Wat zal elke speler kiezen om zijn uitbetaling te maximaliseren?
Laten we rechtsonder beginnen. Daar heeft speler 1 voor het laatst mogen kiezen tussen (1,1) en (2,4). Hij zal dan kiezen voor het wisselen van strategie. Dit geeft uitkomst (1,1). We vervangen de keuze van (2,4) voor speler 2 nu door (1,1):



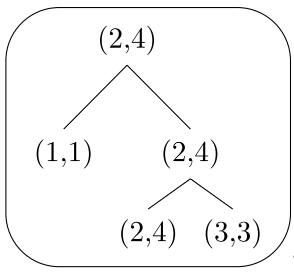
.

De keuze om te wisselen van strategie is voor speler 2 dus indirect een keuze om in (1,1) uit te komen. Normaal gesproken zou speler 2 hier niet voor kunnen kiezen, omdat hij alleen de kolommen mag kiezen. We gaan nu nog een stap hoger terug en vervangen (3,3) ook door (1,1). De rechterkant van de boom geeft aan voor speler 1 dat wanneer hij niet voor wisselen kiest, hij dat in de toekomst wel zou doen. Dus het niet wisselen van strategie geeft uiteindelijk voor speler 1 wel wisselen van strategie. Als we aan de linkerkant van de boom doen hetzelfde doen, dan vervangen (4,2) door (1,1) en krijgen uiteindelijke volgende boom:



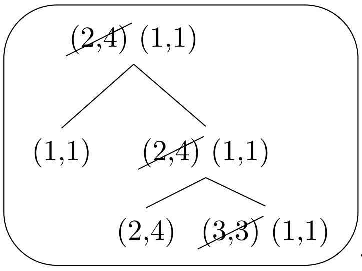
.

Je ziet dat we de top van de boom ook vervangen hebben door (1,1). Wanneer speler 2 eerst zou beginnen, dan levert de boom voor deze speler hetzelfde resultaat. Omdat de boom van beide spelers het wisselen van strategie voorschrijft, is de eindpositie van dit spel (1,1).
Dit betekent dus dat de spelers de uitkomst kunnen beïnvloeden door het spel uit te schrijven in een boom en terug te redeneren. In plaats van een gemengde strategie te spelen, zouden beide spelers nu kunnen besluiten om sowieso boven respectievelijk links te kiezen. Echter ook hier speelt hetzelfde probleem: in hoeverre vertrouw je de andere speler? Immers het zou kunnen dat jij mooi met de uitbetaling zit die een lagere waardering heeft. Of de gevonden oplossing zogenaamd stabiel is, zullen we later bekijken.
We moeten nu nog naar een andere startpositie kijken. Wat als het spel begint in (2,4) of (4,2)? Laten we beginnen met (2,4) als beginpositie. Het begin van de boom ziet er als volgt uit:



.

Het mooie van deze boom is dat we vanaf (3,3), aan de rechterkant, niet meer verder hoeven te gaan. We krijgen namelijk de boom zoals we hiervoor hebben opgesteld. We kunnen (3,3) dus op voorhand al vervangen door (1,1). Het gevolg is dat we (2,4) daarboven ook mogen vervangen door (1,1). Uiteindelijk resulteert dit weer in de keuze voor (1,1) aan de top van de boom:



.

Wanneer we naar beginpositie (4,2) kijken, dan krijgen we ook (1,1) als uitkomst. Dit kun je zelf nagaan. Ook hier is het zo dat je (delen van) eerder gebruikte bomen tegen zult komen.
We kunnen dus de conclusie trekken dat we met de theorie van zetten in dit geval tot een beter resultaat komen. Immers beide spelers zullen de hoogste gewaardeerde uitkomst krijgen, ongeacht de beginpositie.
In onderstaande tabel staat voor elke startpositie aangegeven welke eindpositie dit oplevert:

$P > R > S > Q$

Startpositie		*Eindpositie*
(1,1)	$\longrightarrow$	(1,1)
(4,2)	$\longrightarrow$	(1,1)
(2,4)	$\longrightarrow$	(1,1)
(3,3)	$\longrightarrow$	(1,1)

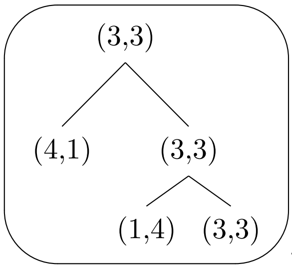
In de volgende paragraaf zullen we hetzelfde doen voor de classificatie $R > P > S > Q$. De classificatie $P > R > Q > S$ lijkt veel op $R > P > S > Q$. Door de dominantie van strategieën heeft de classificatie $P > R > Q > S$ praktisch gezien weinig waarde, het Nash-evenwicht is in deze situatie al de meest wenselijke uitkomst. Hierdoor zal een andere beginpositie in dit spel ook altijd eindigen in het Nash-evenwicht.

3.2.3 $R > P > S > Q$

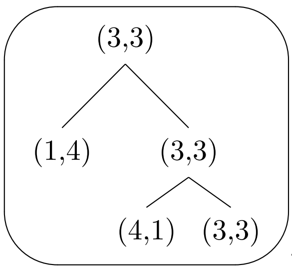
Doordat er bij deze classificatie sprake is van dominantie, zal elke andere uitkomst die we vinden geen Nash-evenwicht zijn. Dus ook hier zal uiteindelijk de vraag van stabiliteit rijsen. Maar voor dat we daar naar kijken, zullen we eerst de theorie van zetten toepassen op deze classificatie. De waarderingsmatrix bij deze classificatie $R > P > S > Q$ is:

$$\begin{pmatrix} 2,2 & 4,1 \\ 1,4 & 3,3 \end{pmatrix}.$$

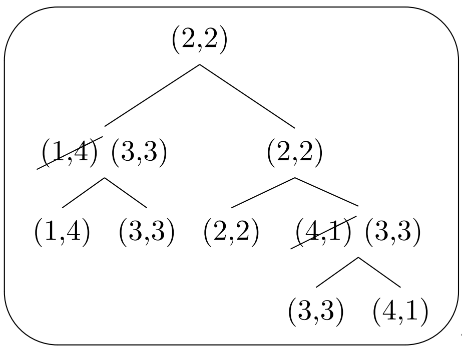
Laten we ook hier beginnen met de het Nash-evenwicht als startpositie: (3,3). Ook voor dit spel geldt dat het niet uitmaakt welke speler hier als eerste zal kiezen, omdat de bomen voor beide spelers hetzelfde zijn. We zullen weer uitgaan van speler 1. We kunnen de volgende boom opstellen:



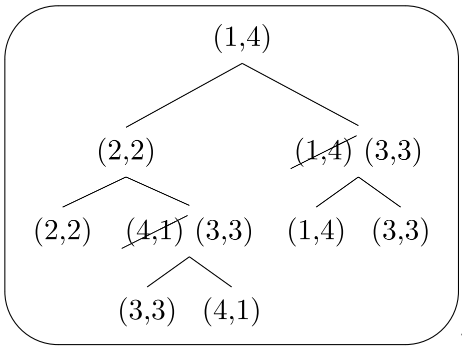
Het teruglopen vanuit deze situatie geeft een opvallendheid, de uitkomst zal niet positief veranderen. Wanneer speler 1 zal wisselen van strategie, dan zal speler 2 zeer tevreden zijn. Hij krijgt dan de hoogste waardering uitbetaald en speler 1 de minst gewaardeerde.
Wanneer speler 2 als eerste mag kiezen (zie de boom hieronder), dan doet zich hetzelfde voor. Dan krijgt speler 1 zijn hoogste waardering en speler 2 zijn slechtste.



Beide spelers zullen na het teruglopen van hun bomen kiezen voor het niet wisselen van strategie. Kortom de theorie van zetten zal hier geen andere uitkomst tot gevolg hebben, dan de startpositie $(3,3)$.
Voor startpositie (2,2) zal de boom iets anders worden:

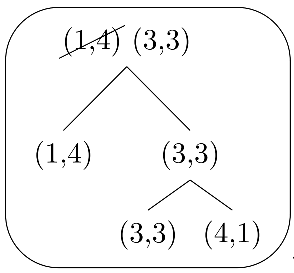


Teruglopen van deze boom geeft dus hetzelfde resultaat als de beginpositie: (2,2).
Voor beginposities (1,4) en (4,1) is het resultaat tegenstrijdig. Dit komt door dat het bij deze beginposities wel uitmaakt wie er als eerste mag kiezen. Stel speler 1 mag eerst kiezen dan vinden we de volgende boom:



.

Speler 1 zal dus niet willen wisselen vanuit (1,4). Dat is niet heel raar: hij krijgt al zijn hoogste waardering uitbetaald. Speler 2 daarentegen zal graag willen wisselen, hij krijgt zijn laagste waardering uitbetaald. Wanneer speler 2 eerst mag kiezen, dan zien we dat hij graag van kolom wisselt. Hierdoor wordt (3,3) de eindpositie:



.

Wanneer een spel binnen deze classificatie als startpositie (1,4) of (4,1) heeft, zal één van de spelers van strategie willen wisselen, waardoor de eindpositie $(3,3)$ is. Echter dit is nog steeds het Nashevenwicht. Dit is dezelfde uitkomst als de voorrangsregel van Brams op zou leveren [2]. Later in dit hoofdstuk zullen we dit soort situaties nogmaals bekijken. In de praktijk zou de speler die nu waardering 1 heeft een goed motief moeten hebben om van strategie te wijzigen en speler 2 daarmee aan een hogere waardering te helpen.

In onderstaande tabel staan de eindposities bij elke startpositie voor de classificatie $R > P > S > Q$:

$R > P > S > Q$

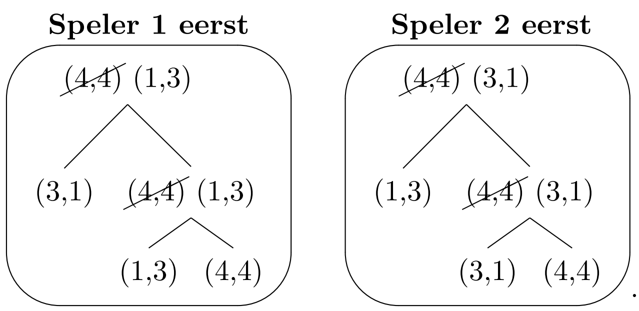
Startpositie		*Eindpositie*
(2,2)	$\longrightarrow$	(2,2)
(4,1)	$\longrightarrow$	(3,3)
(1,4)	$\longrightarrow$	(3,3)
(3,3)	$\longrightarrow$	(3,3)

3.2.4 $R > P > Q > S$

Zoals eerder in dit hoofdstuk gezegd geeft de classificatie $R > Q > P > S$ een probleem wanneer wij via de theorie van zetten een andere oplossing dan een Nash-evenwicht proberen te vinden. De waarderingsmatrix bij deze classificatie is:

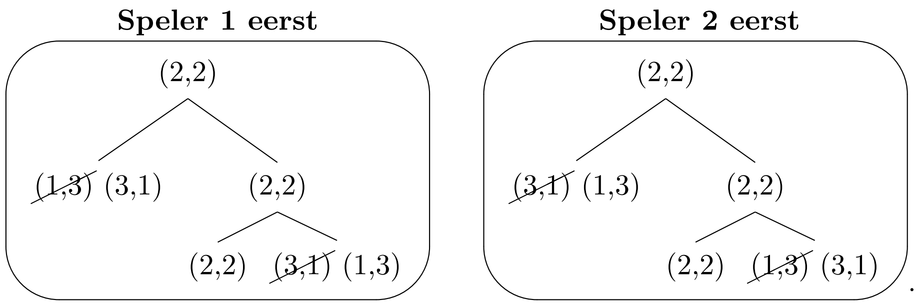
$$\begin{pmatrix} 2,2 & 3,1 \\ 1,3 & 4,4 \end{pmatrix}.$$

Zoals we weten zijn de Nash-evenwichten in dit spel (3,1) en (1,3). Deze Nash-evenwichten geven dezelfde opvallendheid als de beginposities $(1,4)$ en $(4,1)$) bij de classificatie $R > P > S > Q$ (waaronder het gevangenendilemma valt). De speler die al de hoogste waardering ontvangt zal niet van strategie willen wisselen. Wat de uitkomst zal zijn wanneer (3,1) of (1,3) beginpositie is, zullen we later bespreken.
Wanneer beide spelers onfhankelijk van elkaar kiezen, dan zouden beide spelers kiezen voor de strategie met opbrangs R, of wel waardering 1. Dit resulteert in de minst wenselijke uitkomst: (4,4). We kiezen dan ook eerst (4,4) als beginpositie. We bekijken nu 2 bomen: de eerste boom voor wanneer speler 1 eerst kiest en de tweede voor wanneer speler 2 eerst kiest.



We zien dus dat het teruglopen van de bomen van beide spelers aangeeft dat beide spelers niet van strategie willen wisselen. Net als bij de classificatie $R > P > S > Q$ geeft deze startpositie het minst wenselijke resultaat $(4,4)$.

Mocht het spel zich in de laatst overgebleven startpositie (2,2) bevinden, dan zullen beide spelers hier tevreden mee zijn wanneer we de theorie van zetten toepassen. Aan onderstaande boom is te zien dat beide spelers niet zullen wisselen van strategie en in (2,2) willen blijven:



Deze bomen zijn deels ingekort we weten namelijk dat zodra speler 1 mag kiezen in positie (3,1), dan resulteert dit in (1,3). Als speler 2 in positie (1,3) mag kiezen, dan resulteert dat (3,1). De uitkomst is dus dat beide spelers inderdaad liever in (2,2) blijven wanneer dit de beginpositie is.
In onderstaande tabel staan de voorlopige de eindposities bij elke startpositie voor de classificatie $R > P > Q > S$:

$R > P > Q > S$

Startpositie		*Eindpositie*
(2,2)	$\longrightarrow$	(2,2)
(3,1)	$\longrightarrow$	(4,4)
(1,3)	$\longrightarrow$	(4,4)
(4,4)	$\longrightarrow$	(4,4)

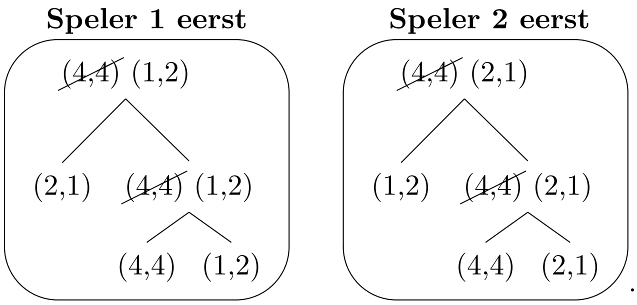
In de volgende paragraaf zullen we hetzelfde doen voor de overgebleven categorie $R > Q > P > S$. Ook daar zullem we zien dat de uitkomst via de theorie van zetten af hangt van de speler die als eerste mag kiezen.

3.2.5 $R > Q > P > S$

Zoals gezegd zullen in deze paragraaf tegen hetzelfde probleem aanlopen als bij de voorgaande twee classificaties. De waarderingsmatrix behorend bij deze classificatie is:

$$\begin{pmatrix} 3,3 & 2,1 \\ 1,2 & 4,4 \end{pmatrix}.$$

De Nash-evenwichten zijn hier (2,1) en (1,2). Dit geeft dezelfde opvallendheid als bij eerdere classificaties. Het verschil is hier dat als een van de spelers besluit van strategie te wisselen, de positie altijd verslechtert voor beide spelers. Bij de voorgaande classificaties zou één van de spelers wel vooruit gaan. Voor deze startposities levert de theorie van zetten dan ook geen betere oplossing. Alleen voor de overige twee posities zou de theorie van zetten misschien nog tot een betere uitkomst leiden. Laten we eerst kijken naar (4,4) als startpositie:



We zien dat beide bomen de spelers voorschrijven om niet van strategie te wisselen, waardoor de beginpositie en eindpositie hetzelfde zullen zijn. Wanneer we naar beginpositie (3,3) zouden kijken, dan zien we iets opmerkelijks: de bomen van beide spelers schrijven nu voor om te wisselen van strategie. Dit houdt in dat de eindpositie (4,4) is, deze is minder goed dan startpositie (3,3).
Kortom bij deze classificatie leidt de theorie van zetten niet tot een betere oplossing én is het Nash-evenwicht in de praktijk zeer lastig omdat beide spelers de hoogste uitbetaling willen halen. In beide gevallen betekent dit in de praktijk dat één van de spelers zich tevreden moet stellen met het op een na hoogste haalbare.

3.2.6 $P > S > R > Q$

Voor deze classificatie $P > S > R > Q$ heeft de theorie van zetten weinig praktische waarde. Beide spelers krijgen sowieso de op één na hoogste waardering uitbetaald wanneer we naar Nash-evenwichten kijken.
Ook al zou het spel beginnen in een andere positie, dan nog resulteert dit in uitkomst $(1, 1)$. Beide spelers hebben namelijk een reden om van strategie te wijzigen.

Eerder is al gezegd dat er geen zekerheid is over de stabiliteit van de uitkomsten die we vinden met de theorie van zetten. In de volgende paragraaf gaan we in op non-myopische evenwichten, zoals beschreven door Brams en Wittman [3]. Deze non-myopische evenwichten zullen ook een uitkomst bieden voor de startposities waarvoor de theorie van zetten geen uitkomst lijkt te bieden, doordat een speler zijn beste uitkomst op moet geven.

3.3 Alternatief voor Nash-evenwicht

Uit de voorgaande paragrafen blijkt dat het vaak uit maakt welke speler als eerste beslist. Daarom zullen we kijken naar zogenaamde non-myopische evenwichten. We willen namelijk vantevoren snel kunnen zien of het uitmaakt welke speler eerst kiest of niet. Wanneer het niet uitmaakt wordt een oplossing stabiel genoemd.

Non-myopisch evenwicht voor 1 speler
Een uitkomst heet non-myopisch voor speler 1 *als geldt: wanneer speler 1 de eerste keus heeft en de uitkomst van het spel is gelijk aan de startpositie, dan zal speler 1 op grond van de theorie van zetten niet van strategie wisselen van strategie.*
Een uitkomst heet non-myopisch voor speler 2 *als geldt: wanneer speler 2 de eerste keus heeft en de uitkomst van het spel is gelijk aan de startpositie, dan zal speler 2 op grond van de theorie van zetten niet van strategie wisselen van strategie.*

Non-myopisch evenwicht
Een uitkomst heet een non-myopisch evenwicht *als geldt: beide spelers wisselen op basis van de theorie van zetten niet van strategie. De startpositie is dan een non-myopisch evenwicht voor zowel speler 1 als voor speler 2.*

Een non-myopisch evenwicht betekent dus dat de beginpositie stabiel is, want deze situatie zal men door spelen van het spel uiteindelijk ook als eindpositie aantreffen.
Zoals uit voorgaande blijkt geven sommige beginposities een probleem, omdat de beginpositie een non-myopisch evenwicht is voor slechts één van de spelers. In het geval van het gevangenendilemma geeft de uitkomst (4,4) een opvallende uitkomst: de uitkomst is ook niet met de theorie van zetten te beïnvloeden, want het is een non-myopisch evenwicht.
Andere beginposities kunnen wel aanleiding geven om van situatie te wijzigen. Wanneer een beginpositie maar voor één speler een non-myopisch evenwicht is, dan zal dit spelers toch kunnen bewegen om van strategie te wisselen. Ondanks dat zij daardoor misschien hun hoogste waardering niet behouden.
Laten we daarvoor nogmaals naar de waarderingsmatrix van het gevangenendillemma kijken. We bekijken nu beginpositie (1,4) nogmaals. Zoals we in paragraaf 3.2.3 gezien hebben is dit een non-myopish evenwicht voor speler 1. Speler 2 zal echter met de theorie van zetten kiezen om van strategie te wisselen. Uitgaande van situatie (1,4) is het kiezen van de rechterkolom voor speler 2 nu dominant. Immers wat speler 1 ook kiest, speler 2 gaat er op vooruit door rechts te kiezen. Maar dan zit speler 1 met een probleem, want als speler 2 wisselt en speler 1 niet dan wordt de uitkomst (3,3). De

dominante strategie van speler 2 kan speler 1 zien als een soort dreigement. Dit dreigement geeft speler 2 een machtspositie. Speler 1 zal hierdoor bedenken dat hij juist beter kan wisselen van strategie, omdat hij dan het minst achteruit gaat, namelijk van waardering 1 naar waardering 2. Bij wisseling van speler 2 zal dit 3 of 4 zijn. Met deze gedachtegang in het achterhoofd zal speler 1 er dus voor moeten kiezen om van strategie te veranderen en speler 2 juist niet. In dat geval voorkomen ze uitkomst (3,3) en wordt de uitkomst van het spel (2,2).
Omgekeerd heeft speler 1 natuurlijk een machtspositie wanneer de startpositie (4,1) zou zijn. Dus door de dreiging van een slechtere uitkomst zullen de startposities (1,4) en (4,1) met de theorie van zetten leiden tot eindpositie (2,2) in plaats van (3,3). De theorie van zetten geeft dus een manier om een spel met een 'beter' resultaat te laten eindigen. Dit geldt bij de classificatie $P > R > S > Q$ voor alle Nash-evenwichten en in een aantal gevallen voor classificaties die een beginpositie hebben waarbij 1 van de spelers de hoogste waardering uitbetaald krijgt. Echter deze beginposities veranderen alleen omdat de speler met de hoogste waardering een risico ziet op een grote stap achteruit doordat speler 2 wel zal wisselen van strategie.

Wanneer we de dreiging zoals hierboven beschreven in acht nemen, dan kunnen we volgende tabellen maken:

$R > P > Q > S$

Startpositie		*Eindpositie*
(2,2)	$\longrightarrow$	(2,2)
(3,1)	$\longrightarrow$	(2,2)
(1,3)	$\longrightarrow$	(2,2)
(4,4)	$\longrightarrow$	(4,4)

$P > R > S > Q$

Startpositie		*Eindpositie*
(1,1)	$\longrightarrow$	(1,1)
(4,2)	$\longrightarrow$	(1,1)
(2,4)	$\longrightarrow$	(1,1)
(3,3)	$\longrightarrow$	(1,1)

$P > S > R > Q$

Startpositie		*Eindpositie*
(1,1)	$\longrightarrow$	(1,1)
(4,3)	$\longrightarrow$	(1,1)
(3,4)	$\longrightarrow$	(1,1)
(2,2)	$\longrightarrow$	(1,1)

$R > P > S > Q$

Startpositie		*Eindpositie*
(2,2)	$\longrightarrow$	(2,2)
(4,1)	$\longrightarrow$	(2,2)
(1,4)	$\longrightarrow$	(2,2)
(3,3)	$\longrightarrow$	(3,3)

$P > R > Q > S$

Startpositie		*Eindpositie*
(1,1)	$\longrightarrow$	(1,1)
(3,3)	$\longrightarrow$	(1,1)
(4,2)	$\longrightarrow$	(1,1)
(2,4)	$\longrightarrow$	(1,1)

Voor de classificatie $R > Q > P > S$ is geen tabel te maken, want de theorie van zetten geeft daar geen betere uitkomst dan het Nash-evenwicht $(4, 4)$.
Daarnaast is uit bovenstaande tabellen op te maken dat 3 van de classificaties niet snel interessant zullen zijn in de praktijk. Immers bij de classificaties $P > R > S > Q$, $P > S > R > Q$ en $P > R > Q > S$ geeft de theorie van zetten altijd $(1, 1)$ als uitkomst. Dit zou in de praktijk altijd de beste oplossing voor beide partijen opleveren wanneer zij een rationele keuze zouden maken.
Voor de classificaties $R > P > S > Q$ en $R > P > Q > S$ daarentegen geeft de theorie van zetten wel interessante uitkomsten. Wanneer de minst wenselijke uitkomst de startpositie is, geeft de theorie van zetten helaas geen betere uitkomst. Maar in het geval van de overige drie startposities geeft de theorie van zetten wel degelijk een beter resultaat.
In het volgende hoofdstuk zullen we kijken naar de praktijk. De theorie van zetten zullen we dan toepassen op een conflict uit het verleden (de Cubacrisis) en op een nog lopend conflict (de crisis in de Oekraïne).

Hoofdstuk 4

Echte conflicten

In dit hoofdstukken zullen we kijken naar conflicten die in het echte leven hebben plaats gevonden. We zullen eerst conflicten besprek waarvan we de uitkomst zullen verklaren met behulp van de eerder besproken spellen en de besproken oplossingstechnieken. We zullen eerst kijken naar de Cuba-crisis uit de koude oorlog.
Vervolgens zullen we kijken naar een meer recent conflict. We zullen de gebeurtenissen in Oekraïne proberen te verklaren met behulp van de theorie uit voorgaande hoofdstukken. De gebeurtenissen tot en met juni 2014 zijn daarin meegenomen.

4.1 Cuba crisis als gevangenendilemma

In oktober 1962 ontstond er tussen de VS en de Sovjet-Unie een conflict rondom Cuba. De Sovjet-Unie was in het geheim bezig met het bouwen van raketinstallaties op Cuba. Op het moment dat de geheime diensten van de VS dit ontdekten ontstond er een conflict. De uitkomst van dit conflict is al lang bekend, maar de uitkomst is te verklaren met speltheorie.
Beide partijen hadden twee keuzes: de VS kon Cuba aanvallen of de toevoerwegen blokkeren. De Sovjet-Unie daarentegen had de keuze om de raketinstallaties te behouden of om deze af te breken. We laten de VS fungeren als rijspeler en de Sovjet-Unie als kolomspeler. De bovenste rij staat voor een blokkade en de onderste rij voor een aanval op Cuba. De linkerkolom staat voor het verwijderen van de raketinstallaties en de rechterkolom voor het behouden van de raketinstallaties.
Voor dat we de keuzes in een matrix zetten, willen we elke uitkomst een waardering geven. Immers de uitkomsten zijn niet uit te drukken in geld of andere waarden.
Laten we eerst de naar de keuzes van de VS kijken. Het is voor de VS duidelijk dat als de Sovjet-Unie de raketinstallaties zou behouden, dan is

dit voor de VS niet wenselijk. De waarderingen in de rechterkolom van de waarderingsmatrix van de VS zijn dan waardering 3 en 4.
De vraag is nu welke waardering er op de bovenste rij moet staan en welke op de onderste rij? De eerste reactie van de toenmalige president Kennedy was het opzoeken van de confrontatie en Cuba aanvallen. Op basis hiervan nemen we aan dat de VS een aanval verkiest boven een blokkade. De waarderingsmatrix voor de VS is dan de volgende:

Waarderingsmatrix VS

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Voor de Sovejet-Unie kunnen we een soortgelijke redenatie houden. Laten we aannemen dat de Sovjet-Unie een blokkade van de VS prefereert boven een aanval, aangezien een confrontatie wereldwijd gevolgen heeft. Waarderingen 1 en 2 zullen dus op rij 1 van de waarderingsmatrix van de Sovjet-Unie komen. Als we aannemen dat de Sovjet-Unie het liefst de raketinstallaties behoudt, dan ligt rij 1 vast. Waardering 1 komt dan in de rechterkolom op rij 1 en waardering 2 op de linkerkolom van rij 1.
Vervolgens kijken we naar rij 2 van de waarderingsmatrix, deze is nu ook te bepalen. Immers de Sovjet-Unie behoudt het liefst de raketinstallaties, dus bij een invasie van de VS krijgt deze een hogere waardering dan het verwijderen er van. We krijgen dan de volgende waarderingsmatrix:

Waarderingsmatrix Sovjet-Unie

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Als we beide waarderingsmatrices samenvoegen dan ontstaat de volgende bimatrix:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Blokkade} \\ \text{Aanval} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Verwijderen} & \text{Behouden} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2,2 & 4,1 \\ 1,4 & 3,3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Deze waarderingsmatrix hoort bij de classificatie $R > P > S > Q$ of wel het gevangenendilemma.
Om de Cuba-crisis te beschrijven zal het gevangenendilemma niet volstaan. De primaire reactie van Kennedy en de wil tot het behouden van de raketinstallaties door de Sovjet-Unie, leiden tot het Nashevenwicht $(3, 3)$ als startpositie. Dit zou in werkelijkheid overeenkomen met een oorlog tussen de VS en de Sovjet-Unie.

Uit hoofdstuk 3 weten we dat ook met de theorie van zetten geen andere uitkomst bereikt kan worden. Maar in werkelijkheid heeft er geen aanval plaats gevonden en is er ook geen oorlog uitgebroken. Hierdoor is het gevangenendilemma geen goed model voor de Cuba-crisis. In de volgende paragraaf zullen de Cuba-crisis proberen te beschrijven aan de hand van het Havik-duif model.

4.2 Cuba-crisis als havik-duif

In voorgaande paragraaf hebben we de Cuba-crisis als gevangenendilemma bekeken (tabel $R > P > S > Q$ in 3.3). Dit blijkt geen verklaring te geven voor het verloop van de Cuba-crisis. In deze paragraaf zullen we nogmaals kijken naar de waarderingsmatrices en de Cuba-crisis proberem te modelleren als een havik-duif spel.
Laten we allereerst nog eens kijken naar de waarderingsmatrix van de VS. We zijn er vanuit gegaan dat de VS het liefst een aanval op Cuba zou plaatsen. Dit is echter niet gebeurd doordat de militaire top Kennedy geadviseerd heeft om de toegangswegen te blokkeren met een blokkade.
Door dit advies verandert de voorkeursmatrix van de VS. Het plaatsen van een blokkade terwijl de Sovjet-Unie de raketinstallaties behoudt krijgt nu de voorkeur boven een aanval. Hierdoor wordt de voorkeursmatrix van de VS:

Waarderingsmatrix VS

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wanneer we nu de waarderingsmatrix van de Sovjet-Unie nogmaals bekijken dan kunnen we hier ook de waarderingen 3 en 4 omwisselen. Wanneer Cuba aangevallen wordt, terwijl zij de raketinstallaties opgeven dan is dit weliswaar ook niet wenselijk, maar de situaties van behoud van raketten én een invasie lokt juist negatieve maatregelen uit. Deze negatieve maatregelen zouden waarschijnlijk zorgen voor een nieuwe oorlog. We gaan er vanuit dat zowel de VS als de Sovjet-Unie een oorlog willen voorkomen.
Dit leidt dan tot de volgende waarderingsmatrix voor de Sovjet-Unie:

Waarderingsmatrix Sovjet-Unie

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Als we beide waarderingsmatrices nu combineren dan ontstaat nu de volgende bimatrix:

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \text{Verwijderen} & \text{behouden} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Blokkade} \\ \text{Aanval} \end{array} & \begin{pmatrix} \quad 2,2 \quad & \quad 3,1 \quad \\ \quad 1,3 \quad & \quad 4,4 \quad \end{pmatrix}. \end{array}$$

Deze bimatrix hoort bij de classificatie van het havik-duif spel: $R > P > Q > S$.
Naast deze verantwoording van het Havik-duif spel, is een tweede verantwoording mogelijk. In de speltheorie worden situaties waarbij de spelers op ramkoers liggen juist gemodelleerd met het havik-duif model. In het geval van de Cuba-crisis is dit ook mogelijk, omdat de VS en de Sovjet-Unie recht tegenover elkaar stonden.
De Nash-evenwichten zijn $(3, 1)$ of $(1, 3)$. Dit komt er op neer dat de VS of de Sovjet-unie in zou moeten binden, terwijl de andere partij zijn hoogste gewaardeerde resultaat krijgt.
Het bepalen van de startpositie is hier lastiger dan in de vorige paragraaf, want alleen de Sovjet-Unie heeft een keuze gemaakt: het plaatsen van raketten. De keuze van de VS bepaalt hiermee de startpositie. Aangezien de de legertop Kennedy een advies tot blokkade heeft gegegeven zou dit tot startpositie $(3, 1)$ leiden.
Bij het toepassen van de theorie van zetten met machtspositie (tabel $R > P > Q > S$ in 3.3), weten we dat de VS nu de aanval als dreigement kan gebruiken. De Sovjet-Unie wordt hierdoor gedwongen om van strategie te wisselen, waardoor de uitkomst $(2, 2)$ is. Met behulp van de theorie van zetten kunnen we het verloop van de Cuba-crisis dus wel verklaren met het Havik-duif model.

4.3 Oekraïne

In november 2013 kondigt de toenmalig president van Oekraïne, Janoekovitsj, aan dat Oekraïne een verdrag met de EU zal verwerpen. Dit verdrag zou tot betere samenwerking met de EU moeten leiden. Janoekovitsj maakte daarnaast bekend dat Oekraïne de banden met Rusland wil verbeteren. De reden waarom Oekraïne dit verdrag precies verworpen, heeft zullen wij niet bekijken, maar een aantal gebeurtenissen als gevolg hiervan zullen wij proberen te verklaren met behulp van speltheorie.
Zowel binnen Oekraïne als er buiten, is er de laatste maanden veel gebeurd. De gebeurtenissen tot en met juni 2014 zijn hier in meegenomen. In appendix A is een tijdlijn van de BBC te vinden die het totale conflict op de

Oekraïne weergeeft tot en met juni 2014.

Het totale conflict is in te delen in 3 conflicten:

1. Een, voornamelijk politieke strijd, tussen Rusland en Oekraïne.
2. De reactie van de EU en de VS op de bemoeienis van Rusland in Oekraïne.
3. Een interne strijd om de Krim en Oost-Oekraïne tussen het Oekraïnse leger en pro-Russische separatisten.

Het verloop van de eerste 2 conflicten zullen we proberen te verklaren aan de hand van speltheorie.

4.3.1 Aardgas

Eén van de belangrijkste exportproducten van Rusland aan Oekraïne is aardgas. Dit gas wordt geleverd door het staatsbedrijf Gazprom. Als politiek middel gebruikt Rusland dit gas om Oekraïne onder druk te zetten. Dit aspect van de politieke strijd tussen Rusland en Oekraïne zullen we hieronder nader bekijken. Voordat we dit conflict zullen modelleren, beschrijven we eerst wat er tot nu toe gebeurd is. Daags na de aankondiging van Janoekovitsj over het afwijzen van het verdrag met de EU, verlaagt Rusland de prijs van het gas. Daarnaast nemen de Russen een deel van de staatsschuld over van Oekraïne door het opkopen van staatsobligaties.
De eerste stap is een positieve stap richting Oekraïne, echter begin maart 2014 begint Gazprom met het dreigen om de gaslevering stop te zetten. Dit is een gevolg van een aantal gebeurtenissen in de tussentijd. Janoekovitsj is ondertussen afgezet en op de Krim wordt gestreden tegen separatisten, waarvan onduidelijk is of dit Russen zijn of niet. Gazprom voert als reden aan dat Oekraïne zijn schulden niet betaalt.
Een maand later, in april, wordt het dreigement opnieuw kracht bijgezet. Ditmaal is het president Poetin die het dreigement uit. Met deze waarschuwing probeert hij ook druk uit te oefenen op de EU. De EU is indirect deels afhankelijk van de gaslevering via Oekraïne, omdat Oekraïne een doorvoerland is voor het gas vanuit Rusland naar andere landen in Europa.
Halverwege juni wordt de gastoevoer daadwerkelijk afgesloten. Hiermee is het conflict voorlopig ten einde, maar in de toekomst zou hier verandering in kunnen komen.

Om dit conflict te modelleren zullen we moeten kijken welke keuzes Oekraïne en Rusland hebben. Wanneer we alle eventueel achterliggende conflicten

weglaten (zoals bijvoorbeeld de Krim en Oost-Oekraïne), dan komt het voor Oekraïne neer op het wel of niet betalen van hun schulden aan Rusland. Rusland heeft als keuze om te blijven dreigen met afsluiten van het gas of het daadwerkelijk afsluiten.
Laten we eerst de waarderingsmatrix voor Oekraïne opstellen. Hiervoor spreken wij af dat betalen van de schulden overeenkomt met het kiezen van de bovenste rij kiezen. De linkerkolom staat voor het dreigen van Rusland en de rechterkolom voor het daadwerkelijk afsluiten van de gastoevoer.
We nemen aan dat Oekraïne dreigen door Rusland waardeert boven een daadwerkelijk afsluiten. Waarderingen 1 en 2 komen dus in de linkerkolom te staan. De vraag is nu of Oekraïne liever zijn schulden betaalt of niet. Rationeel gezien zal iemand altijd zijn of haar schulden willen aflossen. Echter deze schulden zijn in het verleden kunstmatig verhoogd door de Russen, waardoor Oekraïne het niet eens is met deze schuld. Hij waardeert hierdoor het niet betalen van de schulden hoger dan het wel betalen van de schulden. De waarderingsmatrix van de Oekraïne ziet er dan als volgt uit:

Waarderingsmatrix Oekraïne

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nu rest de waarderingsmatrix van Rusland nog. Het afsluiten van de gastoevoer is voor Rusland zelf niet gunstig. Echter binnen dit conflict beperken wij ons tot het feit dat Rusland de Oekraïne wil dwingen om hun schuld te betalen. Hierdoor krijgen de situaties waarbij Oekraïne zal betalen de hoogste waarderingen. Waarderingen 1 en 2 staan dus op de bovenste rij.
Voor de onderste rij zullen de Russen waardering 3 geven aan afsluiten wanneer er niet betaald wordt door Oekraïne. Immers wanneer Oekraïne niet betaalt en Rusland alleen maar zou blijven dreigen, dan zou dit gezichtsverlies betekenen voor Rusland. De waarderingsmatrix voor Rusland ziet er dus als volgt uit:

Waarderingsmatrix Rusland

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

De bimatrix die hoort bij dit conflict ziet er dan als volgt uit:

$$\begin{array}{r} \\ \text{Betalen} \\ \text{Niet betalen} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Gasleiding open} & \text{Gas afsluiten} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2,2 & 4,1 \\ 1,4 & 3,3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Dit komt overeen met het gevangenendilemma (zie tabel $R > P > S > Q$ in paragraaf 3.3). We weten met behulp van de theorie van zetten dat uitkomst $(3, 3)$ alleen bereikt wordt, wanneer dit ook de startpositie is. Echter op dit moment is dit de situatie in de praktijk, terwijl duidelijk is dat dit niet de startpositie van dit conflict is. Om dat niet duidelijk is of Oekraïne zijn schulden voorheen wel of niet betaalde, is (2,2) of (1,4) de startpositie van dit conflict.
Een reden hiervoor van kan zijn dat het conflict nog gaande is. Wellicht is situatie $(3, 3)$ een tussenstap in dit slepende conflict en zal in de toekomst alsnog situatie $(2, 2)$ bereikt worden. Deze laatste uitkomst ligt in de lijn der verwachting, omdat elke andere startpositie dan $(3, 3)$ leidt tot uitkomst $(2, 2)$. Dit betekent dat er een impuls zal moeten komen, eventueel van buitenaf. Eén van beide partijen zal moeten proberen iets af te dwingen.
Een andere reden zou kunnen zijn dat Rusland nog weinig tegengas krijgt van de buitenwereld. Rusland probeert hierdoor druk uit te oefenen op Oekraïne om hen afhankelijk te houden van Rusland. Economisch gezien schaadt het Rusland ook niet veel meer, omdat er tegenwoordig steeds meer andere gasroutes zijn naar Europa dan alleen via Oekraïne. Hierdoor kan Rusland gewoon gas blijven leveren aan de rest van Europa [10].

4.3.2 De buitenwereld

Het tweede deel van het conflict wat we willen verklaren is de reactie van de buitenwereld op de bemoeienis van Rusland in Oekraïne. Met de buitenwereld bedoelen we voornamelijk de reacties van de EU en de VS.
Vanaf het moment dat president Janoekovitsj aankondigt dat Oekraïne het verdrag met de EU niet zal tekenen, is er veel onduidelijkheid over de rol van Rusland. Bij gevechten op de Krim zouden Russische troepen betrokken geweest zijn. Ondanks de onduidelijkheden wordt er vanuit gegaan dat Russiche troepen inderdaad separatisten hebben geholpen, Rusland zelf ontkent nu nog in alle toonaarden.
Nadat de Krim zich bij Rusland aangesloten heeft, zijn er in Oost-Oekraïne opstanden uitgebroken. Ook bij dit gevecht zijn er steeds meer tekenen dat de separatisten door Russische troepen bijgestaan worden. Saillant detail is dat het Russische leger meer activeit vertoond heeft langs de grens met Oost-Oekraïne.
Ook nu ontkent Rusland enige bemoeienis, echter het probeert Oekraïne wel onder druk te zetten om de strijd tegen de pro-Russische separatisten te staken. Een onderdeel van deze druk is de eerder besproken gastoevoer.
Aan de andere kant lijken de EU en de VS niet veel reactie te vertonen. Tot op heden is de enige reactie het opleggen van sancties tegen Russische bedrijven en personen. Van militair ingrijpen is nog geen sprake geweest, waarschijnlijk door de angst om een (wereld)oorlog te ontketenen. Een te-

genreactie van Rusland is hetzelfde: zij leggen sancties op aan bedrijven en personen uit de EU en/of VS.
Om dit conflict in een spel om te zetten, bekijken we eerst weer welke keuzes beide partijen hebben. We laten Rusland hierbij wederom de kolommen kiezen en de EU/VS kiezen de rijen. Voordat we de waarderingsmatrices opstellen, moeten we bepalen welke keuzes beide partijen kunnen maken.
Rusland bemoeit zich op het moment intern nog veel met Oekraïne. De EU/VS willen dat Rusland daar mee ophoudt. Dit betekent dat Rusland de volgende keuzes heeft: doorgaan met hun bemoeienis en sancties op blijven leggen of zich helemaal terugtrekken.
De EU/VS leggen op het moment alleen sancties op aan Rusland, dus klaarblijkelijk is dit één van hun keuzes. Een andere keuze kan militair ingrijpen zijn. Dit laatste is zoals gezegd nog geen keer sprake van geweest, maar het zou in de toekomst een reëele keuze kunnen zijn.
Nu kunnen we de waarderingsmatrices opstellen. Laten we beginnen met Rusland. Uit verschillende gebeurtenissen is op te maken dat Rusland zich het liefst met Oekraïne blijft bemoeien. Zo probeert Rusland de EU te dwingen zich buiten het conflict te houden, omdat zij nog deels afhankelijk zijn van gas wat via Oekraïne aan de EU geleverd wordt. Een andere reden is het feit dat er veel Russen in Oekraïne wonen. Het blijven bemoeien van Rusland zou dus ongeacht de keuze van de EU/VS de hoogste waarderingen krijgen. Hierbij wordt het opleggen van sancties door de EU/VS hoger gewaardeerd dan militair ingrijpen.
Als we het kiezen voor bemoeienis in Oekraïne laten overeenkomen met de linkerkolom, dan ziet de waarderingsmatrix van Rusland er als volgt uit:

Waarderingsmatrix Rusland

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Het kiezen van de bovenste rij door de EU/VS komt dan overeen met opleggen van sancties.
Voor de EU/VS kunnen we nu hetzelfde doen. De EU/VS proberen op dit moment nog via de diplomatieke weg Rusland te dwingen om zich niet met Oekraïne te bemoeien. Daarom nemen we wij aan dat de EU/VS militair ingrijpen lager waarderen dan het nemen van sancties.
Aan de andere kant willen de EU/VS dat Rusland zich niet meer bemoeit met Oekraïne. De uitkomsten op de rechterkolom zullen voor de EU/VS dan ook hoger gewaardeerd worden dan de uitkomsten op de linkerkolom.

De waarderingsmatrix van de EU/VS ziet er dan als volgt uit:

Waarderingsmatrix EU/VS

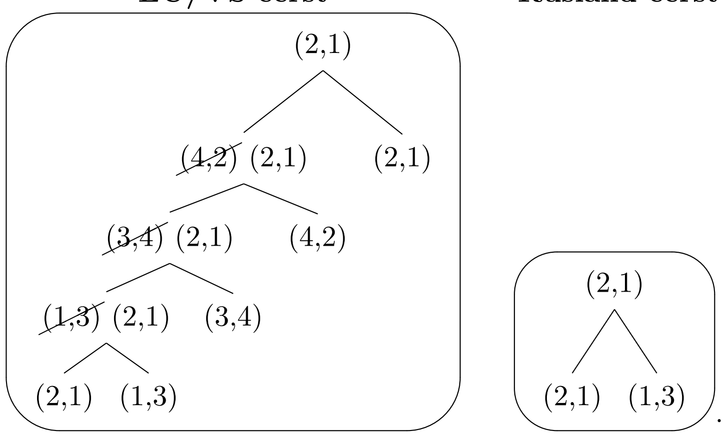
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

De bimatrix die bij dit conflict hoort ziet er dan als volgt uit:

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \text{Invloed uitoefenen} & \text{terugtrekken} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Sancties} \\ \text{Militair ingrijpen} \end{array} & \begin{pmatrix} \quad 2,1 \quad & \quad 1,3 \quad \\ \quad 4,2 \quad & \quad 3,4 \quad \end{pmatrix}. \end{array}$$

In dit geval is het conflict dus niet te modelleren met een van de bekende spellen. We kunnen echter wel kijken naar het Nash-evenwicht en de theore van zetten, om toch tot een analyse te komen.
Laten we beginnen met het Nash-evenwicht. Die is in dit spel niet moeilijk vinden. Voor de EU/VS is de keuze voor de bovenste rij dominant en voor Rusland is dat de linkerkolom. Het Nash-evenwicht is hierdoor (2,1).
Voor het toepassen van de theorie van zetten bekijken we alleen de startpositie die overeenkomstig is met de huidige situatie van het conflict. De EU/VS kiezen voor sancties en Rusland voor bemoeienis, dus de startpositie is het Nash-evenwicht. We kunnen de volgende bomen opstellen voor beide partijen:

EU/VS eerst **Rusland eerst**



Teruglopen van beide bomen geeft dat (2,1) een non-myopisch evenwicht is voor beide spelers. Het resultaat is hier dus dat Rusland bemoeienis zal blijven houden in de Oekraïne en dat de EU/VS dit alleen met sancties bestraft.
Een interessante vraag die hierbij rijst, is: 'Tot hoever kan Rusland gaan

met hun bemoeienis in Oekraïne?'. Op het moment heeft de Krim zich aangesloten bij Rusland, maar wat als Oost-Oekraïne dit ook zou willen en Rusland zorgt hiervoor? Hoe reageren de EU/VS dan?

Stel dat Oost-Oekraïne zich bij Rusland zou voegen in de nabije toekomst. We nemen daarnaast aan dat de EU/VS de voorkeur geven aan ingrijpen, als dat gebeurt. We kunnen de waarderingsmatrix dan als volgt aanpassen:

Waarderingsmatrix EU/VS

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Het nemen van sancties en het stoppen van de bemoeienissen van Rusland krijgt in dit geval nog wel een hoge waardering, maar niet de hoogste. Ingrijpen en de Russische bemoeienis daarmee stoppen krijgt nu de voorkeur. Gemakshalve gaan wij er vanuit dat er voor Rusland niets veranderd is, dus hun waarderingsmatrix blijft gelijk. Hierdoor wordt de bimatrix nu:

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{cc} \text{Invloed uitoefenen} & \text{Terugtrekken} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Sancties} \\ \text{Militair ingrijpen} \end{array} & \begin{pmatrix} 4,1 & 2,3 \\ 3,2 & 1,4 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Ook nu zullen we naar het Nash-evenwicht en de theorie van zetten kijken. Het Nash-evenwicht is niet moeilijk te vinden. Voor de keuze van Rusland geldt nog steeds dat het kiezen van de linkerkolom dominant is. Voor de EU/VS is er wel iets veranderd, echter dit resulteert nu in het kiezen van de onderste rij als dominante strategie. Het Nash-evenwicht in deze situaties is dus (3,2).

Met de theorie van zetten kunnen we nu uitgaan van 2 verschillende startposities: (4,1) en (3,2). In het geval van (4,1) gaan we nog uit van de huidige situatie, alleen met de nieuwe waarderingsmatrix. In het geval van (3,2) gaan we uit van het feit dat de EU/VS gelijk ingrijpen, mocht Oost-Oekraïne zich afscheiden met Russische hulp.

Voor beide startposities is na te gaan dat situatie (3,2) de uitkomst zal zijn met de theorie van zetten. Ofwel met de theorie van zetten lijkt ingrijpen door de EU/VS weinig op te leveren. De EU/VS hebben immers als doel om de invloed van Rusland in Oekraïne af te laten nemen, echter dit is niet het geval in eindpositie (3,2).

Voor de EU/VS betekent dit een patstelling: zelfs ingrijpen zorgt er niet voor dat Rusland zijn invloed in Oekraïne wil verkleinen. Deze patstelling zou in de toekomst kunnen escaleren in een nog slechtere situatie, waarbij meerdere landen in een oorlog worden betrokken.

4.4 Recente gebeurtenissen

Het conflict in Oekraïne hebben wij maar bekeken tot en met juni 2014. Helaas zijn er in juli een aantal dingen gebeurd, waardoor de situatie nog lastiger geworden is. De belangrijkste gebeurtenis was op 17 juli 2014. Er is boven Oost-Oekraïne een passagiersvliegtuig van Malaysian Airways uit de lucht gehaald.
Onduidelijk is nog door welke partij dit gedaan is, maar er zijn aanwijzingen dat de pro-Russische separatisten hier achter zitten. De wapens hiervoor zijn hoogstwaarschijnlijk door Rusland geleverd, maar niet door Russen bediend. Rusland is bereid om hun invloed te gebruiken om te zorgen dat alle lichamen zo spoedig mogelijk geborgen worden en naar Nederland worden gebracht. Echter in de ogen van de EU/VS doen zij dit niet daadkrachtig genoeg, waardoor er zwaardere, economische sancties genomen zullen worden tegen Rusland en verschillende rijke Russen die buiten Rusland bedrijven hebben. Vooralsnog lijkt militair ingrijpen door de EU/VS niet de prioriteit te krijgen. Hoe dan ook lijkt het erop dat een ramp als dit, gebruikt gaat worden voor een politiek spel vanuit Rusland.

Appendix A[9]

A decision in November 2013 by Ukraine's then President Viktor Yanukovych to pull out of an association deal with the European Union sparked huge street protests that eventually led to his downfall.
In March, Russia reacted by annexing the Ukrainian region of Crimea and unrest began growing in eastern Ukraine, where pro-Russian sentiment is strong. Relations between the West and Moscow have soured dramatically.

June 2014

27 June: The EU signs an association agreement with Ukraine, along with Georgia and Moldova, in what President Petro Poroshenko describes as the most important day in the country's history since independence in 1991.
25 June: Russia's parliament cancels a parliamentary resolution authorising the use of Russian forces in Ukraine. EU leaders welcome the move but warn of more sanctions if Russia does not do more to de-escalate tensions in Ukraine.
23 June: Rebels agree to observe the ceasefire proposed by the government until 27 June, but say they will not disarm until government troops leave the east.
21 June: The US imposes sanctions against seven pro-Russian leaders in Ukraine.
20 June: President Poroshenko announces a 15-point peace plan and declares a week-long truce.
16 June: Russia cuts off all gas supplies to Ukraine, as Gazprom says Ukraine has failed to settle its debts.
12 June: Ukraine says three Russian tanks have entered rebel areas in the east. Russia denies the allegations.
7 June: Petro Poroshenko is sworn in as president of Ukraine, amid hopes the move could help put an end to deadly fighting in the east of the country.
6 June: Russian President Vladimir Putin and Ukrainian President-elect Petro Poroshenko call for a quick end to the bloodshed in eastern Ukraine.
5 June: Leaders of the G7 industrial nations urge Russia to begin talks with the new leadership in Kiev to end the crisis in eastern Ukraine.

4 June: US President Barack Obama condemns Russian äggressionïn Ukraine while speaking in Warsaw to mark 25 years since the fall of communism in Poland.
3 June: Nato pledges to bolster its defence capabilities in response to Russian actions in Ukraine, but says it will stick to a key agreement with Moscow.

May 2014

26 May: Russia says it is 'open to dialogue' with President-elect Petro Poroshenko but insists military action against separatists must stop.
26-27 May: Ukrainian army launches 'anti-terrorist operation' to oust separatists occupying Donetsk airport. Combat jets, helicopters and airborne troops deployed and at least 40 separatists killed.
19 May: Russia's President Vladimir Putin says he has ordered troops near Ukraine's border to withdraw, but Nato says there is no sign they have pulled back.
7 May: In an apparent shift in Russian policy, President Putin calls for referendums in eastern Ukraine to be postponed to encourage dialogue. He also describes Ukraine's presidential elections scheduled for 25 May as a move 'in the right direction'.
1 May: Acting President Olexander Turchynov reinstates conscription, warning Ukraine is on 'full combat alert'. Pro-Russians take over the regional prosecutor's office in eastern Donetsk.

April 2014

23 April: Tony Blair warns Western leaders they must put aside their differences with Russia over Ukraine to focus on the threat of Islamic extremism.
22 April: Ukraine's acting president orders the relaunch of military operations against pro-Russian militants in the east after two men, one a local politician, are found "tortured to deathïn Donetsk region.
21 April: Russian Foreign Minister Sergei Lavrov accuses Kiev of breaking the Geneva agreement. Kiev releases photos as 'proof' of Russian soldiers operating in eastern Ukraine - what the photos say.
17 April: Russia, Ukraine, the US and the EU say they have agreed at talks in Geneva on steps to 'de-escalate' the crisis in eastern Ukraine. Three people are killed when Ukrainian security forces fend off a raid on a base in Mariupol. In Moscow, Russian President Vladimir Putin warns Ukraine is heading into an äbyss"by confronting pro-Russian separatists in the east of the country. He also dismisses claims that Russian agents are acting in eastern Ukraine.
16 April: 'Anti-terrorist' operation quickly stalls: pro-Russian militants in eastern Ukraine seize six armoured vehicles after they are blockaded by civilians and gunmen in the town of Kramatorsk. There is also an angry

confrontation between civilians and soldiers in a village nearby.
15 April: Ukraine's acting President, Olexander Turchynov, announces the start of an änti-terrorist operationägainst pro-Russian separatists.
10 April: Russian President Vladimir Putin says that gas supplies to Ukraine could be cut if Kiev does not pay off its debts, and warns this could affect gas deliveries to Europe.
Russia says that satellite images released by NATO, which purportedly show Russian troops massed on the Ukrainian border in recent weeks, are from August 2013. NATO defends the accuracy of the images.
2 April: Ukraine's deposed President Viktor Yanukovych says Russia's annexation of Crimea is 'a tragedy', expressing hope that the region will become part of Ukraine again.

March 2014

31 March: Russian President Vladimir Putin has ordered a 'partial withdrawal' of troops from the border with Ukraine, the German government announces.
28 March: Amid signs of a big build-up of Russian forces on Ukraine's eastern border, US President Barack Obama urges Moscow to 'move back its troops' and lower tensions.
24 March: Ukrainian troops leave Crimea, following emotional farewells to wives and family members left behind. The pullout follows an order by Ukraine's acting President Olexander Turchynov.
20 March: EU leaders gathered in Brussels condemn Russia's annexation of Crimea and extend the list of individuals targeted for sanctions. The US also extends sanctions.
18 March: Russian President Vladimir Putin addresses parliament, defending Moscow's actions on Crimea, then signs a bill to absorb the peninsula into the Russian Federation. Later, Ukraine says an officer was killed as a military base was stormed in Simferopol, Crimea, the first such death in the region since pro-Russian forces took over in late February.
17 March: The EU and US impose travel bans and asset freezes on several officials from Russia and Ukraine over the Crimea referendum.
15 March: Moscow vetoes a draft UN resolution criticising Crimea's secession referendum in Crimea.
12 March: Barack Obama pledges to stand with Ukraine during a meeting with interim Prime Minister Arseniy Yatsenyuk at the White House.
11 March: The European Commission offers Ukraine trade incentives worth nearly 500m euros ($694m; 417m). Ukrainian MPs ask the US and UK to use all measures, including military, to stop Russia's aggression.
8 March: The US and France warn of 'new measures' against Russia if it does not withdraw its forces from Ukraine. Warning shots are fired at international monitors trying to enter Crimea.

7 March: Russia says it will support Crimea if the region votes to leave Ukraine. Russia's state gas company Gazprom warns Kiev that its gas supply might be cut off. Ukraine sends just one athlete to the opening ceremony of the Paralympic Games in Sochi.
4 March: Vladimir Putin breaks his silence, saying the armed men besieging Ukrainian forces in Crimea are not Russian troops but are self-defence forces.
2 March: Ukraine's interim PM Yatsenyuk says Russia has effectively declared war. US says Russia is in control of Crimea.
1 March: Russia's parliament approves Vladimir Putin's request to use force in Ukraine to protect Russian interests. Pro-Russian rallies are held in several Ukrainian cities outside Crimea, including the second-biggest city Kharkiv. Barack Obama tells Mr Putin to pull forces back to bases.

February 2014

23-26 February: Parliament names speaker Olexander Turchynov as interim president. An arrest warrant is issued for Mr Yanukovych, and the acting president warns of the dangers of separatism. Members of the proposed new government appear before demonstrators, with Arseniy Yatsenyuk nominated prime minister. The elite Berkut police unit, blamed for deaths of protesters, is disbanded.
22 February:

- President Yanukovych disappears
- Protesters take control of presidential administration buildings
- Parliament votes to remove president from power with elections set for 25 May
- Mr Yanukovych appears on TV to denounce 'coup'
- His arch-rival Yulia Tymoshenko is freed from jail.

21 February: President Yanukovych signs compromise deal with opposition leaders.

December 2013

17 December: Vladimir Putin throws President Yanukovych an economic lifeline, agreeing to buy $15 billion of Ukrainian debt and reduce the price of Russian gas supplies by about a third.

November 2013

21 November: President Yanukovych's cabinet abandons an agreement on closer trade ties with EU, instead seeking closer co-operation with Russia. Ukrainian MPs also reject a bill to allow Yulia Tymoshenko to leave the country. Small protests start and comparisons with the Orange Revolution begin.

Bibliografie

[1] S. J. Brams. Theory of moves. *American Scientist*, Nov-dec 1993.

[2] S. J. Brams. Game theory and the Cuban missile crisis. *Millenium mathematics projects, University of Cambridge*, 2004.

[3] S.J. Brams and D. Wittman. Nonmyopic equilibra. *New York University en University of California*, juni 1980..=

[4] A.D. Taylor and A. M. Pacelli. Mathematics and politics. *Springer*, 2008.

[5] C.E. Carratini. Cuban Missile Crisis: Applying Strategic Culture to Game theory. *Utah State University*, 2013.

[6] H. Gintis. Game theory evolving, a problem-centered introduction to modeling strategic interaction. *Princeton university press*, 2009.

[7] L.C.M. Kallenberg. Besliskunde 2. *Universiteit Leiden*.

[8] Shor, Mikhael. Dictionary of Game Theory Terms. *GameTheory.net*, http://www.gametheory.net/dictionary/url_of_entry.html

[9] BBC.Ukraine crisis timeline. *www.bbc.com* http://www.bbc.com/news/world-middle-east-26248275

[10] Huib de Zeeuw. Eerst het gas, dan de moraal. *www.decorrespondent.nl* https://decorrespondent.nl/299/Eerst-het-gas-dan-de-moraal/32952491-c7e501ab