

I. Verstraten

Relaties tussen verschillende
getalsontwikkelingen en hun eigenschappen

Masterscriptie

Scriptiebegeleider: dr. C.C.C.J. Kalle

Datum Masterexamen: 6 maart 2017



Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1	Introductie	3
2	Getalsontwikkelingen met gehele basis	4
2.1	Decimale getallen	5
2.2	Binaire getallen	6
2.2.1	Analoog-digitaalozettters	6
2.3	Verdubbelingsafbeelding	7
2.4	Meerdere ontwikkelingen	10
2.5	β -ontwikkelingen	11
2.5.1	Algoritmes voor β -ontwikkelingen	13
2.5.2	Gulden snede	13
2.6	Meerdere ontwikkelingen bij de β -ontwikkeling	14
3	Cantorfunctie	19
3.1	Cantorverzameling	21
3.1.1	Constructie	21
3.2	Cantorfunctie	24
3.3	Relatie Cantorverzameling en β -ontwikkelingen	28
4	Kettingbreuken	31
4.1	Gauss afbeelding	34
4.2	Eigenschappen van kettingbreuken	36
4.3	Periodieke kettingbreuken	41
5	Minkowski φ-functie	46
5.1	Eigenschappen van de Minkowski φ -functie	50
6	Lüroth-ontwikkeling	61
6.1	Gegeneraliseerde Lüroth-ontwikkeling	63
6.2	α -Lüroth-ontwikkelingen	65
6.3	Relatie Minkowski φ -functie en α -Lüroth-ontwikkeling	66
7	Conclusie	68

1 Introductie

Getallen kunnen op meerdere manieren ontwikkeld worden. De meest bekende manier om dit te doen is de decimale ontwikkeling, maar ook de binaire ontwikkeling zal bij veel mensen bekend zijn. Het doel van deze scriptie is om een overzicht te geven van verschillende soorten getalsontwikkelingen om zo meer besef te krijgen van getallen en wat je er mee kunt. Ook worden relaties tussen deze verschillende getalsontwikkelingen bekeken. Deze relaties gegeven door de Cantorfunctie en de Minkowski τ -functie bezitten een aantal eigenschappen die we zullen laten zien en bewijzen. Van deze scriptie zal lesmateriaal worden gemaakt voor middelbare scholieren. Dit heeft invloed gehad op de manier van schrijven zoals bijvoorbeeld dat deze scriptie in het Nederlands geschreven is. Verschillende stukken hebben een verschillende stijl van schrijven. Een aantal stukken zijn zo geschreven dat middelbare scholieren het ook kunnen lezen. Daarentegen gaan sommige stukken dusdanig diep op de stof in dat bepaalde wiskundige voorkennis vereist is.

Deze scriptie is op te delen in twee delen. Deel 1 heeft als thema getallen ontwikkelen met een basis. Hoofdstuk 2 gaat over getalsontwikkelingen met gehele basis met een uitstap naar de β -ontwikkelingen die geen gehele basis hebben. We zullen laten zien hoe deze getallen ontwikkeld worden en hoeveel verschillende ontwikkelingen deze getallen kunnen hebben. In Hoofdstuk 3 zal de Cantorfunctie en daarbij ook de Cantorverzameling besproken worden en zullen hun eigenschappen gegeven en bewezen worden. Daarnaast zullen we ook de relatie tussen de Cantorverzameling en de eerdergenoemde β -ontwikkelingen gaan bekijken.

In deel 2 worden getallen op een heel andere manier ontwikkeld. In Hoofdstuk 4 zullen kettingbreuken gedefinieerd worden en de daarbij behorende eigenschappen. Deze kettingbreuken en eigenschappen zijn nodig om de Minkowski τ -functie die in Hoofdstuk 5 wordt beschreven te definiëren. De Minkowski τ -functie geeft een relatie tussen kettingbreuken en binaire getalsontwikkelingen weer.

De Cantorfunctie en de Minkowski τ -functie hebben veel eigenschappen gemeen waarvan de singulariteit één van de belangrijkste is. We zullen in deze scriptie uitleggen wat singuliere functies zijn en in Hoofdstukken 3 en 5 bewijzen dat beide functies singulier zijn.

Het laatste hoofdstuk, Hoofdstuk 6, zal de zogenaamde Lüroth- en α -Lüroth-ontwikkelingen beschrijven en zal de relatie tussen de α -Lüroth-ontwikkeling en Minkowski τ -functie beschreven worden.

2 Getalsontwikkelingen met gehele basis

Dagelijks maken we gebruik van getallen. Denk hierbij aan de tijd, temperatuur of bij het koken. Maar hoe is dit zo ontstaan en hoe zijn de getallen ingevoerd die voor ons nu zo bekend zijn?

Onze getallen staan in een zogenaamd *positiestelsel*. Dit betekent dat de volgorde waarin de cijfers staan, maar op één manier geïnterpreteerd kan worden.

Vroeger werd er zover bekend is echter geen gebruik gemaakt van een positiestelsel. Bij bijvoorbeeld de oude Egyptenaren werden getallen in de vorm van het Hiërogliefenschrift opgeschreven, maar dat was geen positiestelsel. Getallen werden combinaties van verschillende Hiërogliefen. Deze konden van links naar rechts opgeschreven worden, maar ook van boven naar beneden. Ook was er geen apart symbool voor het cijfer 0. Er zijn maar weinig bronnen waar informatie over de Egyptische wiskunde verkregen kan worden. Eén van de bekendste daarvan is het Rhind papyrus uit de 16e eeuw voor Christus. Er staat hier bijvoorbeeld een benadering op van π , namelijk $\pi = (\frac{16}{9})^2$. Ook werden alle breuken opgeschreven als *stambreuken*, dus breuken waarbij alle tellers gelijk zijn aan 1.

De Babyloniërs gebruikten een 60-tallig stelsel wat ook geen positiestelsel was. Op een gevonden Mesopotamisch kleitablet uit 2000 tot 1500 voor Christus stond bijvoorbeeld het getal 3 3 30. Dit getal kon de volgende betekenissen hebben

- $3 \cdot 60 + 3 + \frac{30}{60} = 183,5$;
- $3 + \frac{3}{60} + \frac{30}{60^2} = 3,05833333 \dots$

Vaak was het daadwerkelijke getal wel uit de context af te leiden of stond er 3;3 30 zodat het dan het tweede geval hierboven was. Echt handig om mee te rekenen was het niet.

In de Westerse wereld werd lange tijd het Romeinse getallenstelsel gebruikt, dat gebruik maakte van de symbolen

I, V, X, L, C, D, M.

Dit stelsel is wel een soort positiestelsel, want IV betekent altijd 4 en XC betekent altijd 90. Voor niet grote getallen was dit een handige manier van schrijven, maar voor grote getallen werd het onoverzichtelijk. Dit systeem had net als bij de Egyptenaren geen apart symbool voor 0.

Het positiestelsel wordt gezien als een Indische uitvinding uit de vijfde eeuw na Christus. Het is ontstaan uit een ouder stelsel, namelijk het Brahmi-systeem uit de derde eeuw voor Christus. Hierbij bestonden de cijfers 1 tot en met 9 wel, maar was er geen apart symbool voor het cijfer 0.

Voor het getal 10 bestond een apart symbool evenals voor 100, 1000 enzovoorts en op deze manier kon men grote getallen maken door deze symbolen achter elkaar te zetten, zie Figuur 1.

—	=	≡	𑖀	𑖁	𑖂	𑖃	𑖄	𑖅
1	2	3	4	5	6	7	8	9
𑖆	𑖇	𑖈	𑖉	𑖊	𑖋	𑖌	𑖍	𑖎
10	20	30	40	50	60	70	80	90
𑖏	𑖐	𑖑	𑖒	𑖓	𑖔	𑖕	𑖖	𑖗
100	200	500	1000	4000	70000			

Figuur 1: Brahmi getallen

In de vijfde eeuw na Christus kwam een onbekende Indiase geleerde op het idee om een apart symbool in te voeren voor het getal 0. Met dit symbool kon men de tientallen, honderdtallen enzovoorts maken zoals wij dat nu kennen.

Het duurde daarna nog erg lang voordat dit stelsel was doorgedrongen in de Westerse wereld. Allereerst moest het vertaald worden naar het Arabisch wat eind achtste eeuw gebeurde na de veroveringstochten van de Arabieren om vervolgens te worden vertaald naar het Latijn. Toen het was vertaald naar het Latijn werd het stelsel niet veel gebruikt. In Florence was het zelfs verboden. Ze hadden immers hun Romeinse cijfers en daarmee konden ze praktisch alles berekenen, want grote getallen werden nauwelijks gebruikt. Pas rond 1200 was er een Italiaanse wiskundige genaamd Fibonacci die na een reis naar de Arabische wereld een boek schreef over dit stelsel. Deze wiskundige is vooral bekend vanwege zijn reeks $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$, maar heeft ook een grote rol gespeeld in het bekendmaken van het decimale getallenstelsel. Toen in de 14e eeuw de berekeningen in de handel steeds moeilijker werden, werd het stelsel helemaal ingevoerd.

Een uitgebreidere omschrijving over de geschiedenis van het positiestelsel kan gevonden worden in bijvoorbeeld [4] of [22].

2.1 Decimale getallen

Het *decimale getallenstelsel* waar wij in het dagelijks leven zonder bij na te denken gebruik van maken is een voorbeeld van het positiestelsel. Het woord decimaal komt uit het Latijn waarin decima tien betekent. Bekijk bijvoorbeeld het getal 123. Dit getal wordt in het decimale getallenstelsel als volgt geschreven:

$$123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0. \tag{2.1}$$

Te zien aan de positie is dat het cijfer 2 hier altijd $2 \cdot 10^2$ betekent en nooit iets anders.

Ondanks dat het decimale getallenstelsel dus vanaf 1200 werd gebruikt, duurde het nog tot ongeveer 1600 voordat iemand bedacht breuken ook decimaal te schrijven.

Voorbeeld 2.1. *Het getal 46,71 wordt in het decimale getallenstelsel opgeschreven als*

$$46,71 = 4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 7 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10^2}.$$

De cijfers 0 tot en met 9 worden in de tellers gebruikt en in de noemer staan machten van het cijfer 10. Het cijfer 10 wordt de basis genoemd.

Het was de Nederlander Simon Stevin (1548-1620) die voorstelde om deze manier van breuken opschrijven in te voeren. Hij schreef dat de regering hierdoor ook tiendelige munten, maten en gewichten kon gebruiken.

2.2 Binaire getallen

Een ander positiestelsel waar op dit moment veel gebruik van gemaakt wordt, is het *binaire getallenstelsel*. Hierbij wordt een getal gerepresenteerd als een rijtje van nullen en enen en is de basis gelijk aan 2. Dit getallenstelsel wordt gebruikt in computers, omdat computers geheugencellen hebben die twee waarden kunnen aannemen. Een nul of één in zo'n rijtje wordt ook wel een bit genoemd. Getallen worden omgezet in eindige binaire ontwikkelingen zodat computers ermee kunnen werken.

Voorbeeld 2.2. *Het getal 26 wordt in het binaire getallenstelsel gegeven door*

$$\begin{aligned} 26 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= 11010. \end{aligned}$$

Net als bij het decimale getallenstelsel kunnen breuken ook een binaire ontwikkeling hebben.

Voorbeeld 2.3. *Het getal 0,8125 wordt in het binaire getallenstelsel gegeven door*

$$\begin{aligned} 0,8125 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} + \frac{1}{16} \\ &= 0,1101. \end{aligned}$$

2.2.1 Analooq-digitaalozetters

Computers krijgen vaak signalen binnen die analooq zijn, denk hierbij aan muziek of spraak. Deze analoge signalen zijn continu en kunnen alle waarden aannemen. Een analooq signaal moet digitaal worden gemaakt om ermee te kunnen werken in computers. Een digitaal signaal kan alleen discrete waarden aannemen. Er moet dus een continu signaal worden omgezet in een discreet signaal. Deze omzetprocedure heet *discretiseren*. Het discretiseren van een continu signaal wordt gedaan door in vaste tussenpozen een momentopname van het signaal te nemen en dit op te slaan als digitaal getal. Dit getal kan niet zoals bij een analooq getal alle waarden aannemen. Elk stukje signaal dat je hebt opgeslagen als digitaal getal bestaat uit een eindig aantal bits. Volgens [6] wordt er veel gebruik gemaakt van de volgende twee omzetters:

1. Nyquist-rate omzetters;
2. Oversampling omzetters.

Bij beide omzetter wordt elk stukje signaal gekwantiseerd. *Kwantiseren* betekent dat je een getal afrondt, omdat per stukje signaal het waardebereik waarnaar wordt afgerond eindig is. Begrijpelijk is dat kwantisatie zo kan leiden tot vervorming van het signaal. Het verschil tussen het originele en gekwantiseerde signaal wordt *kwantisatieruis* genoemd. Bij het maken van analoog-digitaalomzetter wordt er dan ook geprobeerd de kwantisatieruis te minimaliseren, om zo het oorspronkelijke signaal zo goed mogelijk te representeren.

Bij de Nyquist-rate omzetter wordt elk stukje signaal apart gekwantiseerd. De nauwkeurigheid van deze omzetter is hier dus evenredig met de nauwkeurigheid waarmee elk stukje signaal is gekwantiseerd. Bij Oversampling omzetter hangt de gekwantiseerde waarde daarentegen wel af van andere stukjes signaal en hun kwantisatie. Voordeel van de eerste omzetter is dat deze een hoge bandbreedte (het verschil tussen de hoogste en laagste frequentie die wordt doorgelaten) heeft en snel kan werken, maar daar staat tegenover dat de nauwkeurigheid van elk element in deze omzetter hoog moet zijn en dat levert hoge kosten op. De tweede omzetter kan daarentegen wel goed werken met onnauwkeurige elementen en is dus relatief goedkoop, maar hier is de bandbreedte dan weer laag. Een populaire omzetter is de Pulsecodemodulatie en deze is gebaseerd op de Nyquist-rate omzetting. Deze zal uitgebreid besproken worden in de volgende paragraaf.

2.3 Verdubbelingsafbeelding

De eerder genoemde Pulsecodemodulatie wordt ook wel de verdubbelingsafbeelding genoemd. Voor iedere $x \in [0, 1]$ kan een binaire ontwikkeling gegenereerd worden en deze zullen we schrijven als $x = [0, b_1 b_2 \dots]_2$ met $b_i(x) := b_i \in \{0, 1\}$ voor alle $i \in \mathbb{N}_{>0}$. De ontwikkeling kan gegenereerd worden met behulp van een dynamisch systeem T dat hier de verdubbelingsfunctie is. Er geldt hier dat de basis gelijk is aan 2.

Beschouw nu de functie $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gegeven door

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{als } x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1 & \text{als } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.2)$$

De waarde van b_i wordt bepaald door

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{als } T^{i-1}(x) < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{als } T^{i-1}(x) \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Door de functie te itereren wordt $T^{i-1}(x)$ verkregen. Er geldt $b_1 = 0$ als $x < \frac{1}{2}$ en $b_1 = 1$ als $x \geq \frac{1}{2}$. Hieruit volgt

$$\begin{aligned} T(x) &= 2x - b_1 \\ T^2(x) &= 2T(x) - b_2 \\ &\vdots \\ T^{i-1}(x) &= 2T^{i-2}(x) - b_{i-1} \\ T^i(x) &= 2T^{i-1}(x) - b_i. \end{aligned}$$

We gaan om de ontwikkeling voor x te genereren x isoleren in de vergelijking voor $T(x)$. Dit geeft $x = \frac{b_1}{2} + \frac{T(x)}{2}$. Door vervolgens de functie te itereren geldt dat de binaire ontwikkeling voor x gelijk is aan

$$\begin{aligned} x &= \frac{b_1}{2} + \frac{T(x)}{2} \\ &= \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{T^2(x)}{2^2} \\ &\vdots \\ &= \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \dots + \frac{b_n}{2^n} + \frac{T^n(x)}{2^n}. \end{aligned}$$

Er geldt voor alle $n \geq 1$ dat $T^n(x) \in [0, 1]$. Dit betekent dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T^n(x)}{2^n} = 0.$$

Het getal x heeft dus een binaire ontwikkeling gegeven door

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i(x)}{2^i}. \quad (2.4)$$

Voorbeeld 2.4. De binaire ontwikkeling van $\frac{7}{8}$.

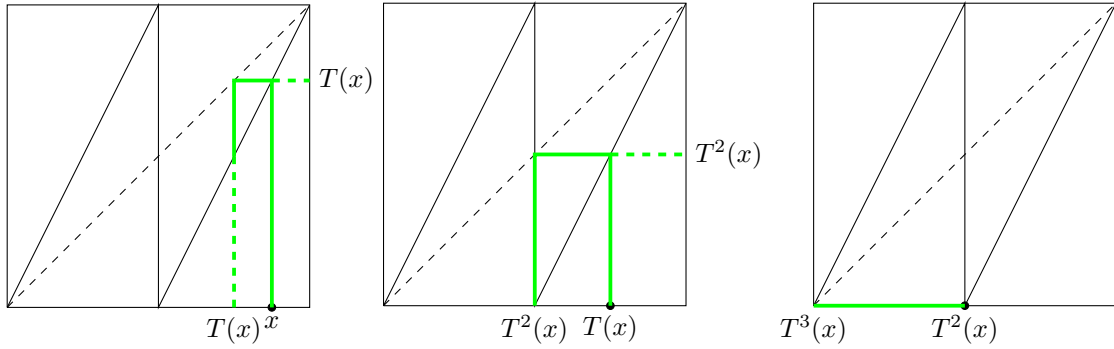
In onderstaand tabel wordt de binaire ontwikkeling van $\frac{7}{8}$ gegenereerd.

i	$T^{i-1}(x)$	$b_i(x)$	x
1	$T^0(x) = \frac{7}{8}$	1	$[0, 1 \dots]_2$
2	$T^1(x) = 2 \cdot \frac{7}{8} - 1 = \frac{3}{4}$	1	$[0, 11 \dots]_2$
3	$T^2(x) = 2 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$	1	$[0, 111 \dots]_2$
4	$T^3(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$	0	$[0, 1110 \dots]_2$
5	$T^4(x) = 2 \cdot 0 - 0 = 0$	0	$[0, 11100 \dots]_2$

Te zien is dat als $T^{i-1}(x)$ eenmaal de waarde een $\frac{1}{2}$ heeft bereikt, elke volgende waarde voor $T^{i-1}(x)$ gelijk is aan 0 en dus ook voor die van b_i . Hieruit volgt dat de binaire ontwikkeling voor $x = \frac{7}{8}$ gelijk is aan

$$x = [0, 111000 \dots]_2.$$

Zie Figuur 2 voor een illustratie van dit proces.



Figuur 2: Visualisatie van de binaire ontwikkeling voor $x = \frac{7}{8}$

Voor $x > 1$ kan er ook een binaire ontwikkeling bepaald worden. Er bestaat dan namelijk een n met $2^n \leq x < 2^{n+1}$ en dus $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2^{n+1}} < 1$. Dit geeft dan de volgende uitdrukking voor x :

$$\frac{x}{2^{n+1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}$$

$$x = 2^{n+1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}.$$

Op een analoge wijze kan voor elke $x \in \mathbb{R}$ een binaire ontwikkeling bepaald worden.

Daarnaast kunnen getallen ook worden ontwikkeld met ieder ander gehele basis $n \geq 2$. Deze ontwikkelingen van getallen met een geheel getal als basis kunnen ook gegenereerd worden met een dynamisch systeem. We zullen ons focussen op getallen in $[0, 1]$. Dan is de ontwikkeling voor een $x \in [0, 1]$ gelijk aan

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(x)}{n^k} \quad (2.5)$$

waarbij $a_k(x) := a_k = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Om deze ontwikkeling voor x te kunnen genereren bekijken we de afbeelding $Z_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gedefinieerd door

$$Z_n(x) = nx - a_1 \quad (2.6)$$

waarbij

$$a_1 = \begin{cases} 0 & \text{als } x < \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{als } \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n}, \\ \vdots & \\ n-1 & \text{als } x \geq \frac{n-1}{n}. \end{cases}$$

Door deze afbeelding Z_n op dezelfde manier als bij de verdubbelingsfunctie te itereren wordt uiteindelijk de ontwikkeling (2.5) gegenereerd.

2.4 Meerdere ontwikkelingen

Getallen kunnen een unieke ontwikkeling of meerdere ontwikkelingen hebben. Het getal π heeft bijvoorbeeld precies één decimale ontwikkeling, namelijk $3 \cdot 10^0 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots$.

Maar voor het getal 1 geldt bijvoorbeeld dat het gelijk is aan $0,9999\dots$. Het bewijs hiervan gaat als volgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{9} &= 0,1111\dots \\ 9 \cdot \frac{1}{9} &= 9 \cdot 0,1111\dots \\ 1 &= 0,9999\dots\end{aligned}$$

En zo geldt ook

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &= 0,25 \\ &= 0,24999\dots\end{aligned}$$

Het verschil zit in de keuze van de *drempelwaarde*. Dit is de waarde waarbij men bijvoorbeeld bij de binaire ontwikkeling besluit in plaats van een 0 een 1 te kiezen. Bij de binaire ontwikkeling die we al hebben gedefinieerd is de drempelwaarde gelijk aan een $\frac{1}{2}$. We bepaalden de b_i 's als volgt

$$b_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } T^{i-1}(x) < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{als } T^{i-1}(x) \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Bekijk nu de afbeelding $\tilde{T} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ met $\tilde{T}(x) = 2x - \tilde{b}_1$ en

$$\tilde{b}_1 := \tilde{b}_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{als } x > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.8)$$

De waarde van $\tilde{b}_i(x) := \tilde{b}_i \in \{0, 1\}$ wordt bepaald door

$$\tilde{b}_i = \begin{cases} 0 & \text{als } \tilde{T}^{i-1}(x) \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{als } \tilde{T}^{i-1}(x) > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Voorbeeld 2.5. De binaire ontwikkeling van $\frac{1}{4}$.

De binaire ontwikkeling van $\frac{1}{4}$ is volgens (2.7) gelijk aan

$$\frac{1}{4} = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \dots = [0,01000\dots]_2,$$

want $T(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ en $T^2(\frac{1}{4}) = T(\frac{1}{2}) = 0$ en verder geldt $T(0) = 0$ bij de rest van de iteraties.

De binaire ontwikkeling van $\frac{1}{4}$ is volgens (2.9) gelijk aan

$$\frac{1}{4} = \frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = [0,00111\dots]_2,$$

want $\tilde{T}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ en $\tilde{T}(\frac{1}{2}) = 1$ en verder geldt $\tilde{T}(1) = 1$ bij de rest van de iteraties.

Voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat deze precies één of twee binaire ontwikkelingen hebben. Alle x waarbij na een eindig aantal iteraties geldt $T^i(x) = \frac{1}{2}$ hebben twee binaire ontwikkelingen zoals geïllustreerd is in Voorbeeld 2.5. Deze x zijn precies die rationale getallen waarbij de noemer gelijk is aan een macht van twee. Dit soort getallen worden *dyadische rationalen* genoemd.

Definitie 2.1. Een **dyadisch rationaal** is een rationaal getal wiens noemer een macht van twee is.

Irrationale getallen en niet-dyadische rationalen hebben een unieke ontwikkeling.

Voorbeeld 2.6. *De binaire ontwikkeling van $\frac{1}{3}$.*

Er geldt $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ en dus $b_1 = 0$. Eén iteratie geeft $T(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ en dus $b_2 = 1$. Vervolgens geeft $T^2(\frac{1}{3}) = T(\frac{2}{3}) = 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ de beginwaarde terug en wordt de unieke binaire ontwikkeling van $\frac{1}{3}$ gegeven door

$$[0, 010101 \dots]_3.$$

2.5 β -ontwikkelingen

In de vorige paragraaf hebben we getallen benaderd met gehele getallen als basis. Bekijk nu getalsontwikkelingen met een basis dat niet geheeltallig is. We bekijken hier basis β met $1 < \beta < 2$. Deze getalsontwikkeling werd voor het eerst beschreven in [19]. Er geldt nu dat $x \in [0, \frac{1}{\beta-1}]$ wordt gerepresenteerd door

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\beta^i}. \quad (2.10)$$

Hierbij geldt net zoals bij de binaire ontwikkeling dat $b_i \in \{0, 1\}$ en we schrijven x als $x = [0, b_1 b_2 \dots]_{\beta}$.

Als voor alle $i \in \mathbb{N}_{>0}$ geldt $b_i = 0$, dan geldt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\beta^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{0}{\beta^i} = 0.$$

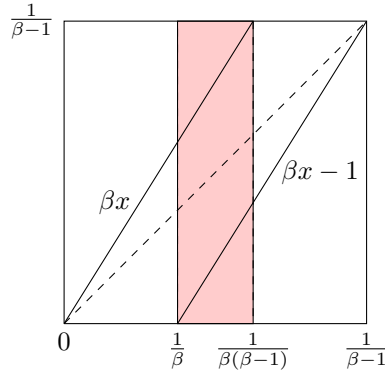
Als voor alle $i \in \mathbb{N}_{>0}$ geldt $b_i = 1$, dan geldt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\beta^i} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^i} \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta}\right)^i \\ &= \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\beta}} \\ &= \frac{1}{\beta - 1}. \end{aligned}$$

Vandaar dat geldt $x \in [0, \frac{1}{\beta-1}]$. Voor iedere $a \in [\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta(\beta-1)}]$ is er een transformatie $T_a : [0, \frac{1}{\beta-1}] \rightarrow [0, \frac{1}{\beta-1}]$ met

$$T_a(x) = \begin{cases} \beta x & \text{als } x < a, \\ \beta x - 1 & \text{als } x \geq a. \end{cases}$$

De a kan hier nog gekozen worden zoals te zien is in Figuur 3. Deze a verschilt per algoritme waarmee de β -ontwikkeling kan worden gegenereerd. Deze zullen later worden besproken.



Figuur 3: Visualisatie van de β -ontwikkeling

Door de transformatie T_a te itereren kan er een β -ontwikkeling worden bepaald voor een willekeurige $x \in [0, \frac{1}{\beta-1}]$. Voor alle $i \geq 1$ worden de waarden b_i als volgt gedefinieerd:

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{als } T_a^{i-1}(x) < a, \\ 1 & \text{als } T_a^{i-1}(x) \geq a. \end{cases} \quad (2.11)$$

Op dezelfde wijze als bij de binaire ontwikkeling kan T_a nu geïtereerd worden om een β -ontwikkeling voor x te verkrijgen. Alleen geldt nu voor alle $i \geq 1$ dat

$$T_a^i(x) = \beta T_a^{i-1}(x) - b_i.$$

Hieruit volgt dat een willekeurige $x \in [0, \frac{1}{\beta-1}]$ gelijk is aan

$$x = \frac{b_1}{\beta} + \frac{b_2}{\beta^2} + \dots + \frac{b_i}{\beta^i} + \frac{T_a^i(x)}{\beta^i}. \quad (2.12)$$

Omdat voor alle $i \in \mathbb{N}$ geldt dat $T_a^i(x) \in [0, \frac{1}{\beta-1}]$ en $1 < \beta < 2$ geldt nu

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{T_a^i(x)}{\beta^i} = 0.$$

Hieruit volgt dat de β -ontwikkeling van x gelijk is aan

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i(x)}{\beta^i}.$$

2.5.1 Algoritmes voor β -ontwikkelingen

Er zijn verschillende soorten algoritmes om een β -ontwikkeling te bepalen voor een willekeurige $x \in [0, \frac{1}{\beta-1}]$. Twee hiervan zijn het *Greedy algoritme* en het *Lazy algoritme*. Zoals de namen doen vermoeden kiest het Greedy algoritme zo snel mogelijk een 1 en het Lazy algoritme zo lang mogelijk een 0. Voor het Greedy algoritme geldt dat de bijbehorende transformatie T_g gelijk is aan

$$T_g(x) = \begin{cases} \beta x & \text{als } x < \frac{1}{\beta}, \\ \beta x - 1 & \text{als } x \geq \frac{1}{\beta}. \end{cases}$$

De transformatie T_l behorende bij het Lazy algoritme wordt gegeven door

$$T_l(x) = \begin{cases} \beta x & \text{als } x \leq \frac{1}{\beta(\beta-1)}, \\ \beta x - 1 & \text{als } x > \frac{1}{\beta(\beta-1)}. \end{cases}$$

Het Greedy en Lazy algoritme maakt dus gebruik van de uiterste waarden van a zoals ook te zien is in Figuur 3.

2.5.2 Gulden snede

Het is relatief eenvoudig om te werken met de gulden snede $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, omdat deze voldoet aan de volgende eigenschap:

$$\beta^2 - \beta - 1 = 0. \tag{2.13}$$

Voorbeeld 2.7. *Het genereren van de β -ontwikkeling van $\frac{1}{\beta^2}$ met behulp van het Greedy en Lazy algoritme.*

- *Greedy algoritme*

Omdat $\frac{1}{\beta^2} < \frac{1}{\beta}$, geldt nu dat $b_1 = 0$. Aangezien $T_g(\frac{1}{\beta^2}) = \beta \cdot \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\beta}$ en $\frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{\beta}$ kiezen we nu $b_2 = 1$. Bij de tweede iteratie geldt $T_g^2(\frac{1}{\beta^2}) = T_g(T_g(\frac{1}{\beta^2})) = T_g(\frac{1}{\beta}) = 0$ en dus $b_3 = 0$. Voor alle $n \geq 2$ geldt dat $T_g^n(\frac{1}{\beta^2}) = 0$ en dus geldt voor alle $n \geq 3$ dat $b_n(x) = 0$. Hieruit volgt dat de Greedy ontwikkeling voor $\frac{1}{\beta^2}$ gelijk is aan

$$x = [0, 0100000 \dots]_{\beta}.$$

- *Lazy algoritme*

Er geldt $\frac{1}{\beta^2} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\beta(\beta-1)}$ en dus $b_1 = 0$. Omdat $T_l(\frac{1}{\beta^2}) = \frac{1}{\beta}$ geldt ook $b_2 = 0$. Bij de tweede iteratie geldt $T_l^2(\frac{1}{\beta^2}) = 1 = \frac{1}{\beta(\beta-1)}$ en dus $b_3 = 0$. Vervolgens geldt nu dat $T_l^n(\frac{1}{\beta^2}) = \frac{1}{\beta-1}$ voor alle $n \geq 3$ en dus $b_n = 1$ voor $n \geq 4$. Hieruit volgt dat de Lazy ontwikkeling voor $\frac{1}{\beta^2}$ gelijk is aan

$$x = [0, 0001111 \dots]_{\beta}.$$

2.6 Meerdere ontwikkelingen bij de β -ontwikkeling

Bij de binaire ontwikkeling was te zien dat de drempelwaarde voor de twee verschillende ontwikkelingen lag bij precies één waarde, namelijk bij een $\frac{1}{2}$. Bij de β -ontwikkeling bestaat deze drempelwaarde ook, maar deze ligt niet precies bij één getal. Deze ligt namelijk in het interval $[\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta(\beta-1)}]$.

Beschouw de volgende drie gebieden:

- $E_0 = [0, \frac{1}{\beta})$,
- $S = [\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta(\beta-1)}]$,
- $E_1 = (\frac{1}{\beta(\beta-1)}, \frac{1}{\beta-1}]$.

Terugkijkend op het Greedy en Lazy algoritme is te zien dat $b_i = 0$ als $x \in E_0$ en $b_i = 1$ als $x \in E_0 \cup S$ respectievelijk. Er geldt voor deze gebieden dat

1. $\forall x : x \in E_0 \cup S \Rightarrow \beta x \in [0, \frac{1}{\beta-1}]$,
2. $\forall x : x \in S \cup E_1 \Rightarrow \beta x - 1 \in [0, \frac{1}{\beta-1}]$.

De β -ontwikkelingen kunnen nu bepaald worden door als x in S komt een 0 of een 1 te kiezen voor de bijbehorende b_i . Intuïtief zijn er dus meerdere ontwikkelingen mogelijk voor dezelfde x , omdat er in S gekozen kan worden welke waarde b_i aanneemt. Bij de binaire ontwikkeling had een $x \in [0, 1]$ een unieke of precies twee getalsontwikkelingen. Bij de β -ontwikkelingen kan een $x \in [0, \frac{1}{\beta-1}]$ veel meer dan twee ontwikkelingen hebben. In [21] is bewezen dat bijna alle $x \in (0, \frac{1}{\beta-1})$ met $1 < \beta < 2$ overaftelbaar veel β -ontwikkelingen hebben. Dit zal niet bewezen worden, omdat er te veel nieuwe informatie voor moet worden geïntroduceerd. Erdős, Joó en Komornik bewezen bovendien in [9] dat voor $1 < \beta < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ alle $x \in (0, \frac{1}{\beta-1})$ overaftelbaar veel β -ontwikkelingen hebben. Dit laatste resultaat zal worden bewezen.

Stelling 2.1. *Als $1 < \beta < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dan heeft elke $x \in (0, \frac{1}{\beta-1})$ overaftelbaar veel β -ontwikkelingen.*

Om deze stelling te bewijzen is het volgende lemma nodig.

Lemma 2.1. *Voor elke $x \in (0, \frac{1}{\beta})$ met $1 < \beta < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ geldt dat er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $T^n(x) \in S$ en $T^k(x) \in E_0$ voor alle $0 < k < n$.*

Vanwege de symmetrie van Figuur 3 geldt dat Lemma 2.1 voldoende is om te concluderen dat voor alle $x \in (0, \frac{1}{\beta-1})$ er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $T^n(x) \in S$.

Bewijs van Lemma 2.1

Er zijn twee situaties waarbij kan gelden dat $T^n(x) \notin S$ voor alle n :

- Voor een gegeven x bestaat er een n zodanig dat $T^n(x)$ van E_0 naar E_1 springt zonder in S te komen.
- Voor een gegeven x blijft $T^n(x) \in E_0$ voor alle n .

De waarde van n waarbij de sprong van E_0 naar E_1 voorkomt heeft geen invloed op het bewijs. Dus neem zonder verlies van algemeenheid aan dat we willen laten zien dat als $x \in E_0$ dat dan niet kan gelden $T(x) \in E_1$. Stel dat er wel geldt $x \in E_0$ en $T(x) \in E_1$, dan moet gelden $x < \frac{1}{\beta}$ en $\beta x > \frac{1}{\beta(\beta-1)}$. Dus voor x geldt nu de volgende begrenzing:

$$\frac{1}{\beta^2(\beta-1)} < x < \frac{1}{\beta}.$$

Deze vergelijking voldoet alleen als $\beta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ wat een tegenspraak oplevert. Dus het kan niet zo zijn dat $T^n(x)$ van E_0 naar E_1 springt zonder in S te komen.

Stel dat geldt voor een willekeurige $x \in \left(0, \frac{1}{\beta}\right)$ dat $T^n(x) \in E_0$ voor alle n . Dan moet er gelden dat $T^n(x) = \beta^n x$. Dus er moet gelden dat er een n bestaat zodanig dat $T^n(x) > \frac{1}{\beta}$ en dus $T^n(x) \notin E_0$.

Hieruit volgt dat voor elke $x \in \left(0, \frac{1}{\beta}\right)$ dat er een n bestaat zodanig dat $T^n(x) \in S$. \square

Naast dit lemma moet er ook een nieuwe transformatie gedefinieerd worden, namelijk de *random β -transformatie*. Deze transformatie ontwikkelt alle β -ontwikkelingen door in elke stap de Greedy of de Lazy afbeelding te kiezen onafhankelijk van wat er in de vorige stappen gekozen is.

Laat $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ en laat $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$ de *linkerverschuiving* zijn.

Definitie 2.2. Laat $\omega \in \Omega$ met $\omega = (\omega_i)_{i \geq 1}$. Dan is de **linkerverschuiving** $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$ gelijk aan

$$\sigma(\omega_i)_{i \geq 1} = (\omega_{i+1})_{i \geq 1}.$$

Definieer het eerste cijfer van een punt $(\omega, x) \in \Omega \times [0, \frac{1}{\beta-1}]$ door

$$d_1 = d_1(\omega, x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in E_0, \\ \omega_1 & \text{als } x \in S, \\ 1 & \text{als } x \in E_1. \end{cases}$$

Definitie 2.3. De **random β -transformatie** $K : \Omega \times [0, \frac{1}{\beta-1}] \rightarrow \Omega \times [0, \frac{1}{\beta-1}]$ wordt gedefinieerd door

$$K(\omega, x) = \begin{cases} (\omega, T_0(x)) & \text{als } x \in E_0, \\ (\sigma\omega, T_{\omega_1}x) & \text{als } x \in S, \\ (\omega, T_1(x)) & \text{als } x \in E_1 \end{cases} \quad (2.14)$$

met $T_0(x) = \beta x$ en $T_1(x) = \beta x - 1$.

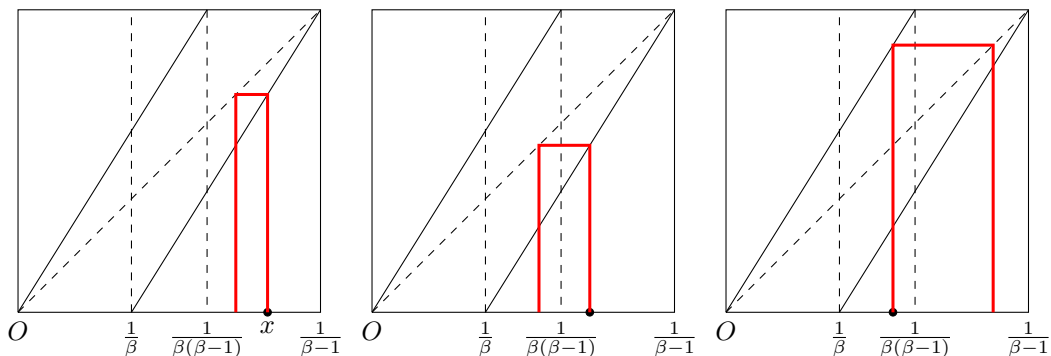
Definieer voor $n \geq 1$ de cijfers $d_n(\omega, x) := d_n$ door $d_n(\omega, x) = d_1(K^{n-1}(\omega, x))$ en laat $\pi : \Omega \times [0, \frac{1}{\beta-1}] \rightarrow [0, \frac{1}{\beta-1}]$ de projectie zijn. Dan geldt $\pi(K(\omega, x)) = \beta x - d_1$ en dus

$$x = \frac{d_1}{\beta} + \frac{\pi(K(\omega, x))}{\beta} = \dots = \frac{d_1}{\beta} + \dots + \frac{d_n}{\beta^n} + \frac{\pi(K^n(\omega, x))}{\beta^n}. \quad (2.15)$$

Omdat voor alle n geldt dat $\pi(K^n(\omega, x)) \in [0, \frac{1}{\beta-1}]$ geldt nu dat $x = \sum_{n \geq 1} \frac{d_n}{\beta^n}$. We noteren de random β -transformatie met $x = [0, d_1 d_2 \dots]_\omega$.

Voorbeeld 2.8. *Visualisatie van de random β -transformatie.*

We kiezen $\omega = 010110\dots$ en $x \in (\frac{1}{\beta(\beta-1)}, \frac{1}{\beta-1})$.



Figuur 4: Visualisatie van de random β -ontwikkeling

In Figuur 4 is te zien dat $d_1 = d_2 = 1$, omdat $x \in E_1$ en $T_1(x) \in E_1$. Er geldt $T_1^2(x) \in S$ en dus $d_3 = \omega_1 = 0$. Hieruit volgt nu dat $K^3(\omega, x) = (\sigma\omega, T_1^3 x)$ en $\sigma\omega = 10110\dots$. Dit geeft $T_0^3(x) \in E_1$ en dus $d_4 = 1$. Er geldt nu dat het begin van de random β -ontwikkeling wordt gegeven door $x = [0, 1101\dots]_\omega$.

Definitie 2.4. Een rijtje $(\theta_n)_{n \geq 1} \in \Omega$ heet **lexicografisch kleiner** dan een rijtje $(\phi_n)_{n \geq 1} \in \Omega$ dan en slechts dan als er een j bestaat met $\theta_j < \phi_j$ en $\theta_i = \phi_i$ voor alle $i < j$.

We schrijven dit als $\theta \prec \phi$.

Met behulp van de random β -transformatie en Lemma 2.1 kan er nu een bewijs gegeven worden voor Stelling 2.1.

Bewijs van Stelling 2.1

Laat $x \in [0, \frac{1}{\beta-1}]$ willekeurig gegeven zijn. We willen laten zien dat ieder rijtje ω een andere ontwikkeling $(d_n)_{n \geq 1}$ geeft. Dus als geldt $\omega \neq \tilde{\omega}$ met $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$ dan geldt ook $(d_n(\omega, x))_{n \geq 1} \neq (d_n(\tilde{\omega}, x))_{n \geq 1}$.

Zij $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$ met $\omega \prec \tilde{\omega}$ gegeven. Dan bestaat er een j waarvoor geldt $\omega_i = \tilde{\omega}_i$ voor alle $i < j$ en $\omega_j < \tilde{\omega}_j$. Laat n_j de j -de keer zijn dat $\pi(K^n(\omega, x)) \in S$. Deze n_j bestaat vanwege Lemma 2.1. Dan geldt $\pi(K^n(\omega, x)) \notin S$ als $n \neq n_j$ en $n < n_j$. Hieruit volgt dat $\pi(K^n(\omega, x)) = \pi(K^n(\tilde{\omega}, x))$ voor alle $n \leq n_j$. Dus er geldt $d_n(\omega, x) = d_n(\tilde{\omega}, x)$ voor alle $n \leq n_j$. Voor n_j geldt nu dat $\pi(K^{n_j}(\omega, x)) \in S$ en dus $d_{n_j+1}(\omega, x) = 0$ en $d_{n_j+1}(\tilde{\omega}, x) = 1$. Hieruit volgt dat $(d_n(\omega, x))_{n \geq 1} \prec (d_n(\tilde{\omega}, x))_{n \geq 1}$. Dus twee verschillende rijtjes geven een andere β -ontwikkeling voor dezelfde x . Omdat er overaftelbaar veel van dit soort rijtjes bestaan, geldt nu voor alle $x \in [0, \frac{1}{\beta-1}]$ met $1 < \beta < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dat x overaftelbaar veel β -ontwikkelingen heeft. \square

Voor andere waarden van β kan x aftelbaar veel of een unieke ontwikkeling hebben.

Propositie 2.1. Voor $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq \beta < 2$ geldt het volgende:

- i. als $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dan bestaan er $x \in \left(0, \frac{1}{\beta-1}\right)$ met aftelbaar veel β -ontwikkelingen,
- ii. als $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < \beta < 2$, dan bestaan er $x \in \left(0, \frac{1}{\beta-1}\right)$ met een unieke β -ontwikkeling.

Bewijs

- i. Als $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dan bestaan er $x \in \left(0, \frac{1}{\beta-1}\right)$ met aftelbaar veel β -ontwikkelingen.

Laat $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. De gulden snede heeft als fijne eigenschap dat $\frac{1}{\beta(\beta-1)} = 1$. We bekijken $x = \frac{1}{\beta}$ en zullen laten zien dat deze niet overaftelbaar veel ontwikkelingen heeft, maar aftelbaar veel. Er geldt hier $x \in S$ en er kan dus een 0 of 1 worden gekozen voor b_1 .

- Als geldt $b_1 = 1$, dan wordt b_2 bepaald met behulp van $T(x) = \beta x - 1$. Er geldt

$$T\left(\frac{1}{\beta}\right) = \beta \cdot \frac{1}{\beta} - 1 = 0.$$

Hieruit volgt dat $b_2 = 0$ en voor elk van de volgende iteraties geldt nu dat $x = 0 \in E_0$. Dus er geldt $b_n = 0$ voor alle $n \geq 2$.

- Als geldt $b_1 = 0$, dan wordt b_2 bepaald met behulp van $T(x) = \beta x$. Er geldt

$$T\left(\frac{1}{\beta}\right) = \beta \cdot \frac{1}{\beta} = 1.$$

Er geldt $x \in S$ en voor b_2 kan nu weer een 0 of een 1 gekozen worden.

- Als $b_2 = 0$ dan geldt

$$T(T(x)) = T(1) = \beta = \frac{1}{\beta-1} \in E_1.$$

Voor elk van de volgende iteraties geldt nu dat $x = \frac{1}{\beta-1} \in E_1$ en hieruit volgt dat $b_n = 1$ voor alle $n \geq 3$.

- Als $b_2 = 1$ dan geldt

$$T(T(x)) = T(1) = \beta - 1 = \frac{1}{\beta}.$$

Er geldt nu weer $x \in S$ en er kan vervolgens een 0 of 1 gekozen worden voor b_3 .

Bij de laatste iteratie is de gevonden x gelijk aan de x waarmee begonnen is. In elke iteratie wordt er een extra ontwikkeling voor x toegevoegd. Het aantal ontwikkelingen is dus lineair evenredig met het aantal iteraties. Dit zijn aftelbaar veel iteraties en niet overaftelbaar. Hieruit volgt dat er niet voor elke $x \in \left(0, \frac{1}{\beta-1}\right)$ met $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ overaftelbaar veel ontwikkelingen zijn.

- ii. Als $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < \beta < 2$, dan bestaan er $x \in \left(0, \frac{1}{\beta-1}\right)$ met een unieke β -ontwikkeling.

Om een unieke ontwikkeling te genereren, moet de gekozen x tijdens het itereren van de functie T nooit in S komen. Eén van de mogelijke ontwikkelingen van x waarbij

dat gebeurt, is door heen en weer te springen tussen E_0 en E_1 . Bekijk nu een $x \in E_0$ waarvoor geldt $T(x) \in E_1$ en vervolgens $T(T(x)) = x$ zodat we op hetzelfde punt in E_0 eindigen. We hebben dat $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < \beta < 2$ en hiervoor geldt

$$\beta^2 - \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow \beta^2 > \beta + 1 \Leftrightarrow \beta < \beta^2 - 1. \quad (2.16)$$

We bekijken hier $x = \frac{1}{\beta^2 - 1}$. Omdat $x < \frac{1}{\beta}$ volgt $x \in E_0$. Er geldt nu vanwege (2.16) dat

$$\begin{aligned} T(x) &= \beta \cdot \frac{1}{\beta^2 - 1} \\ &= \frac{\beta^2}{\beta(\beta^2 - 1)} \\ &> \frac{\beta + 1}{\beta(\beta - 1)(\beta + 1)} \\ &= \frac{1}{\beta(\beta - 1)}. \end{aligned}$$

Omdat $T(x) > \frac{1}{\beta(\beta - 1)}$ volgt nu dat $T(x) \in E_1$ en dus

$$\begin{aligned} T(T(x)) &= T\left(\frac{\beta}{\beta^2 - 1}\right) \\ &= \beta \cdot \frac{\beta}{\beta^2 - 1} - 1 \\ &= \frac{1}{\beta^2 - 1} \\ &= x. \end{aligned}$$

We hebben voor iedere $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < \beta < 2$ een x gevonden die een unieke β -ontwikkeling heeft. \square

3 Cantorfunctie

In vergelijking (2.5) hebben we gezien dat voor iedere $n \in \mathbb{N}_{n \geq 2}$ getallen ontwikkeld kunnen worden in basis n . Voor $n = 3$ worden tertiaire ontwikkelingen verkregen. Iedere $x \in [0, 1]$ kan worden geschreven als

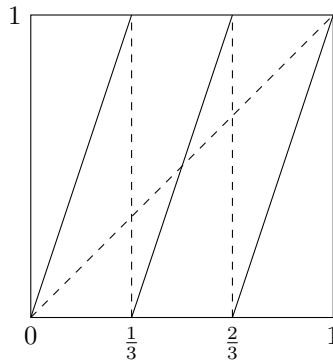
$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \quad (3.1)$$

voor zekere $a_i \in \{0, 1, 2\}$ en we schrijven $x = [0, a_1 a_2 \dots]_3$.

De tertiaire ontwikkeling van een getal $x \in [0, 1]$ wordt gegeneerd door de functie $S : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ met

$$S(x) = \begin{cases} 3x & \text{als } x < \frac{1}{3}, \\ 3x - 1 & \text{als } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, \\ 3x - 2 & \text{als } x \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Door de functie op dezelfde manier te itereren als bij de verdubbelingsafbeelding (zie §2.3) wordt de tertiaire ontwikkeling van x verkregen.



Figuur 5: Visualisatie van functie S

Voorbeeld 3.1. De tertiaire ontwikkeling van $\frac{2}{7}$.

In onderstaand tabel wordt de tertiaire ontwikkeling van $\frac{2}{7}$ gegeneerd.

i	$S^{i-1}(x)$	$a_i(x)$	x
1	$S^0(x) = \frac{2}{7}$	0	$[0, 0 \dots]_3$
2	$S^1(x) = 3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$	2	$[0, 02 \dots]_3$
3	$S^2(x) = 3 \cdot \frac{6}{7} - 2 = \frac{4}{7}$	1	$[0, 021 \dots]_3$
4	$S^3(x) = 3 \cdot \frac{4}{7} - 1 = \frac{5}{7}$	2	$[0, 0212 \dots]_3$
5	$S^4(x) = 3 \cdot \frac{5}{7} - 2 = \frac{1}{7}$	0	$[0, 02120 \dots]_3$
6	$S^5(x) = 3 \cdot \frac{1}{7} - 0 = \frac{3}{7}$	1	$[0, 021201 \dots]_3$
7	$S^6(x) = 3 \cdot \frac{3}{7} - 1 = \frac{2}{7}$	0	$[0, 0212010 \dots]_3$

Bij de zevende iteratie is de bijbehorende waarde weer gelijk aan $\frac{2}{7}$, dus het volgende cijfer is weer gelijk aan 0. De tertiaire ontwikkeling van $x = \frac{2}{7}$ is hierdoor periodiek en gelijk aan

$$x = [0, 021201021201 \dots]_3.$$

Een handig hulpmiddel zijn de zogenaamde *cilinderverzamelingen* (of *fundamentele intervallen*).

Definitie 3.1. Een n -cilinder, vaak genoteerd door Δ_n of $\Delta(a_1 \cdots a_n)$, is precies die verzameling waarvan elk element de eerste n cijfers van de getalsontwikkeling hetzelfde hebben.

Specifiek voor de tertiaire ontwikkeling geldt het volgende: $\Delta(0) = [0, \frac{1}{3})$, $\Delta(1) = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ en $\Delta(2) = [\frac{2}{3}, 1)$. Zij $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1, 2\}$. Een n -cilinder behorende bij de tertiaire ontwikkeling wordt dan gegeven door

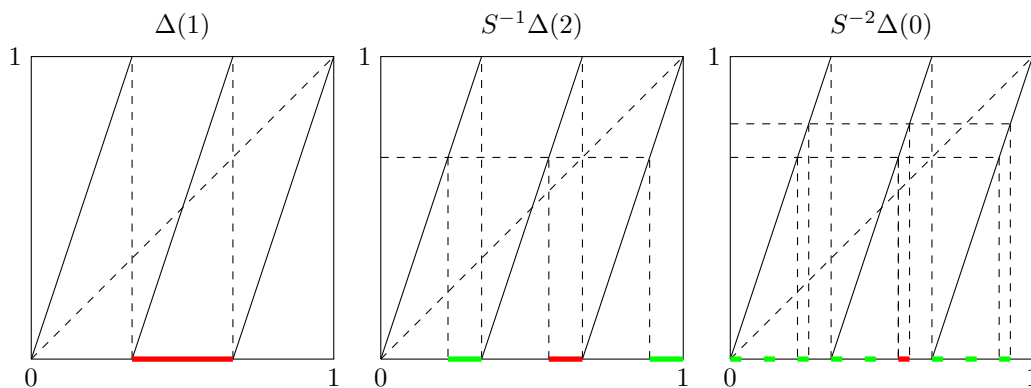
$$\begin{aligned} \Delta(a_1 \cdots a_n) &= \{x \in [0, 1) : S^{i-1}(x) \in \Delta(a_i) \text{ voor } 1 \leq i \leq n\} \\ &= \Delta(a_1) \cap S^{-1}\Delta(a_2) \cap \dots \cap S^{-(n-1)}\Delta(a_n) \\ &= \{x = [0, c_1 c_2 \cdots]_3 : c_k = a_k \text{ voor } 1 \leq k \leq n\} \\ &= \left[\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_n}{3^n}, \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_n + 1}{3^n} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Merk op dat cilinderverzamelingen gelijk zijn aan intervallen.

Definieer $L_{\Delta(a_1 \cdots a_n)} = \frac{a_1}{3} + \dots + \frac{a_n}{3^n}$ en $R_{\Delta(a_1 \cdots a_n)} = \frac{a_1}{3} + \dots + \frac{a_n + 1}{3^n}$ als de waarden van de linker- en rechterkant van de cilinder respectievelijk. Voor $\Delta(2)$ geldt dat deze waarden gelijk zijn aan $L_{\Delta(2)} = \frac{2}{3}$ en $R_{\Delta(2)} = 1$.

Voorbeeld 3.2. *Visualisatie van $\Delta(120)$.*

De cilinderverzameling $\Delta(120)$ bevat elke $x \in [0, 1)$ waarvoor geldt $x = [0, 120 \cdots]_3$. Er geldt nu vanwege vergelijking (3.2) dat $x \in [\frac{15}{27}, \frac{16}{27})$.



Figuur 6: Visualisatie van $\Delta(120)$

3.1 Cantorverzameling

De *Cantorverzameling* \mathcal{C} wordt verkregen door een iteratief proces waarbij telkens een interval wordt opgedeeld in drie delen waarvan vervolgens de middelste derde wordt verwijderd. Deze verzameling is vernoemd naar Georg Cantor (1845-1918) die deze verzameling definiëerde in 1883 zoals onder andere te lezen is in [10]. Hij schreef een reeks artikelen waarin hij uiteindelijk de definitie voor een *perfecte verzameling* introduceert. Hierbij geeft hij in een voetnoot een voorbeeld van een perfecte verzameling die nu bekend staat als de Cantorverzameling. We zullen hier laten zien dat de Cantorverzameling zo'n perfecte verzameling is.

3.1.1 Constructie

Laat $C_0 := [0, 1]$. Verwijder nu de middelste derde van C_0 om C_1 te verkrijgen. Herhaal dit om C_2 te construeren en tevens voor C_i met $i \geq 3$. Dit geeft

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \\ C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \\ &\vdots \end{aligned}$$

Er geldt nu $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots$.

Voor iedere n bestaat C_n uit 2^n intervallen en elk van deze intervallen heeft een lengte van $\frac{1}{3^n}$. De Cantorverzameling is nu gelijk aan

$$\mathcal{C} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n. \tag{3.3}$$



Figuur 7: Cantorverzameling

In het vervolg definiëren we de Cantorverzameling met behulp van de tertiaire ontwikkeling. Elementen uit de Cantorverzameling zijn precies die getallen wiens tertiaire getalsontwikkelingen geen één bevat. Te zien is dat in de eerste iteratie precies op eindpunten na die n -cilinder wordt weggehaald waarvoor geldt $a_1 = 1$. De getallen $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ worden niet verwijderd

aangezien deze ook geschreven kunnen worden als $0,0222\dots$ en $0,2000\dots$ respectievelijk. In de tweede iteratie worden op eindpunten na precies die n -cilinders weggehaald waarvoor geldt $a_2 = 1$ etcetera. Wat overblijft is de Cantorverzameling \mathcal{C} . Elke $x \in \mathcal{C}$ heeft dus een ontwikkeling die geen enen bevat en deze ontwikkeling is uniek.

De volgende propositie geeft een aantal eigenschappen van de Cantorverzameling.

Propositie 3.1. *De Cantorverzameling \mathcal{C} voldoet aan de volgende eigenschappen:*

- i. \mathcal{C} is niet-leeg,*
- ii. \mathcal{C} is overaftelbaar,*
- iii. \mathcal{C} is compact,*
- iv. het inwendige van \mathcal{C} is leeg.*

Bewijs

- i. \mathcal{C} is niet-leeg.*

Door constructie geldt dat het eindpunt $x = \frac{2}{3}$ in C_n zit voor elke n . Hieruit volgt gelijk dat \mathcal{C} niet-leeg is.

- ii. \mathcal{C} is overaftelbaar.*

We bewijzen dit uit het ongerijmde en nemen aan dat \mathcal{C} aftelbaar is. Dan bestaat er een aftelbaar rijtje x_0, x_1, \dots bestaande uit elk element van \mathcal{C} . We weten dat elk van deze elementen een tertiaire ontwikkeling heeft die geen 1 bevat. De tertiaire ontwikkeling van het i -de element x_i wordt geschreven als $x_i = [0, a_{i,0}a_{i,1}\dots]_3$. Dus er geldt

$$\begin{aligned} x_0 &= [0, a_{0,0}a_{0,1}a_{0,2}\dots]_3, \\ x_1 &= [0, a_{1,0}a_{1,1}a_{1,2}\dots]_3, \\ &\vdots \\ x_i &= [0, a_{i,0}a_{i,1}a_{i,2}\dots]_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

We willen nu een getal y vinden dat niet in het aftelbare lijstje zit en dus ongelijk is aan x_i voor elke i , maar wel in \mathcal{C} zit. We weten dat $a_{0,0}$ gelijk moet zijn aan 0 of 2. Laat $b_0 \neq a_{0,0}$, maar wel 0 of 2. Dus als $a_{0,0} = 0$, dan geldt $b_0 = 2$. Hetzelfde doen we nu voor iedere $n \geq 1$. Laat b_n gelijk zijn aan het unieke element van de verzameling $\{0, 2\} \setminus \{a_{n,n}\}$. Beschouw $y = [0, b_0b_1b_2\dots]_3$. Door constructie is b_n gelijk aan 0 of 2 voor alle $n \geq 0$ en daardoor is y een element van \mathcal{C} . Alleen geldt door deze constructie dat $y \neq x_i$ voor alle i . Als namelijk zou gelden dat $y = x_i$ voor een i dan representeren $[0, a_{i,0}a_{i,1}\dots]_3$ en $[0, b_0b_1\dots]_3$ hetzelfde getal $x \in [0, 1]$, maar zijn het wel twee verschillende tertiaire ontwikkelingen die beide geen één bevat. Dit is niet mogelijk volgens constructie van de Cantorverzameling en er is dus een getal y gevonden die niet in het aftelbare rijtje zit. We hebben nu een tegenspraak en hieruit volgt dat \mathcal{C} een overaftelbare verzameling is.

iii. \mathcal{C} is compact.

Om te laten zien dat een verzameling compact is, maken we gebruik van de *Stelling van Heine-Borel*. Deze stelling zegt dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

- \mathcal{C} is compact,
- \mathcal{C} is gesloten en begrensd.

Door constructie bestaat C_n uit 2^n disjuncte gesloten intervallen voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dus C_n is een gesloten verzameling. De doorsnede van een aftelbaar aantal gesloten verzamelingen is ook weer gesloten, dus hieruit volgt dat \mathcal{C} een gesloten verzameling is. Daar $\mathcal{C} \subseteq [0, 1]$ volgt dat \mathcal{C} begrensd is. Omdat nu \mathcal{C} gesloten en begrensd is, kunnen we concluderen dat \mathcal{C} compact is.

iv. *Het inwendige van \mathcal{C} is leeg.*

Stel $a \in \mathcal{C}$ en beschouw het open bolletje $B(a, r)$ rond a met straal r . Laat n zo groot zijn dat $\frac{1}{3^n} < r$. C_n is de vereniging van disjuncte gesloten intervallen. Laat $I_n \in C_n$ nu het interval zijn dat a bevat. Er geldt dan $I_n \subseteq B(a, r)$. Maar neem nu een punt x in de middelste derde interval van I_n , dan geldt $x \notin C_{n+1}$ en dus $x \notin \mathcal{C}$. Alleen $x \in B(a, r)$ en omdat I_n volledig bevat is in $B(a, r)$ zien we dat de open bal niet volledig in \mathcal{C} kan zitten. Dus a kan geen inwendig punt van \mathcal{C} zijn. \square

Cantor gaf deze verzameling als voorbeeld van een perfecte verzameling. Om te laten zien dat dit inderdaad het geval is, zullen we eerst definiëren wat een perfecte verzameling is.

Definitie 3.2. Een punt x is een **verdichtingspunt** van een verzameling X als voor alle $\varepsilon > 0$ er een $y \in X$ bestaat met $y \neq x$ zodanig dat $|x - y| < \varepsilon$.

Definitie 3.3. Een **perfecte verzameling** is een gesloten verzameling die alleen verdichtingspunten bevat.

Stelling 3.1. *De Cantorverzameling is een perfecte verzameling.*

Bewijs

Laat $x \in \mathcal{C}$ en $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $n \in \mathbb{N}$ groot genoeg zodanig dat $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Bekijk C_n . We weten dat C_n bestaat uit 2^n onderling disjuncte gesloten intervallen elk met lengte $\frac{1}{3^n}$. In één van deze intervallen zit x , noem deze I . Beschouw het open bolletje $B(x, \varepsilon)$ rond x met straal ε . Er geldt dan $I \subseteq B(x, \varepsilon)$. Bekijk nu C_{n+1} . Deze verzameling bestaat uit 2^{n+1} intervallen waarvan er volgens constructie precies twee deelverzamelingen zijn van I , noem deze I_0 en I_1 . Stel $x \in I_0$. Vanwege dezelfde argumentatie als bij Propositie 3.1 geldt dat I_1 niet-leeg is. Kies nu een $y \in I_1$ willekeurig. Dan geldt $y \in \mathcal{C} \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\})$. Hieruit volgt dat x een verdichtingspunt is. Omdat x willekeurig gekozen is en \mathcal{C} volgens Propositie 3.1 gesloten is, volgt hieruit dat \mathcal{C} een perfecte verzameling is. \square

3.2 Cantorfunctie

Er bestaan relaties tussen verschillende getalontwikkelingen. In 1883 definieerde Cantor een functie die elementen uit de Cantorverzameling \mathcal{C} stuurt naar punten met een vergelijkbare binaire ontwikkeling. Deze functie wordt ook wel de *Cantorfunctie* of *Duivelse trap* genoemd. Cantor bewees onder andere dat deze functie continu en stijgend is op $[0, 1]$.

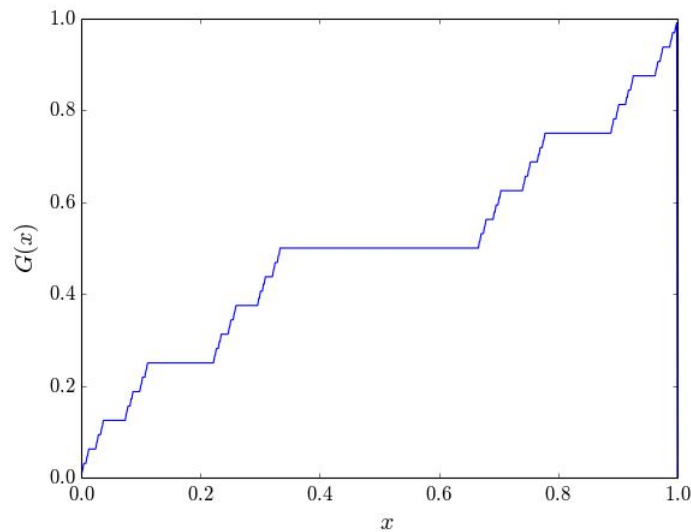
Laat $x \in [0, 1]$ en stel $x = [0, a_1 a_2 \dots]_3$. De tertiaire ontwikkeling van x wordt dan gegeven door uitdrukking (3.1).

Laat N de kleinste waarde voor i zijn waarvoor geldt $a_i = 1$. Als zo'n i niet bestaat, dan geldt $N = \infty$. Laat

$$b_i = \begin{cases} \frac{a_i}{2} & \text{als } i < N, \\ 1 & \text{als } i = N. \end{cases} \quad (3.4)$$

We definiëren nu de Cantorfunctie $G : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ door

$$G(x) = G\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{2^i}.$$



Figuur 8: Cantorfunctie

Deze functie heeft een aantal bijzondere eigenschappen gegeven in de volgende propositie, zie ook [7].

Definieer $I^\circ := [0, 1] \setminus \mathcal{C}$.

Propositie 3.2. *De Cantorfunctie G voldoet aan de volgende eigenschappen:*

- i. G is constant op elk interval in I° ,*
- ii. G is continu,*
- iii. G is monotoon stijgend,*
- iv. G beeldt \mathcal{C} surjectief af op $[0, 1]$.*

Bewijs

- i. G is constant op elk interval in I° .*

Stel x, x' zitten in hetzelfde component van I° met $x = [0, x_1x_2 \cdots]_3$ en $x' = [0, x'_1x'_2 \cdots]_3$. Dan bestaat er een n zodanig dat $x, x' \in C_n$ en $x, x' \notin C_{n+1}$. Laat Δ_n gelijk zijn aan de cilinderverzameling van orde n die x bevat. Dan geldt dat $x, x' \in \Delta_n$ en dus $G(x) = G(x')$. Omdat x en x' willekeurig gekozen zijn, volgt hieruit dat G constant is op elk component van I° .

- ii. G is continu.*

Laat $\varepsilon > 0$ en $x \in [0, 1]$ gegeven zijn en stel dat $x = [0, x_1x_2 \cdots]_3$. Laat $M > 0$ zodanig zijn dat $\frac{1}{2^M} < \varepsilon$. We onderscheiden drie gevallen.

- (a) *x ligt niet op de rand van de cilinder $\Delta(x_1 \cdots x_M)$.*

Kies $\delta = \min\{x - L_{\Delta(x_1 \cdots x_M)}, R_{\Delta(x_1 \cdots x_M)} - x\} > 0$. Zij $x' \in [0, 1]$ met $|x - x'| < \delta$. Dan geldt $x' \in \Delta(x_1 \cdots x_M)$. Laat $N, N' \in \mathbb{N}$ de kleinste waarden zijn waarvoor geldt $x_N = 1$ en $x'_{N'} = 1$. Laat $y = [0, y_1y_2 \cdots]_2$ en $y' = [0, y'_1y'_2 \cdots]_2$ de binaire ontwikkelingen zijn van $G(x)$ en $G(x')$ respectievelijk. Schrijf

$$G(x) = \sum_{n=1}^N \frac{y_n}{2^n} \quad \text{en} \quad G(x') = \sum_{n=1}^{N'} \frac{y'_n}{2^n}.$$

Als $N \leq M$, dan geldt $N = N'$ en dus $G(x) = G(x')$. Hieruit volgt direct dat $|G(x) - G(x')| < \varepsilon$.

Als $N > M$, dan ook $N' > M$. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $N \geq N'$ en schrijf $y'_n = 0$ voor alle $N' < n \leq N$. Dan geldt

$$\begin{aligned} |G(x) - G(x')| &= \left| \sum_{n=1}^N \frac{y_n}{2^n} - \sum_{n=1}^{N'} \frac{y_n}{2^n} \right| \\ &= \left| \sum_{n=M+1}^N \frac{y_n}{2^n} - \sum_{n=M+1}^N \frac{y'_n}{2^n} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^M} \sum_{n=1}^N \frac{|y_{n+M+1} - y'_{n+M+1}|}{2^n} \\ &\leq \frac{1}{2^M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^M} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) x ligt op de rand van de cilinder $\Delta(x_1 \cdots x_M)$ en $x \notin \mathcal{C}$.

Kies δ als de kleinste afstand van x tot \mathcal{C} . Deze afstand is groter dan 0, want $x \notin \mathcal{C}$. Er geldt $x \in I^\circ$ en als $x' \in [0, 1]$ met $|x - x'| < \delta$ dan geldt dat x en x' in dezelfde component van I° zitten. G is constant op ieder component, dus $G(x) = G(x')$ en er volgt direct dat $|G(x) - G(x')| < \varepsilon$.

(c) x ligt op de rand van de cilinder $\Delta(x_1 \cdots x_M)$ en $x \in \mathcal{C}$.

Laat N de kleinste index zijn zodanig dat $x_N = 1$. Dan geldt $N \leq M$ en x ligt op de rand van de cilinder $\Delta(x_1 \cdots x_N)$. Er geldt ofwel

$$\frac{\Delta(x_1 \cdots x_{N-1}1)}{\quad \bullet \quad} \quad \Delta(x_1 \cdots x_{N-1}2) \quad \text{of} \quad \frac{\Delta(x_1 \cdots x_{N-1}0)}{\quad \bullet \quad} \quad \Delta(x_1 \cdots x_{N-1}1)$$

Figuur 9: Situatie 1 en situatie 2

Stel zonder verlies van algemeenheid dat $x = L_{\Delta(x_1 \cdots x_{N-1}1)}$, dus situatie 2 geldt. Kies $\delta = \frac{1}{3^M}$. Laat $x' \in [0, 1]$ met $|x - x'| < \delta$. Dan geldt of $x' \in \Delta(x_1 \cdots x_{N-1}1)$ of $x' \in \Delta(x_1 \cdots x_{N-1}02 \cdots 2)$ waarbij er in totaal $M - N$ aantal tweeën zijn. In het eerste geval geldt $G(x) = G(x')$. In het tweede geval geldt voor een $M < N'$ dat

$$\begin{aligned} |G(x) - G(x')| &= \left| \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x_n/2}{2^n} + \frac{1}{2^N} - \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{x_n/2}{2^n} + \frac{0}{2^N} + \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{2^n} + \sum_{n=M+1}^{N'} \frac{y'_n}{2^n} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2^N} - \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{2^n} - \sum_{n=M+1}^{N'} \frac{y'_n}{2^n} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^N} - \frac{1}{2^N} \sum_{n=1}^{M-N} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^N} \cdot \frac{1}{2^{M-N}} \\ &= \frac{1}{2^M} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat G continu is in elk punt $x \in [0, 1]$.

iii. G is monotoon stijgend.

Bekijk $x, y \in [0, 1]$ met $x = [0, a_1 a_2 \cdots]_3$ en $y = [0, b_1 b_2 \cdots]_3$. Laat $x > y$, dan bestaat er een j waarvoor geldt $a_i = b_i$ voor alle $i < j$ en $a_j > b_j$. We moeten drie situaties onderscheiden.

- Als $a_i = 1$ voor een $i < j$ dan geldt $G(x) = G(y)$.
- Als $a_j = 1$ dan geldt

$$G(x) = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{a_k/2}{2^k} + \frac{1}{2^j} \geq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{a_k/2}{2^k} + \frac{0}{2^j} + \sum_{k=j+1}^N \frac{b_k/2}{2^k} = G(y).$$

- Als $a_i = 1$ voor een $i > j$ dan geldt voor een $N \geq j$ dat

$$\begin{aligned}
G(x) &= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{a_k/2}{2^k} + \frac{a_j/2}{2^j} + \sum_{k=j+1}^{i-1} \frac{a_k/2}{2^k} + \frac{1}{2^i} \\
&\geq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{a_k/2}{2^k} + \frac{1}{2^j} \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{a_k/2}{2^k} + \frac{1}{2^j} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&\geq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{a_k/2}{2^k} + \frac{0}{2^j} + \sum_{k=j+1}^N \frac{b_k/2}{2^k} \\
&= G(y).
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat voor $x > y$ er geldt $G(x) \geq G(y)$ en dus is G monotoon stijgend.

iv. G beeldt \mathcal{C} surjectief af op $[0, 1]$.

Stel $y \in [0, 1]$ heeft als binaire ontwikkeling $y = [0, y_1 y_2 \dots]_2$. Laat $x_n = 2y_n$ voor elke n , dan geldt $x_n \in \{0, 2\}$ voor alle n . Hieruit volgt $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \in \mathcal{C}$ en er geldt

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}x_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} = y.$$

Hieruit volgt dat G de Cantorverzameling surjectief afbeeldt op $[0, 1]$. □

Het opvallende aan de Cantorfunctie is dat de afgeleide bijna overal gelijk is aan 0, maar toch stijgt de functie op het interval $[0, 1]$ van 0 naar 1. Dit betekent dat de functie *singulier* is.

Een functie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is *singulier* als het voldoet aan de volgende eigenschappen:

- i. f is continu op $[0, 1]$,
- ii. f is niet-constant op $[0, 1]$,
- iii. de afgeleide van f is bijna overal gelijk aan 0.

Bij het bewijzen van singulariteit zullen we gebruik maken van de Lebesgue-maat λ en λ zal verder ook altijd de Lebesgue-maat betekenen.

Stelling 3.2. *De Cantorfunctie G is een singuliere functie.*

Bewijs

Uit Propositie 3.2 volgt dat G een continue functie is op $[0, 1]$. Omdat $G(0) = 0$ en $G(1) = 1$ is G een niet-constante functie. Om te bewijzen dat G een singuliere functie is, voldoet het om te laten zien dat de Lebesgue-maat over de Cantorverzameling gelijk is aan 0 vanwege

Propositie 3.2.i. Er geldt

$$\begin{aligned}
 \lambda(\mathcal{C}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(C_n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \lambda(C_{n-1}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \lambda(C_{n-2}) \\
 &\quad \vdots \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

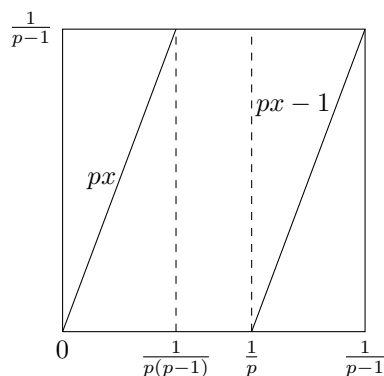
Hieruit volgt dat G een singuliere functie is. □

3.3 Relatie Cantorverzameling en β -ontwikkelingen

In §2.5 hebben we getallen $x \in [0, 1]$ ontwikkeld met niet-gehele basis. Deze getalsontwikkelingen noemden we de β -ontwikkelingen. In [2] wordt een functie onderzocht die gelijkenissen vertoont met de Cantorfunctie, maar dan in relatie tot de β -ontwikkeling in plaats van de binaire ontwikkeling.

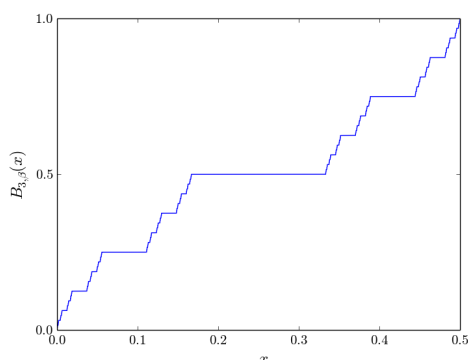
Laat $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{p^i}$ met $b_i := b_i(x) \in \{0, 1\}$. De ontwikkeling behorende bij een getal x in basis p zullen we de p -ontwikkeling van x noemen. Deze p -ontwikkelingen worden met behulp van de Greedy ontwikkeling zoals beschreven in §2.5.1 gegenereerd. Merk op dat $b_i \in \{0, 1\}$ en niet in $\{0, 2\}$ zoals we hebben gezien bij de constructie van de Cantorfunctie. De verzameling van getallen x die minstens één ontwikkeling hebben zullen we J_p noemen. Merk op dat $J_p \subseteq \left[0, \frac{1}{p-1}\right]$. Voor $p \in (1, 2]$ geldt dat $J_p = \left[0, \frac{1}{p-1}\right]$ wat bewezen is in [19]. Definieer voor $p \in (1, 2]$ en $\beta > 1$ de functie $b_{p,\beta} : J_p \rightarrow J_\beta$ met $b_{p,\beta}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\beta^i}$ en $J_\beta \subseteq \left[0, \frac{1}{1-\beta}\right]$.

Voor $p > 2$ is te zien in Figuur 10 dat getallen in $\left(\frac{1}{p(p-1)}, \frac{1}{p}\right)$ geen p -ontwikkeling hebben. De verzameling J_p is voor $p > 2$ een gesloten verzameling in $\left[0, \frac{1}{p-1}\right]$ en lijkt veel op de Cantorverzameling.



Figuur 10: p -ontwikkeling met $p > 2$

Als er nu een soortgelijke constructie als bij de Cantorfunctie wordt toegepast kan de continue functie $B_{p,\beta} : \left[0, \frac{1}{p-1}\right] \rightarrow \left[0, \frac{1}{\beta-1}\right]$ geïntroduceerd worden. Deze functie komt overeen met $b_{p,\beta}$ op J_p en is tevens de continue uitbreiding van $b_{p,\beta}$ door de functie lineair te maken op ieder component in $\left[0, \frac{1}{p-1}\right] \setminus J_p$. Als $p = 3$ en $\beta = 2$ geeft $B_{p,\beta}$ hetzelfde als de Cantorfunctie alleen met domein $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ in plaats van $[0, 1]$ zoals te zien is in Figuur 11.



Figuur 11: Visualisatie van $B_{p,\beta}$ met $p = 3$ en $\beta = 2$.

Voor verschillende waarden van p en β heeft de functie $B_{p,\beta}$ andere eigenschappen zoals te lezen is in [2]. Voor één van deze eigenschappen hebben we de volgende definitie nodig.

Definitie 3.4. De **variatie** van een reëelwaardige functie f gedefinieerd op een interval $[a, b] \in \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$V_a^b(f) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n_P-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

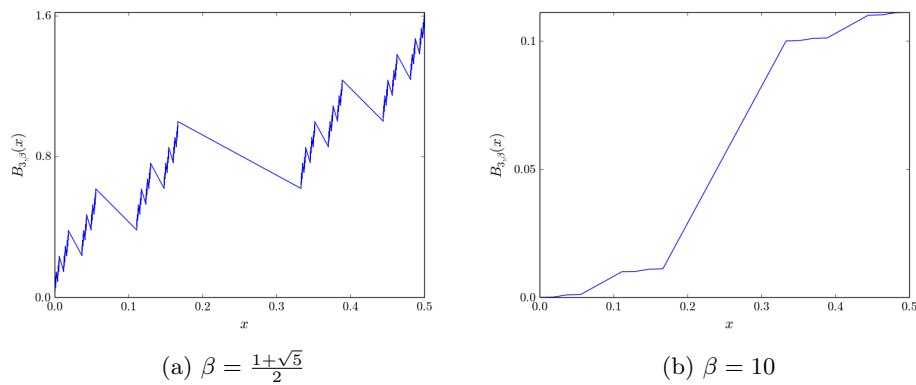
waarbij het supremum genomen wordt over de verzameling van alle partities $\mathcal{P} = \{P = \{x_0, \dots, x_{n_P}\} | P \text{ is een partitie van } [a, b]\}$ van het gegeven interval.

De eigenschappen worden nu in de volgende stelling gegeven, wat ook te lezen is in [2].

Stelling 3.3. Laat $p > 2$ en $\beta > 1$.

- i.* De functie $B_{p,\beta}$ is bijna overal differentieerbaar.
- ii.* Als $\beta < 2$, dan heeft $B_{p,\beta}$ geen begrensde variatie.
- iii.* Als $\beta = 2$, dan is $B_{p,\beta}$ niet-dalend en singulier.
- iv.* Als $\beta > 2$, dan is $B_{p,\beta}$ stijgend, absoluut continu en $B'_{p,\beta} > 0$ bijna overal.

Er zal geen bewijs worden gegeven van Stelling 3.3, maar het resultaat zal wel worden geïllustreerd in Figuur 12.



Figuur 12: Illustratie van Stelling 3.3

In Figuur 12 illustreren we de eigenschappen gegeven in Stelling 3.3 voor $p = 3$. De waarden $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en $\beta = 10$ worden gebruikt respectievelijk. Er is te zien in Figuur 12a dat op elk component van $\left[0, \frac{1}{1-p}\right] \setminus J_p$ er geldt $B'_{p,\beta} < 0$ waardoor er geen begrensde variatie is. Te zien in Figuur 12b is dat $B_{p,\beta}$ dan een stijgende functie is en $B'_{p,\beta} > 0$ bijna overal, wat ook de eigenschappen zijn zoals gegeven in Stelling 3.3.iv. Het bewijs van Stelling 3.3 en meer informatie over de relatie tussen de Cantorverzameling en de β -ontwikkeling kan gevonden worden in [2].

4 Kettingbreuken

We hebben al gezien dat getallen op meerdere manieren te schrijven zijn, maar de tot nu toe geïntroduceerde manieren hebben veel gemeenschappelijk. Een andere manier om een getal te schrijven is met behulp van een kettingbreuk. Kettingbreuken geven goede benaderingen van reële getallen en worden onder andere gebruikt in de cryptografie om getallen te ontbinden in priemgetallen zoals onder andere te lezen is in [8]. Kettingbreuken werden voor het eerst genoemd in [23], de *Arithmetica Infinitorum* van John Wallis uit 1656. Alleen is het nog onduidelijk of het in 1656 was, want in [12] staat dat dit boek gepubliceerd is in 1653. Maar duidelijk is dat het begrip kettingbreuk al een tijd bestaat.

Een *reguliere kettingbreuk* behorende bij x is een uitdrukking van de vorm

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (4.1)$$

met $a_0 \in \mathbb{Z}$ en $a_i \in \mathbb{N}_{>0}$ voor $i > 0$. De getallen a_i noemen we de *kettingbreukcijfers* en de notatie die gebruikt zal worden voor de reguliere kettingbreuk is $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]_K$. Kettingbreuken hebben mooie eigenschappen waarvan er één wordt gegeven in Stelling 4.1.

Stelling 4.1. *x is een rationaal getal dan en slechts dan als x een eindige kettingbreuk heeft.*

Voor het bewijs van Stelling 4.1 wordt er gebruik gemaakt van het *Algoritme van Euclides* zoals gegeven in bijvoorbeeld [5]. We gaan laten zien dat met dit algoritme een kettingbreuk kan worden gegenereerd voor een rationaal getal x . Dit algoritme vindt de *grootste gemeenschappelijke deler* van twee gehele getallen en later zullen we laten zien tevens de kettingbreukcijfers a_i . De grootste gemeenschappelijke deler van twee getallen a en b wordt genoteerd met $\text{ggd}(a, b)$.

Algoritme van Euclides

1. Kies $a, b \in \mathbb{Z}$ met voor het gemak $a > b > 0$ en definieer $r_0 := a$ en $r_1 := b$.
2. Bepaal $a_1 \geq 0$ en $r_2 \geq 0$ zodanig dat $r_0 = a_1 r_1 + r_2$ met $0 \leq r_2 < r_1$.
3. Als $r_2 = 0$, dan geldt $\text{ggd}(a, b) = r_1$ en stopt het algoritme.
4. Als $r_2 > 0$ herhaal stap 2 en 3 voor $n \geq 1$ zodanig dat $r_n = a_{n+1} r_{n+1} + r_{n+2}$.
5. Zodra geldt $r_{n+1} = 0$, dan geldt $\text{ggd}(a, b) = r_n$ en stopt het algoritme.

In elke iteratie wordt een nieuwe restterm r_i bepaald en deze neemt af in elke iteratie. Deze resttermen zijn gehele getallen en kunnen niet negatief zijn en dus moet het dalende rijtje r_i 's wel eindigen met de waarde 0. Dit gebeurt zodra $r_{n+1} = 0$ en dus geldt $a_{n+1} = 0$. Het iteratieve proces zal dus eindigen en de grootste gemeenschappelijke deler is gelijk aan r_n .

Bewijs van Stelling 4.1

Laat $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ en stel $x = \frac{b}{a}$ met $a > b > 0$. Definieer $r_0 := a$ en $r_1 := b$ zodat $x = \frac{r_1}{r_0}$ en definieer T_n zodanig dat $T_n = \frac{r_n}{r_{n-1}}$ voor $n \geq 2$ waarbij de r_n worden bepaald zoals beschreven in het Algoritme van Euclides. Dan geldt

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{r_0}{r_1} \\ &= \frac{a_1 r_1 + r_2}{r_1} \\ &= a_1 + \frac{r_2}{r_1} \\ &= a_1 + T_2. \end{aligned}$$

We vinden de volgende uitdrukking voor T_2 .

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_2} &= \frac{r_1}{r_2} \\ &= \frac{a_2 r_2 + r_3}{r_2} \\ &= a_2 + \frac{r_3}{r_2} \\ &= a_2 + T_3. \end{aligned}$$

In het algemeen geldt voor elke $i \leq n$ dat $T_i = \frac{r_i}{r_{i-1}}$ en

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_i} &= a_i + T_{i+1}, \\ T_i &= \frac{1}{a_i + T_{i+1}}. \end{aligned}$$

Voor $i \geq n+1$ geldt $T_{i+1} = 0$ en hieruit volgt $T_n = \frac{1}{a_n}$. Nu geldt dat x geschreven kan worden als

$$x = \frac{1}{a_1 + T_2} = \dots = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

waarbij de getallen a_i de getallen zijn die gegeven worden door het Algoritme van Euclides. Deze a_i 's zijn de kettingbreukcijfers en kunnen door dit algoritme als volgt worden opgeschreven:

$$a_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor, a_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor, \dots, a_n = \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor.$$

Hierbij geldt dat $\lfloor \cdot \rfloor$ het grootste positieve gehele getal is dat past in de gegeven breuk.

Er volgt dat elke $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ geschreven kan worden als

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

met $a_0 \in \mathbb{Z}$ zodanig dat geldt $x - a_0 \in [0, 1)$. Hieruit volgt dat x een eindige kettingbreuk heeft.

Andersom laat x een eindige kettingbreuk hebben. Met behulp van volledige inductie zullen we bewijzen dat x dan een rationaal getal is.

Voor $n = 1$ geldt dat $x = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$ en deze laatste uitdrukking is een rationaal getal. Veronderstel nu dat iedere kettingbreuk bestaande uit n kettingbreukcijfers een rationaal getal is. Een kettingbreuk bestaande uit $n + 1$ kettingbreukcijfers wordt als volgt opgeschreven:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n+1}}}}}$$

Dit kunnen we schrijven als $x = a_0 + \frac{1}{M}$ met

$$M = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n+1}}}}}$$

Deze M is een kettingbreuk met n kettingbreukcijfers en is dus volgens de inductieveronderstelling een rationaal getal. Laat nu $M = \frac{p}{q}$. Dit invullen geeft

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{1}{\frac{p}{q}} \\ &= a_0 + \frac{q}{p} \\ &= \frac{a_0 p + q}{p}. \end{aligned}$$

Omdat a_0, p en q gehele getallen zijn, is x rationaal voor $n + 1$ kettingbreukcijfers. Zodoende is x dus een rationaal getal als deze een eindige kettingbreuk heeft. \square

Voorbeeld 4.1. *Kettingbreuk behorende bij $x = \frac{17}{7}$.*

Er geldt $a_0 = 2$, want dan geldt $\frac{17}{7} - 2 = \frac{3}{7} \in [0, 1)$. Laat nu $r_0 = 7$ en $r_1 = 3$. Uit het Algoritme van Euclides volgt dan

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 3 \cdot 1.$$

Hieruit volgt dat de kettingbreuk voor $x = \frac{17}{7}$ gegeven wordt door

$$x = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}.$$

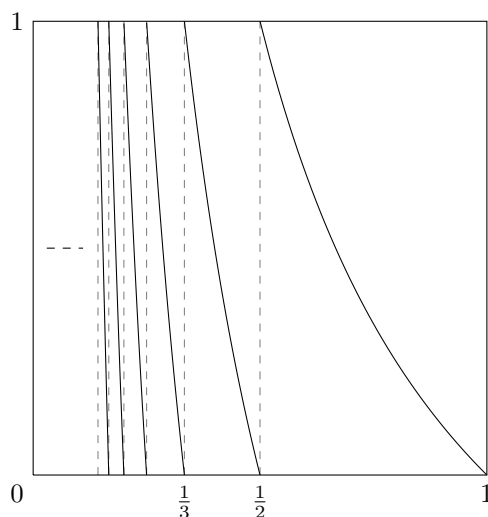
Voor rationale getallen zijn er dus kettingbreuken te bepalen. Ook voor irrationale getallen kan een kettingbreuk worden gegenereerd en dat wordt uitgevoerd met behulp van de Gauss afbeelding zoals we gaan zien in de volgende paragraaf.

4.1 Gauss afbeelding

De Gauss afbeelding $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ wordt gegeven door

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad (4.2)$$

voor $x \neq 0$ en $T(0) = 0$.



Figuur 13: Gauss afbeelding

Laat $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en neem $a_0 \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $x := y - a_0 \in [0, 1)$ en itereer de functie T . Er

geldt

$$\begin{aligned} T^0(x) &= x, \\ T^1(x) &= T(T^0(x)) \\ &= \frac{1}{T^0(x)} - \left\lfloor \frac{1}{T^0(x)} \right\rfloor. \end{aligned}$$

In het algemeen geldt

$$T^n(x) = \frac{1}{T^{n-1}(x)} - \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor$$

voor $n \geq 1$. Ook geldt voor alle $n \geq 0$ dat $T^n(x) \in [0, 1)$.

Laat nu

$$a_n = a_n(x) := \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor$$

voor $n \geq 1$ met $a_n(x) = \infty$ als $T^{n-1}(x) = 0$.

Hieruit volgt dat voor alle $n \geq 1$ geldt

$$T^{n-1}(x) = \frac{1}{a_n + T^n(x)}.$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a_1 + T^1(x)} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + T^2(x)}} = \dots \\ &= \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + T^n(x)}}}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

De Gauss afbeelding T produceert dus uitdrukking (4.3) en een rijtje getallen $(a_n)_{n \geq 1}$. We zullen laten zien dat deze uitdrukking de kettingbreuk wordt die bij een irrationaal getal x hoort in de volgende paragraaf.

4.2 Eigenschappen van kettingbreuken

De Gauss afbeelding T genereert dus voor iedere x een rijtje cijfers $(a_n)_{n \geq 0}$. We definiëren voor x de n -de convergent met $n \in \mathbb{N}$ door

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

We laten zien dat deze een goede benadering van x geven.

Laat $(a_n)_{n \geq 0}$ een rijtje positieve reële getallen zijn en laat p_n en q_n gegeven worden door de volgende recurrente betrekkingen voor $n \geq 0$:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad (4.4)$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (4.5)$$

met $p_{-2} = q_{-1} = 0$ en $p_{-1} = q_{-2} = 1$.

Stelling 4.2. Voor iedere rij $(a_n)_{n \geq 0}$ met $a_n \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt dat

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Bewijs

Laat $(a_n)_{n \geq 0}$ een willekeurige rij zijn. Voor $n = 0$ geldt met behulp van de recurrente betrekkingen dat

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0 p_{-1} + p_{-2}}{a_0 q_{-1} + q_{-2}} = a_0.$$

Voor $n = 1$ geldt dan

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}.$$

Laat $n \in \mathbb{N}$. Neem nu als inductieveronderstelling dat de uitspraak waar is voor alle rijtjes $(a_n)_{n \geq 0}$ en alle $k \leq n$. Laat $(a_n)_{n \geq 0}$ een willekeurig rijtje zijn. Dan geldt voor $n + 1$ dat

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} &= \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} \\ &= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\ &= \frac{(a_n a_{n+1} + 1) p_{n-1} + a_{n+1} p_{n-2}}{(a_n a_{n+1} + 1) q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2}} \\ &= \frac{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}) p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}) q_{n-1} + q_{n-2}} \end{aligned}$$

Voor rijtje $(a'_n)_{n \geq 0}$ met $a_k = a'_k$ voor $0 \leq k \leq n-1$ en $a'_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ geldt de inductieveronderstelling. Dus

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1}}}}}}.$$

□

Neem vanaf nu aan dat $(a_n)_{n \geq 0}$ alleen positieve gehele getallen bevat. Een gevolg van de recurrente betrekkingen is dat $\{p_i\}_{i \geq 0}$ en $\{q_i\}_{i \geq 0}$ strikt stijgende rijtjes zijn. Er geldt namelijk $q_0 = 1$ en $q_1 = a_1 \geq 1$ en omdat voor alle $i \geq 0$ geldt $a_i \geq 1$ volgt hieruit dat $q_2 = a_2 q_1 + q_0 > q_1$ en merk op dat met inductie bewezen kan worden dan $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1}$. Hetzelfde geldt voor $\{p_i\}_{i \geq 0}$.

Stelling 4.3. $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n$.

Bewijs

We bewijzen dit met behulp van volledige inductie. Voor $n = 1$ geldt

$$\begin{aligned} p_0q_1 - p_1q_0 &= a_0a_1 - (a_1a_0 + 1) \\ &= -1 \\ &= (-1)^1. \end{aligned}$$

Neem nu als inductieveronderstelling dat de uitspraak waar is voor een $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n. \quad (4.6)$$

Er geldt voor $n + 1$ dat

$$\begin{aligned} p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n &= p_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1}) - q_n(a_{n+1}p_n + p_{n-1}) \\ &= p_nq_{n-1} - q_np_{n-1} \\ &= -(p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}) \\ &= -1 \cdot (-1)^n \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Voor alle $n \geq 1$ geldt nu dat $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n$. □

Een gevolg van de recurrente betrekkingen is dat

$$x = \frac{p_n + T^n(x)p_{n-1}}{q_n + T^n(x)q_{n-1}}. \quad (4.7)$$

Het bewijs van vergelijking (4.7) gaat als volgt:

$$\begin{aligned}
x &= [0; a_1, a_2, \dots, a_n + T^n(x)]_K \\
&= \frac{(a_n + T^n(x))p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + T^n(x))q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&= \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2} + T^n(x)p_{n-1}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2} + T^n(x)q_{n-1}} \\
&= \frac{p_n + T^n(x)p_{n-1}}{q_n + T^n(x)q_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Er geldt nu vanwege vergelijking (4.7) en Stelling 4.3 dat

$$\begin{aligned}
\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \frac{p_n + T^n(x)p_{n-1}}{q_n + T^n(x)q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \\
&= \left| \frac{(-1)^n T^n(x)}{q_n(q_n + T^n(x)q_{n-1})} \right| \\
&< \frac{1}{q_n^2}.
\end{aligned}$$

Omdat $\{q_i\}_{i \geq 0}$ een strikt stijgend rijtje is en $q_i \in \mathbb{N}$ voor alle i , geldt dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = 0.$$

Hieruit volgt dat $\frac{p_n}{q_n}$ convergeert naar x voor n naar oneindig en dat $\frac{p_n}{q_n}$ dus een goede benadering is van x en dat iedere $x \in \mathbb{R}$ een kettingbreukontwikkeling heeft en te schrijven is als

$$x = [a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]_K$$

waarbij x een eindige kettingbreuk heeft als $x \in \mathbb{Q}$ zoals is laten zien in Stelling 4.1.

Een reguliere kettingbreuk behorende bij een rationaal getal is niet uniek, want er geldt

$$[a_0; a_1, \dots, a_n]_K = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]_K \text{ als } a_n > 1; \quad (4.8)$$

$$[a_0; a_1, \dots, a_n]_K = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1} + 1]_K \text{ als } a_n = 1. \quad (4.9)$$

Merk op dat een kettingbreuk gegenereerd door T nooit zal eindigen met een 1. Zodra er geschreven wordt $x = [a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]_K$ wordt hier de kettingbreuk gegenereerd door T bedoeld.

Voorbeeld 4.2. *Kettingbreuk behorende bij een $\frac{1}{2}$.*

$$\frac{1}{2} = [0; 2]_K = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}.$$

Stelling 4.4. *Voor $x = [0; a_1, a_2, \dots]_K$ geldt dat de Gauss afbeelding werkt als een linker-verschuiving op de kettingbreuk, dus*

$$T^n(x) = [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]_K.$$

Bewijs

We bepalen eerst $T(x)$ na één iteratie.

$$T(x) = \frac{1}{x} - a_1 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}} - a_1 = [0; a_2, a_3, \dots]_K. \quad (4.10)$$

Door (4.10) te herhalen geldt nu het volgende

$$\begin{aligned} T(x) &= [0; a_2, a_3, \dots]_K \\ T^2(x) &= [0; a_3, a_4, \dots]_K \\ &\vdots \\ T^n(x) &= [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]_K. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de Gauss afbeelding werkt als een linkerverschuiving. \square

Voorbeeld 4.3. *Het bepalen van de kettingbreuk van π .*

- Er geldt $a_0 = 3$, want dan $\pi - 3 \in [0, 1)$.
- $T^0(\pi - 3) = 0,1415926\dots$,
- $a_1 = \left\lfloor \frac{1}{0,1415926\dots} \right\rfloor = 7$,
- $T^1(\pi - 3) = \frac{1}{0,1415926\dots} - 7 = 0,0625\dots$,
- $a_2 = \left\lfloor \frac{1}{0,0625\dots} \right\rfloor = 15$,
- $T^2(\pi - 3) = \frac{1}{0,0625\dots} - 15 = 0,99659\dots$,
- $a_3 = \left\lfloor \frac{1}{0,99659\dots} \right\rfloor = 1$,
- $T^3(\pi - 3) = \frac{1}{0,99659\dots} - 1 = 0,003417\dots$,
- $a_4 = \left\lfloor \frac{1}{0,003417\dots} \right\rfloor = 292$

Op dezelfde manier kunnen de volgende kettingbreukcijfers bepaald worden en wordt de kettingbreuk voor π gegeven door $[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, \dots]_K$.

Net als bij de tertiaire ontwikkeling kunnen ook voor de kettingbreuken cilinderverzamelingen worden bepaald.

Definitie 4.1. De n -cilinder $\Delta(a_1 \dots a_n)$ van de Gauss afbeelding wordt gegeven door

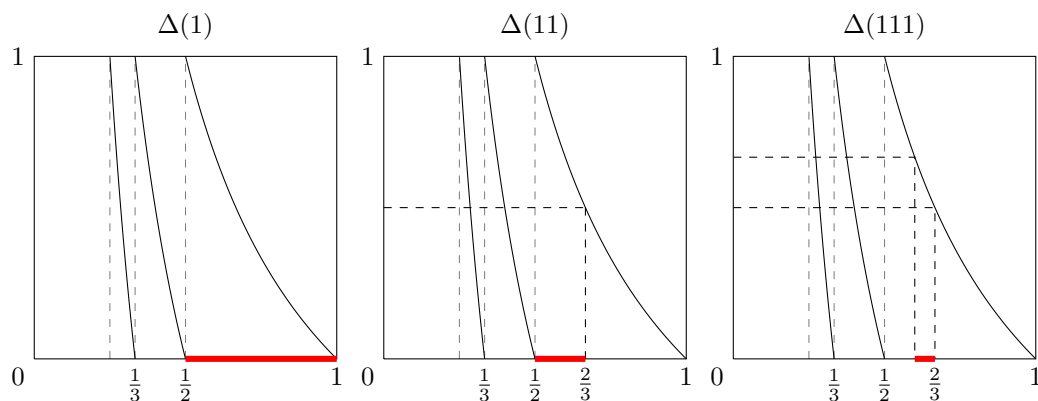
$$\Delta(a_1 \dots a_n) = \{x = [0; b_1, \dots, b_k, \dots]_K : b_k = a_k \text{ voor } 1 \leq k \leq n\}. \quad (4.11)$$

Tevens geldt er

$$\Delta(a_1 \dots a_n) = \begin{cases} \left[[0; a_1, \dots, a_n]_K, [0; a_1, \dots, a_n + 1]_K \right) & \text{als } n \text{ even,} \\ \left([0; a_1, \dots, a_n + 1]_K, [0; a_1, \dots, a_n]_K \right] & \text{als } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

Voor $n = 1$ geldt nu dat $\Delta(a_1) := \left(\frac{1}{a_1+1}, \frac{1}{a_1}\right]$. Wanneer $a_1 = 1$ geldt $\Delta(a_1) = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Intuïtief betekent dit dat als n even is de cilinderverzamelingen van links naar rechts gaan en bij n oneven van rechts naar links.



Figuur 14: Visualisatie van de cilinderverzameling bij de Gauss afbeelding

Laat $v, w \in [0, 1]$ met $v = [0, b_1 b_2 \dots]_2$ en $w = [0, c_1 c_2 \dots]_2$. Als $v < w$, dan bestaat er een kleinste j waarvoor geldt $b_j < c_j$ en $b_i = c_i$ voor alle $i < j$. Bij kettingbreuken gaat dit anders. Bekijk namelijk twee getallen $x, y \in [0, 1)$ met bijbehorende kettingbreuken $[0; a_1, \dots, a_N, a_{N+1}, \dots]_K$ en $[0; b_1, b_2, \dots, b_N, b_{N+1}, \dots]_K$ respectievelijk. Dan geldt nu als $x < y$, dan bestaat er een kleinste N waarvoor geldt $a_N \neq b_N$ en $a_i = b_i$ voor alle $i < N$. Voor N moet onderscheid worden gemaakt tussen als het even is en als het oneven is wat dus anders is dan bij de binaire ontwikkeling.

- i.* Als N even is, dan geldt $a_N < b_N$;
- ii.* Als N oneven is, dan geldt $a_N > b_N$.

Voorbeeld 4.4. $x < y$ als N even is.

Bekijk $x = \frac{2}{7}$ en $y = \frac{3}{10}$. Hier geldt $x < y$. De bijbehorende kettingbreuken zijn $x = [0; 3, 2]_K$ en $y = [0; 3, 3]_K$. Voor $N = 2$ geldt nu dat $a_N < b_N$.

Voorbeeld 4.5. $x < y$ als N oneven is.

Bekijk $x = \frac{7}{24}$ en $y = \frac{5}{17}$. Hier geldt $x < y$. De bijbehorende kettingbreuken zijn $x = [0; 3, 2, 3]_K$ en $y = [0; 3, 2, 2]_K$. Voor $N = 3$ geldt nu dat $a_N > b_N$.

4.3 Periodieke kettingbreuken

We hebben gezien dat voor rationale getallen de bijbehorende kettingbreuk eindig is en dat voor irrationale getallen de kettingbreuk oneindig is. Er zijn echter ook oneindige kettingbreuken waar een patroon in voorkomt.

Definitie 4.2. Een **periodieke kettingbreuk** is een kettingbreuk bestaande uit een blok met lengte n gevolgd door een zich herhalend blok van lengte m ,

$$[a_0; a_1, \dots, a_n, \overline{a_{n+1}, \dots, a_{n+m}}]_K.$$

Als $n = 0$ wordt de kettingbreuk **zuiver periodiek** genoemd.

Voor beide definities geldt dat er geen kleiner blok bestaat dat herhaald wordt.

Voorbeeld 4.6. *De kettingbreuk behorende bij $\sqrt{3}$.*

Er geldt $a_0 = 1$ en de kettingbreuk die bij $\sqrt{3} - 1$ hoort gaat dus ontwikkeld worden. We bepalen a_1 door

$$\begin{aligned} a_1 &= \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \right\rfloor \\ &= 1. \end{aligned}$$

Vervolgens wordt a_2 bepaald door

$$\begin{aligned} T(\sqrt{3} - 1) &= \frac{1}{\sqrt{3} - 1} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \\ a_2 &= \left\lfloor \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \right\rfloor \\ &= 2. \end{aligned}$$

Te zien is dat $T^2(\sqrt{3} - 1)$ weer de waarde $\sqrt{3} - 1$ oplevert. Hieruit volgt dat $\sqrt{3}$ een periodieke kettingbreuk heeft en gelijk is aan $[1; \overline{1, 2}]_K$.

Door periodieke kettingbreuken zijn een aantal interessante resultaten verkregen. We maken hierbij gebruik van kwadratisch irrationale getallen en zullen de definitie hiervan geven.

Definitie 4.3. Een **kwadratisch irrationaal getal** is een reële oplossing van een kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a, b, c \in \mathbb{Z}$ en $a \neq 0$ waarvoor geldt dat de discriminant $b^2 - 4ac$ geen kwadraat is.

Khinchin bewees in [14] een aantal resultaten met betrekking tot kettingbreuken.

Stelling 4.5. *Als t een periodieke kettingbreuk heeft, dan is t een kwadratisch irrationaal getal.*

Bewijs

We onderscheiden 2 situaties.

- Laat t zuiver periodiek zijn. Dan geldt $t = [a_0; \overline{a_1, \dots, a_m}]_K$ waaruit volgt dat $t = T^m(t) = T^{2m}(t) = \dots$. Uit vergelijking (4.7) volgt nu dat

$$t = \frac{p_m + p_{m-1}T^m(t)}{q_m + q_{m-1}T^m(t)} = \frac{p_m + p_{m-1}t}{q_m + q_{m-1}t}.$$

Dit levert de volgende vergelijking voor t op:

$$q_{m-1}t^2 + (q_m - p_{m-1})t - p_m = 0. \quad (4.12)$$

Omdat $\{q_i\}_{i \geq 0}$ een stijgend rijtje is, geldt $q_{m-1} > 0$. Tevens geldt dat q_{m-1}, q_m, p_{m-1} en $p_m \in \mathbb{Z}$ en hieruit volgt dat vergelijking (4.12) een kwadratische vergelijking is. Nu moet nog gelden dat de discriminant geen kwadraat is. Als de discriminant een kwadraat is, dan is de oplossing voor t een rationaal getal. Maar dat kan hier niet, want t heeft een oneindige kettingbreuk. Dus de discriminant is geen kwadraat en dus is t een kwadratisch irrationaal.

- Laat t periodiek zijn. Dan geldt $t = [a_0; a_1, \dots, a_n, \overline{a_{n+1}, \dots, a_{n+m}}]_K$ met $T^n(t) = [a_0; \overline{a_{n+1}, \dots, a_{n+m}}]_K$. Hieruit volgt dat $T^n(t) = T^{n+m}(t) = \dots$ en dus

$$t = \frac{p_n + T^n(t)p_{n-1}}{q_n + T^n(t)q_{n-1}} = \frac{p_{n+m} + T^{n+m}(t)p_{n+m-1}}{q_{n+m} + T^{n+m}(t)q_{n+m-1}} = \frac{p_{n+m} + T^n(t)p_{n+m-1}}{q_{n+m} + T^n(t)q_{n+m-1}}.$$

We gaan een vergelijking uitgedrukt in t vinden. Uit het eerste gedeelte van de vergelijking volgt dat

$$q_n t + T^n(t)q_{n-1}t = p_n + T^n(t)p_{n-1}.$$

Hieruit volgt

$$T^n(x) = \frac{p_n - q_n t}{q_{n-1}t - p_{n-1}}.$$

In het tweede gedeelte van de vergelijking vinden we ook een vergelijking voor $T^n(t)$. Er geldt

$$p_{n+m} + T^n(t)p_{n+m-1} = tq_{n+m} + tq_{n+m-1}T^n(t)$$

en dus

$$T^n(t) = \frac{p_{n+m} - tq_{n+m}}{q_{n+m-1}t - p_{n+m-1}}.$$

Nu kan er een vergelijking uitgedrukt in t gevonden worden. Er geldt

$$\frac{p_n - q_n t}{q_{n-1}t - p_{n-1}} = \frac{p_{n+m} - tq_{n+m}}{q_{n+m-1}t - p_{n+m-1}}. \quad (4.13)$$

Door nu vergelijking (4.13) uit te werken, krijgen we

$$(q_n q_{n+m-1} - q_{n-1} q_{n+m})t^2 + (p_{n+m} q_{n-1} + p_{n-1} q_{n+m} - p_n q_{n+m-1} - q_n p_{n+m-1})t + p_n p_{n+m-1} - p_{n-1} p_{n+m} = 0.$$

We willen laten zien dat $q_n q_{n+m-1} \neq q_{n-1} q_{n+m}$, omdat de vergelijking anders geen kwadratische vergelijking is. Stel dat $q_n q_{n+m-1} = q_{n-1} q_{n+m}$. Dan is q_{n+m} een deler van $q_{n+m-1} q_n$.

We laten eerst zien dat voor iedere $n \geq 0$ geldt dat q_n en q_{n-1} relatief priem zijn. Als dit niet het geval is, dan bestaan er getallen $q, b, c \in \mathbb{N}$ met $q > 1$ zodanig dat

$$q_n = q \cdot b \quad \text{en} \quad q_{n-1} = q \cdot c.$$

Uit de recurrente betrekking $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ volgt nu dat $q \cdot b = a_n q \cdot c + q_{n-2}$. Hieruit volgt dat $q_{n-2} = q(b - a_n c)$ en moet q dus een deler zijn van q_{n-2} . Maar dit betekent dat q uiteindelijk ook een deler is van q_0 . Alleen dat is niet mogelijk, want $q_0 = 1$. Hieruit volgt dat voor iedere $n \geq 0$ geldt dat q_n en q_{n-1} relatief priem zijn. Dus q_{n+m} en q_{n+m-1} zijn relatief priem.

Als geldt dat q_{n+m} een deler is van $q_n q_{n+m-1}$ en er geldt dat q_{n+m} en q_{n+m-1} relatief priem zijn, dan moet wel gelden dat q_{n+m} een deler is van q_n . Daarentegen is q_{n+m} groter dan q_n en kan q_{n+m} dus geen deler zijn van q_n . Hieruit volgt dat q_{n+m} geen deler is van $q_{n+m-1} q_n$ en dus $q_{n+m-1} q_n \neq q_{n-1} q_{n+m}$. Met hetzelfde argument als bij zuiver periodiek is de discriminant geen kwadraat en hieruit volgt dat t een kwadratisch irrationaal getal is. \square

Stelling 4.6. *Als t een kwadratisch irrationaal getal is, dan heeft t een periodieke kettingbreukontwikkeling.*

Bewijs

Omdat t een kwadratisch irrationaal getal is, bestaan er $d_0, b_0, c_0 \in \mathbb{Z}$ met $d_0 > 0$ zodanig dat $d_0 t^2 + b_0 t + c_0 = 0$ met discriminant $b_0^2 - 4d_0 c_0$ die geen kwadraat is.

Zij $k \in \mathbb{N}$. Vanwege (4.7) geldt dat

$$t = \frac{p_{k+1} + T^{k+1}(t)p_k}{q_{k+1} + T^{k+1}(t)q_k}. \quad (4.14)$$

Schrijf $T^{k+1}(t) = r_{k+1}$. Er geldt nu

$$d_0 \left(\frac{p_k r_{k+1} + p_{k+1}}{q_k r_{k+1} + q_{k+1}} \right)^2 + b_0 \left(\frac{p_k r_{k+1} + p_{k+1}}{q_k r_{k+1} + q_{k+1}} \right) + c_0 = 0.$$

Door te vermenigvuldigen met $(q_k r_{k+1} + q_{k+1})^2$ krijgen we

$$d_0 (p_k r_{k+1} + p_{k+1})^2 + b_0 (p_k r_{k+1} + p_{k+1})(q_k r_{k+1} + q_{k+1}) + c_0 (q_k r_{k+1} + q_{k+1})^2 = 0.$$

Definieer nu

- $d_{k+1} = d_0 p_k^2 + b_0 p_k q_k + c_0 q_k^2$,
- $b_{k+1} = 2d_0 p_{k+1} p_k + b_0 (p_k q_{k+1} + p_{k+1} q_k) + 2c_0 q_k q_{k+1}$,
- $c_{k+1} = d_0 p_{k+1}^2 + b_0 p_{k+1} q_{k+1} + c_0 q_{k+1}^2$.

De voorgaande vergelijking uitwerken en omschrijven geeft dan

$$d_{k+1} r_{k+1}^2 + b_{k+1} r_{k+1} + c_{k+1} = 0. \quad (4.15)$$

Merk op dat $d_{k+1} \neq 0$ en $c_{k+1} = d_{k+2}$. Als $d_{k+1} = 0$ dan zou gelden dat $r_{k+1} = -\frac{c_{k+1}}{b_{k+1}}$ en dus zou r_{k+1} een rationaal getal zijn. Alleen zou t dan ook een rationaal getal moeten zijn wat niet kan met de aanname dat t een kwadratisch irrationaal getal is, dus $d_{k+1} \neq 0$.

Vervolgens gaan we de discriminant uitrekenen. De discriminant is gelijk aan $b_{k+1}^2 - 4d_{k+1}c_{k+1}$. Met behulp van Stelling 4.3 geldt nu

$$\begin{aligned} b_{k+1}^2 - 4d_{k+1}c_{k+1} &= (b_0 - 4c_0d_0)(p_kq_{k+1} - q_kp_{k+1})^2 \\ &= b_0 - 4c_0d_0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de discriminant dus niet afhangt van het aantal iteraties van de Gauss afbeelding en altijd gelijk is aan $b_0 - 4c_0d_0$.

Vervolgens willen we een afschatting maken van $|q_k t - p_k|$ om uiteindelijk een bovengrens op te stellen voor d_{k+1} . Er geldt met behulp van vergelijking (4.14) en Stelling 4.3 dat

$$\begin{aligned} |q_k t - p_k| &= \left| q_k \left(\frac{p_{k+1} + r_{k+1}p_k}{q_{k+1} + r_{k+1}q_k} \right) - p_k \right| \\ &= \left| \frac{(-1)^{k+1}}{q_{k+1} + r_{k+1}q_k} \right| \\ &\leq \frac{1}{q_{k+1}} \\ &< \frac{1}{q_k}. \end{aligned}$$

We kunnen p_k uitdrukken in q_k en t . Laat $|\varepsilon| < 1$ zo zijn dat $p_k = q_k t + \frac{\varepsilon}{q_k}$. Dan geldt nu

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= d_0 \left(q_k t + \frac{\varepsilon}{q_k} \right)^2 + b_0 \left(q_k t + \frac{\varepsilon}{q_k} \right) q_k + c_0 q_k^2 \\ &= d_0 \left(q_k^2 t^2 + 2t\varepsilon + \left(\frac{\varepsilon}{q_k} \right)^2 \right) + b_0 (q_k^2 t + \varepsilon) + c_0 q_k^2 \\ &= q_k^2 (d_0 t^2 + b_0 t + c_0) + \varepsilon (2d_0 t + b_0) + \left(\frac{\varepsilon}{q_k} \right)^2 d_0 \\ &= \varepsilon (2d_0 t + b_0) + d_0 \left(\frac{\varepsilon}{q_k} \right)^2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$|d_{k+1}| < |2d_0 t| + |b_0| + |d_0|.$$

Omdat d_0 en b_0 constanten zijn, is $|d_{k+1}|$ dus begrensd door een constante onafhankelijk van k . Tevens geldt dat $d_{k+1} = c_{k+2}$ en hieruit volgt dat c_{k+1} ook begrensd is. Eerder hebben we laten zien dat de discriminant altijd gelijk is aan $b_0^2 - 4c_0d_0$ en dus constant blijft. Hieruit volgt dat b_{k+1} dan ook begrensd moet zijn.

Dus er is een $M \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt dat $|d_{k+1}|, |b_{k+1}|, |c_{k+1}| < M$. Hieruit volgt dat er maar eindig veel vergelijkingen van de vorm

$$d_{k+1}x^2 + b_{k+1}x + c_{k+1} = 0$$

bestaan en dat de verzameling van oplossingen van deze vergelijkingen een eindige verzameling is. Deze verzameling is gelijk aan de verzameling $\{T^k(t) : k \geq 0\}$. Maar we weten dat een kwadratisch irrationaal getal een oneindige kettingbreuk heeft, dus dit betekent dat er m en n in \mathbb{N} bestaan met $m \neq n$ zodanig dat $T^m(t) = T^n(t)$. Hieruit volgt dat t een periodieke kettingbreuk heeft. \square

5 Minkowski \mathcal{M} -functie

De *Minkowski \mathcal{M} -functie* is een functie die Minkowski in [16] in het Duits definieerde als een bijectieve functie die de rationale getallen in het interval $[0, 1]$ afbeeldt op de dyadische rationalen (zie Definitie 2.1) in $[0, 1]$. Hancock gaf in [11] een Engelse vertaling. Alhoewel Minkowski het niet benoemde, werd er om de functie te construeren gebruik gemaakt van de *Farey breuken*.

Definitie 5.1. De verzameling van **Farey breuken** van orde n , genoteerd als F_n , is de geordende verzameling van irreducibele breuken in het interval $[0, 1]$ met noemers hoogstens gelijk aan n .

Breuken die bevat zijn in F_n worden bepaald door de *mediant* te nemen van twee opeenvolgende breuken uit F_{n-1} . Laat $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ twee opeenvolgende irreducibele breuken in F_{n-1} zijn met $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Dan wordt de mediant van $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ gegeven door $\frac{a+c}{b+d}$. Als $b + d \leq n$, dan is $\frac{a+c}{b+d}$ een element van F_n . De eerste stappen worden nu als volgt gegeven:

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}, \\ F_2 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}, \\ F_3 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}, \\ F_4 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \dots$. Merk op dat $\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \in F_3$, maar dat de mediant $\frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$ bevat is in F_5 . De mediant van twee opeenvolgende breuken in F_n zit dus wel in een F_r voor $r > n$, maar er geldt niet altijd $r = n + 1$. Voor $n \rightarrow \infty$ geldt dan dat elk rationaal getal in $[0, 1]$ in één van de Farey verzamelingen zit.

In [1] wordt de volgende eigenschap van Farey breuken gegeven en bewezen.

Stelling 5.1. Gegeven $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$ met $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F_n$. Als $bc - ad = 1$, dan zijn $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ opeenvolgende termen in F_n voor de volgende waarden van n :

$$\max(b, d) \leq n \leq b + d - 1.$$

Salem maakte in [20] gebruik van deze Farey breuken om zo een definitie van de Minkowski \mathcal{M} -functie te geven. We definiëren eerst de beginwaarden $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}\left(\frac{0}{1}\right) = 0$ en $\mathcal{M}(1) = \mathcal{M}\left(\frac{1}{1}\right) = 1$. Vervolgens wordt de mediant uitgerekend en wordt $\mathcal{M}\left(\frac{0+1}{1+1}\right)$ gedefinieerd als het rekenkundig gemiddelde van $\mathcal{M}(0)$ en $\mathcal{M}(1)$. Er geldt hier dus $\mathcal{M}\left(\frac{0+1}{1+1}\right) = \frac{\mathcal{M}\left(\frac{0}{1}\right) + \mathcal{M}\left(\frac{1}{1}\right)}{2} = \frac{1}{2}$. In het algemeen geldt voor twee opeenvolgende irreducibele Farey breuken $\frac{p}{q}$ en $\frac{p'}{q'}$ in F_n dat de Minkowski \mathcal{M} -waarde van de mediant als volgt kan worden gedefinieerd:

$$\mathcal{M}\left(\frac{p+p'}{q+q'}\right) = \frac{\mathcal{M}\left(\frac{p}{q}\right) + \mathcal{M}\left(\frac{p'}{q'}\right)}{2}. \quad (5.1)$$

Op deze manier zijn op de n -de stap er $2^n + 1$ waarden berekend. De Minkowski $?$ -waarden voor al deze rationale getallen zijn van de vorm $\frac{k}{2^n}$ met $k = 0, 1, \dots, 2^n$.

Laat $x \in [0, 1]$ een rationaal getal zijn. Dan geldt volgens Stelling 4.1 dat x een eindige kettingbreuk heeft, dus $x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n]_K$.

Bekijk nu de convergenten $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n} = x$ zoals gegeven in Definitie 4.2. We willen laten zien dat twee opeenvolgende convergenten ook twee opeenvolgende breuken zijn in een F_i zodat de Minkowski $?$ -waarde van de mediant van die twee berekend kan worden. Op deze manier kan voor elk rationaal getal in $[0, 1]$ de bijbehorende Minkowski $?$ -waarde gevonden worden.

Bekijk de convergenten $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ en $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ en laat m de kleinste waarde zijn waarvoor geldt $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \in F_m$ en neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} > \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Dan geldt volgens Stelling 4.3 dat $p_{k-2}q_{k-1} - p_{k-1}q_{k-2} = 1$ en geldt volgens Stelling 5.1 dat deze convergenten opeenvolgend zijn in F_m .

Laat nu $y_{k-2} = ?\left(\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}\right)$ en $y_{k-1} = ?\left(\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right)$. Dan geldt dat de mediant $\frac{p_{k-1}+p_{k-2}}{q_{k-1}+q_{k-2}}$ in F_j zit voor een $j > m$. Ook geldt volgens dezelfde argumentatie als hierboven dat $\frac{p_{k-1}+p_{k-2}}{q_{k-1}+q_{k-2}}$ en $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ twee opeenvolgende breuken in F_j . Dus er geldt

$$\begin{aligned} ?\left(\frac{2p_{k-1} + p_{k-2}}{2q_{k-1} + q_{k-2}}\right) &= \frac{?\left(\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right) + ?\left(\frac{p_{k-1}+p_{k-2}}{q_{k-1}+q_{k-2}}\right)}{2} \\ &= \frac{y_{k-1} + \frac{y_{k-1}+y_{k-2}}{2}}{2} \\ &= \frac{y_{k-1}}{2} + \frac{y_{k-1} + y_{k-2}}{2^2}. \end{aligned}$$

Dit voortzetten geeft met behulp van de recurrente betrekkingen zoals gegeven in (4.4) de volgende uitdrukking voor $?\left(\frac{p_k}{q_k}\right)$:

$$?\left(\frac{p_k}{q_k}\right) = ?\left(\frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}\right) = \frac{y_{k-1}}{2} + \frac{y_{k-1}}{2^2} + \dots + \frac{y_{k-1}}{2^{a_k}} + \frac{y_{k-2}}{2^{a_k}}.$$

Laat nu $?\left(\frac{p_k}{q_k}\right) = y_k$. Dan geldt

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{y_{k-1}}{2} + \frac{y_{k-1}}{2^2} + \dots + \frac{y_{k-1}}{2^{a_k}} + \frac{y_{k-2}}{2^{a_k}} \\ &= y_{k-1} \sum_{i=1}^{a_k} \frac{1}{2^i} + \frac{y_{k-2}}{2^{a_k}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^{a_k}}\right) y_{k-1} + \frac{y_{k-2}}{2^{a_k}}. \end{aligned}$$

Het volgende wordt verkregen:

$$y_k - y_{k-1} = -\frac{1}{2^{a_k}}(y_{k-1} - y_{k-2}).$$

Dit herhalen geeft

$$y_n - y_{n-1} = \left(-\frac{1}{2^{a_n}}\right) \left(-\frac{1}{2^{a_{n-1}}}\right) \dots \left(-\frac{1}{2^{a_2}}\right) (y_1 - y_0).$$

Omdat $y_0 = 0$ en $y_1 = ?\left(\frac{1}{a_1}\right) = ?\left(\frac{1+0}{a_1-1+1}\right) = \frac{1}{2}?\left(\frac{1}{a_1-1}\right) = \dots = \frac{1}{2^{a_1-1}}?\left(\frac{1}{a_1-(a_1-1)}\right) = \frac{1}{2^{a_1-1}}$ geldt nu dat $y_n - y_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{(a_1+\dots+a_n)-1}}$ en omdat $y_n = ?\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = ?(x)$ geldt nu

$$?(x) = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{(a_1+a_2)-1}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{(a_1+\dots+a_n)-1}}. \quad (5.2)$$

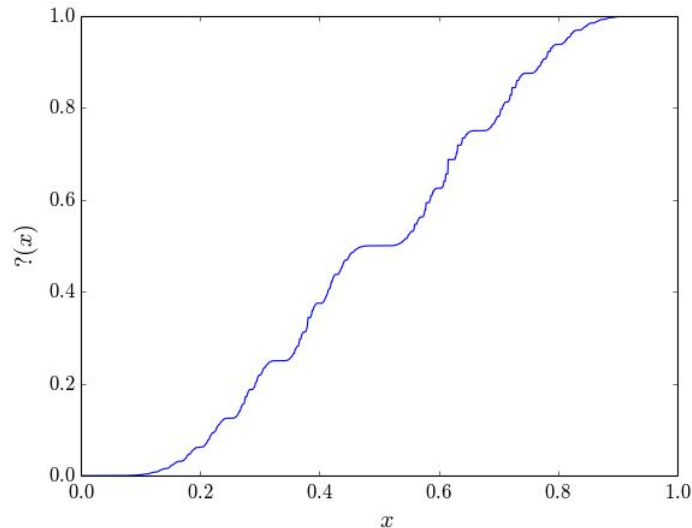
Hieruit volgt de volgende definitie voor de Minkowski $?$ -functie.

Definitie 5.2. De Minkowski $?$ -functie is de functie $? : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gegeven door

$$?(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{(a_1+\dots+a_k)-1}}, \quad (5.3)$$

waarbij x van de vorm $[0; a_1, a_2, \dots]_K$ is.

Voor een rationaal getal x geldt dat deze som stopt bij een $n \in \mathbb{N}$, omdat x volgens Stelling 4.1 een eindige kettingbreuk heeft.



Figuur 15: Minkowski $?$ -functie

Voorbeeld 5.1. *Minkowski $?$ -functie bij een rationaal getal.*

Bekijk het rationale getal $x = \frac{2}{7}$. De bijbehorende kettingbreuk is gelijk aan $[0; 3, 2]_K$. Dan geldt nu dat de Minkowski $?$ -waarde gelijk is aan

$$\begin{aligned} ?\left(\frac{2}{7}\right) &= ?([0; 3, 2]_K) \\ &= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} \\ &= \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 5.2. *Minkowski $?$ -functie bij een irrationaal getal.*

Bekijk het irrationale getal $x = \sqrt{3} - 1$. De bijbehorende kettingbreuk is gelijk aan $[0; \overline{1, 2}]_K$

zoals te zien in Voorbeeld 4.6. Dan geldt nu dat de Minkowski γ -waarde gelijk is aan

$$\begin{aligned} \gamma(\sqrt{3} - 1) &= \gamma([0; \overline{1, 2}]_K) \\ &= \frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^8} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^3}\right)^i \\ &= \frac{6}{7}. \end{aligned}$$

5.1 Eigenschappen van de Minkowski φ -functie

De Minkowski φ -functie wordt in het Engels ook wel de *slippery devil's staircase* genoemd, aangezien het de 'gladde' versie is van de Duivelse trap zoals te zien was in Figuur 8. Eén van de hoofdeigenschappen van de Minkowski φ -functie is dat het continu is, wat intuïtief is te zien in Figuur 15. Alleen het bewijs hiervan is niet zo eenvoudig.

Lemma 5.1. φ is continu in x voor iedere $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.

Bewijs

Bekijk de n -cilinder van de Gauss afbeelding zoals gegeven in Definitie 4.1 en laat $x = [0; a_1, \dots, a_n, \dots]_K \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. Omdat x een irrationaal getal is zit x in het inwendige van een n -cilinder voor iedere n . Laat $y \in [0, 1]$ met $y = [0; b_1, \dots, b_n, \dots]_K$. Er geldt $a_k = b_k$ voor iedere $k \leq n$ dan en slechts dan als x en y bevat zijn in dezelfde n -cilinder. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies nu n zodanig dat $n > 2 \log \frac{4}{\varepsilon}$. Dan bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $y \in (x - \delta, x + \delta)$ geldt dat $a_k = b_k$ voor iedere $k \leq n$. Kies deze δ als de kleinste afstand van x tot één van de twee randpunten van de n -cilinder. Hieruit volgt met behulp van de driehoeksongelijkheid dat

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_1 + \dots + a_{k-1}}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{b_1 + \dots + b_{k-1}}} \right| \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_1 + \dots + a_{k-1}}} - \frac{1}{2^{a_1 + \dots + a_{n-1}}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{b_{n+1} + \dots + b_k}} \right| \\ &= \frac{1}{2^{a_1 + \dots + a_{n-1}}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_{n+1} + \dots + a_k}} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{b_{n+1} + \dots + b_k}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{a_1 + \dots + a_{n-1}}} \left(\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_{n+1} + \dots + a_k}} \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{b_{n+1} + \dots + b_k}} \right| \right) \\ &< \frac{1}{2^{a_1 + \dots + a_{n-1}}} \left(\frac{2}{2^{a_{n+1}}} + \frac{2}{2^{b_{n+1}}} \right) \quad (5.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2^{a_1 + \dots + a_{n-2}}} \\ &\leq \frac{1}{2^{n-2}} \quad (5.6) \\ &< \frac{1}{2^{2 \log \frac{4}{\varepsilon} - 2}} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Ongelijkheid (5.5) geldt vanwege het volgende argument en zal vaker worden toegepast:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_{n+1}+\dots+a_k}} \right| &\leq \left| \frac{(-1)^n}{2^{a_{n+1}}} \right| + \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2^{a_{n+1}+a_{n+2}}} \right| + \dots \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_{n+1}+\dots+a_k}} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{a_{n+1}+k}} \\
&= \frac{1}{2^{a_{n+1}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{2}{2^{a_{n+1}}}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Omdat $a_i \geq 1$ voor alle $i \geq 1$ voldoet ongelijkheid (5.7) en tevens ongelijkheid (5.6). Aangezien x willekeurig gekozen is, geldt dat voor iedere $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ de Minkowski φ -functie continu is in x . \square

Voor rationale getallen $x \in [0, 1]$ kan niet worden bewezen dat φ continu is met behulp van bovenstaand bewijs. Uit Stelling 4.1 volgt dat rationale getallen een eindige kettingbreuk hebben. Bekijk nu de getallen $x = \frac{1}{3}$ en $y = 0,34$. De bijbehorende kettingbreuken zijn respectievelijk $x = [0; 3]_K$ en $y = [0; 2, 1, 16]_K$. Bovenstaand argument dat er een n bestaat zodanig dat $a_k = b_k$ voor alle $k \leq n$ voldoet dan niet, want dan zou gelden $n = 0$.

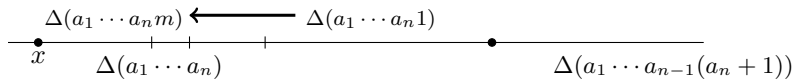
Lemma 5.2. φ is continu in elk punt $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Bewijs

Zij $\varepsilon > 0$ en kies n zodanig dat $n > 2 \log \frac{2}{\varepsilon}$. Laat $x = [0; a_1, \dots, a_n]_K$. Dan geldt dat x bevat is in de n -cilinder $\Delta(a_1 \dots a_n)$ van de Gauss afbeelding. We maken onderscheid tussen n even en oneven.

Laat n even. We moeten dan de volgende twee situaties bekijken:

- Als $y \in (x, x + \delta)$ met δ klein dan geldt dat ook $y \in \Delta(a_1, \dots, a_n)$ en tevens $y \in \Delta(a_1, \dots, a_n, m)$ waarbij $\Delta(a_1, \dots, a_n, m)$ een $n + 1$ -cilinder van de Gauss afbeelding is.



Figuur 16: Visualisatie van de keuze voor m

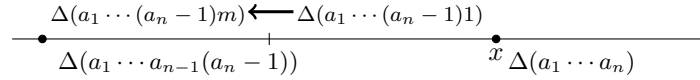
Er geldt hier dus hoe groter m gekozen wordt hoe dichter de cilinderverzameling $\Delta(a_1 \dots a_n m)$ bij x ligt. Er geldt $m = a_{n+1}$ waarbij a_{n+1} nu zo groot mogelijk gekozen kan worden zodanig dat $\delta > 0$.

Met dezelfde argumentatie als bij vergelijking (5.5) en omdat $a_i \geq 1$ voor alle $i \geq 1$

geldt nu:

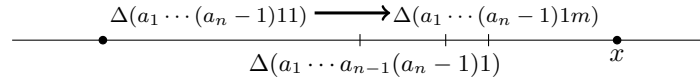
$$\begin{aligned}
|?(x)-?(y)| &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2^{(a_1+\dots+a_n)-1}} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2^{(a_1+\dots+a_n)-1}} + \sum_{k \geq n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{(a_1+\dots+a_n)-1}} \right) \right| \\
&= \left| \sum_{k \geq n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{(a_1+\dots+a_k)-1}} \right| \\
&< \frac{1}{2^{(a_1+\dots+a_n)-1}} \cdot \frac{2}{2^{a_{n+1}}} \\
&\leq \frac{1}{2^{n-1}} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

- Als $y \in (x - \delta, x)$ dan geldt $y \in \Delta(a_1 \cdots a_{n-1}(a_n - 1))$. De $n + 1$ -cilinder waarin y bevat is, moet dan gelijk zijn aan $\Delta(a_1 \cdots a_{n-1}(a_n - 1)1)$.



Figuur 17: Visualisatie van de $n + 1$ -cilinder

We willen nu kijken naar de $n + 2$ -cilinder zodanig dat a_{n+2} zo groot mogelijk gekozen kan worden om δ zo klein mogelijk te nemen.



Figuur 18: Visualisatie van de $n + 2$ -cilinder

Er geldt hier dus hoe groter m gekozen wordt hoe dichter de cilinderverzameling $\Delta(a_1 \cdots (a_n - 1)1m)$ bij x ligt. Er geldt $m = a_{n+2}$ waarbij a_{n+2} nu zo groot mo-

gelijk gekozen zodanig dat $\delta > 0$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
|?(x) - ?(y)| &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{(a_1+\dots+a_k)-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{(a_1+\dots+a_n)-1}} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{(a_1+\dots+a_k)-1}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{(a_1+\dots+a_{n-1})-1}} + \frac{(-1)^n}{2^{(a_1+\dots+a_{n-1}+1)-1}} + \sum_{k \geq n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{(a_1+\dots+a_k)-1}} \right) \right| \\
&= \left| \frac{(-1)^{n-1}}{2^{(a_1+\dots+a_n)-1}} - \frac{(-1)^{n-1}}{2^{(a_1+\dots+a_n)-2}} - \frac{(-1)^n}{2^{(a_1+\dots+a_n)-1}} + \sum_{k \leq n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{(a_1+\dots+a_k)-1}} \right| \\
&= \left| \sum_{k \geq n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{(a_1+\dots+a_k)-1}} \right| \\
&< \frac{1}{2^{(a_1+\dots+a_{n+1})-1}} \cdot \frac{2}{2^{a_{n+2}}} \\
&\leq \frac{1}{2^n} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Voor n oneven geldt een soortgelijke argumentatie behalve dat de $n+1$ -cilinder waarin y bevat is gegeven wordt door $\Delta(a_1 \cdots a_{n-1}(a_n+1)m)$ voor $y \in (x-\delta, x)$ en $\Delta(a_1 \cdots a_n 1)$ voor $y \in (x, x+\delta)$. Hieruit volgt dat $?$ continu is in elke $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. \square

Dan wordt nu het volgende hoofdresultaat verkregen.

Stelling 5.2. *$?$ is continu.*

Bewijs

Uit Lemma 5.1 en Lemma 5.2 volgt dat $?$ continu is in elk punt $x \in [0, 1]$. \square

De Minkowski $?$ -functie voldoet ook aan een aantal andere eigenschappen zoals gegeven in de volgende propositie.

Propositie 5.1. *De Minkowski $?$ -functie voldoet aan de volgende eigenschappen:*

- i. $?$ is strikt stijgend;*
- ii. Als x een rationaal getal is, dan is $?(x)$ van de vorm $\frac{k}{2^m}$ met $k, m \in \mathbb{N}$;*
- iii. Als x een kwadratisch irrationaal is, dan is $?(x)$ een niet dyadisch rationaal getal;*
- iv. $?$ is een singuliere functie.*

Bewijs

i. $?$ is strikt stijgend.

Laat $x = [0; a_1, a_2, \dots]_K$ en $y = [0; b_1, b_2, \dots]_K$ twee kettingbreuken zijn. We willen laten zien dat als $x < y$ dat dan $?(x) < ?(y)$. Er geldt het volgende:

$$x < y \Leftrightarrow \text{er is een kleinste } n \in \mathbb{N} \text{ waarvoor geldt } a_n \neq b_n.$$

Dit geeft dat

$$\begin{aligned}
?(y)-?(x) &= \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{b_1+\dots+b_n+\dots+b_k-1}} - \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_1+\dots+a_n+\dots+a_k-1}} \quad (5.8) \\
&= \frac{1}{2^{a_1+\dots+a_{n-1}-1}} \left(\sum_{k \geq n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{b_n+\dots+b_k}} - \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_n+\dots+a_k}} \right) \\
&= \frac{1}{2^{a_1+\dots+a_{n-1}-1}} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{b_n}} - \frac{(-1)^{n-1}}{2^{a_n}} + \right. \\
&\quad \left. \sum_{k \geq n+1} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{2^{b_{n+1}+\dots+b_k}} - \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_{n+1}+\dots+a_k}} \right) \right).
\end{aligned}$$

Er geldt in vergelijking 5.8 dat de gekozen n de kleinste n is waarvoor geldt $a_n \neq b_n$.

We moeten 2 situaties onderscheiden:

- (a) als n oneven is, dan betekent $x < y$ dat $a_n > b_n$ en dus $\frac{1}{2^{b_n}} - \frac{1}{2^{a_n}} > 0$,
- (b) als n even is, dan betekent $x < y$ dat $a_n < b_n$ en dus $\frac{1}{2^{a_n}} - \frac{1}{2^{b_n}} > 0$.

We bekijken de situatie waarbij n oneven is. Dan geldt met behulp van afschattingen het volgende:

$$\begin{aligned}
?(y)-?(x) &= \frac{1}{2^{a_1+\dots+a_{n-1}-1}} \left(\frac{1}{2^{b_n}} - \frac{1}{2^{a_n}} + \sum_{k \geq n+1} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{2^{b_n+\dots+b_k}} - \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_n+\dots+a_k}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2^{a_1+\dots+a_{n-1}-1}} \left(\frac{1}{2^{b_n}} - \frac{1}{2^{a_n}} - \frac{1}{2^{b_n}} \left(\frac{1}{2^{b_{n+1}}} - \frac{1}{2^{b_{n+1}+b_{n+2}}} + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2^{a_n}} \left(\frac{1}{2^{a_{n+1}}} - \frac{1}{2^{a_{n+1}+a_{n+2}}} + \dots \right) \right) \\
&> \frac{1}{2^{a_1+\dots+a_{n-1}-1}} \left(\frac{1}{2^{b_n}} - \frac{1}{2^{b_n}} \cdot \frac{1}{2^{b_{n+1}}} - \frac{1}{2^{a_n}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2^{a_n}} \left(\frac{1}{2^{a_{n+1}}} - \frac{1}{2^{a_{n+1}+a_{n+2}}} + \dots \right) \right) \quad (5.9) \\
&\geq \frac{1}{2^{a_1+\dots+a_{n-1}-1}} \left(\frac{1}{2^{b_n}} - \frac{1}{2^{b_n}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{a_n}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2^{a_n}} \left(\frac{1}{2^{a_{n+1}}} - \frac{1}{2^{a_{n+1}+a_{n+2}}} + \dots \right) \right) \\
&> \frac{1}{2^{a_1+\dots+a_{n-1}-1}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{b_n}} - \frac{1}{2^{a_n}} \right) \\
&\geq \frac{1}{2^{a_1+\dots+a_{n-1}-1}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{b_n}} - \frac{1}{2^{b_n+1}} \right) \quad (5.10) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ongelijkheid (5.9) voldoet omdat

$$\frac{1}{2^{b_n}} - \frac{1}{2^{b_n}} \left(\frac{1}{2^{b_{n+1}}} - \frac{1}{2^{b_{n+1}+b_{n+2}}} + \dots \right) > \frac{1}{2^{b_n}} - \frac{1}{2^{b_n}} \cdot \frac{1}{2^{b_{n+1}}}.$$

Als geldt $a_n > b_n$, dan geldt ook $a_n \geq b_n + 1$ en met dit argument voldoet ook vergelijking (5.10).

Voor n even is de argumentatie soortgelijk. Hieruit volgt dat $\varphi(y) - \varphi(x) > 0$ voor alle n en dus is φ een stijgende functie.

ii. Als x een rationaal getal is, dan is $\varphi(x)$ van de vorm $\frac{k}{2^m}$ met $k, m \in \mathbb{N}$.

Als x een rationaal getal is, dan geldt volgens Stelling 4.1 dat x een eindige kettingbreuk heeft. Dan bestaat de uitdrukking voor de Minkowski φ -functie uit een eindige som en volgt uit de definitie van de Minkowski φ -functie dat $\varphi(x)$ in de vorm is van $\frac{k}{2^m}$ met $m, k \in \mathbb{N}$.

iii. Als x een kwadratisch irrationaal is, dan is $\varphi(x)$ een niet dyadisch rationaal getal.

Als x een kwadratisch irrationaal getal is, geldt volgens Stelling 4.6 dat x een periodieke kettingbreuk heeft. Laat $x = [0; a_1, \dots, a_n, \overline{a_{n+1}, \dots, a_{n+h}}]_K$ met h de lengte van de periode. Schrijf $\alpha = a_{n+1} + \dots + a_{n+h}$ en bekijk de Minkowski φ -waarde:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 2 \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_1 + \dots + a_k}} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_1 + \dots + a_k}} + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_1 + \dots + a_k}} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_1 + \dots + a_k}} + \frac{1}{2^{(a_1 + \dots + a_n) - 1}} \left(\frac{(-1)^n}{2^{a_{n+1}}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{a_{n+1} + a_{n+2}}} + \dots + \frac{(-1)^{n+h-2}}{2^{a_{n+1} + \dots + a_{n+h-1}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{n+h-1}}{2^\alpha} + \frac{(-1)^{n+h}}{2^{\alpha + a_{n+1}}} + \dots + \frac{(-1)^{n+2h-2}}{2^{\alpha + a_{n+1} + \dots + a_{n+h-1}}} + \frac{(-1)^{n+2h-1}}{2^{2\alpha}} + \dots \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_1 + \dots + a_k}} + \frac{(-1)^n}{2^{(a_1 + \dots + a_{n+1}) - 1}} \left(1 + \frac{(-1)^h}{2^\alpha} + \frac{(-1)^{2h}}{2^{2\alpha}} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{(a_1 + \dots + a_{n+1} + a_{n+2}) - 1}} \left(1 + \frac{(-1)^h}{2^\alpha} + \frac{(-1)^{2h}}{2^{2\alpha}} + \dots \right) \\ &\quad + \dots + \frac{(-1)^{n+h-1}}{2^{(a_1 + \dots + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+h}) - 1}} \left(1 + \frac{(-1)^h}{2^\alpha} + \frac{(-1)^{2h}}{2^{2\alpha}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_1 + \dots + a_k}} + \frac{(-1)^n}{2^{(a_1 + \dots + a_{n+1}) - 1}} \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^h}{2^\alpha} \right)^{k_1} \\ &\quad + \dots + \frac{(-1)^{n+h-1}}{2^{(a_1 + \dots + a_{n+1} + \dots + a_{n+h}) - 1}} \sum_{k_h=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^h}{2^\alpha} \right)^{k_h}. \quad (5.11) \end{aligned}$$

De som $2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_1 + \dots + a_k}}$ is een dyadisch getal van de vorm $\frac{N}{2^m}$ met $N, m \in \mathbb{N}$. De som van een dyadisch en een niet-dyadisch getal is een niet-dyadisch getal. We willen nu laten zien dat $\varphi(x)$ zonder het dyadische gedeelte een niet-dyadisch getal geeft. Hiervoor moet onderscheid worden gemaakt tussen h even en h oneven.

Laat h even zijn, dan geldt voor alle $1 < j \leq h$ dat

$$\sum_{k_j=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^h}{2^\alpha} \right)^{k_j} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^\alpha}} = \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1}.$$

Dit invullen geeft

$$\frac{(-1)^n}{2^{(a_1+\dots+a_{n+1})-1}} \cdot \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^{(a_1+\dots+a_{n+h})-1}} \cdot \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1}.$$

Te zien is dat dit een rationaal getal is. Vervolgens willen we nog laten zien dat deze niet-dyadisch is. We maken de noemers gelijknamig en dat geeft

$$\frac{(-1)^n 2^{a_{n+2}+\dots+a_{n+h}} 2^\alpha + (-1)^{n+1} 2^{a_{n+3}+\dots+a_{n+h}} 2^\alpha + \dots + (-1)^{n+h-1} 2^\alpha}{2^{(a_1+\dots+a_{n+h})-1} (2^\alpha - 1)}.$$

In de teller en noemer staat nu een factor 2^α en dat geeft de volgende rationaal:

$$\frac{(-1)^n 2^{a_{n+2}+\dots+a_{n+h}} + (-1)^{n+1} 2^{a_{n+3}+\dots+a_{n+h}} + \dots + (-1)^{n+h-1}}{2^{(a_1+\dots+a_n)-1} (2^\alpha - 1)}.$$

We herschrijven deze vergelijking tot het volgende:

$$\frac{(-1)^n 2^{\alpha-a_{n+1}} + (-1)^{n+1} 2^{\alpha-a_{n+1}-a_{n+2}} + \dots + (-1)^{n+h-2} 2^{\alpha-a_{n+1}-\dots-a_{n+h-1}} + (-1)^{n+h-1}}{2^{(a_1+\dots+a_n)-1} (2^\alpha - 1)}.$$

De teller is een oneven getal vanwege de ± 1 aan het einde van de som. De noemer is geen macht van twee. Stel deze zou wel een macht van 2 zijn, dan geldt

$$\begin{aligned} 2^{(a_1+\dots+a_n)-1} (2^\alpha - 1) &= 2^d \\ 2^\alpha - 1 &= 2^{d-(a_1+\dots+a_n)+1} \end{aligned}$$

Deze laatste vergelijking geeft tegenspraak en de noemer is dus geen macht van 2.

Wat nog kan is dat de teller gelijk aan of een veelvoud is van $2^\alpha - 1$. We gaan laten zien dat dit niet kan.

Ook hier moet er onderscheid gemaakt worden, maar dan tussen n even of n oneven.

- Stel n is even, dan geldt wegens $a_{n+i} \geq 1$ voor alle $1 \leq i \leq h$ dat

$$\begin{aligned} 0 &< 2^{\alpha-a_{n+1}} - 2^{\alpha-a_{n+1}-a_{n+2}} + \dots + 2^{\alpha-a_{n+1}-\dots-a_{n+h-1}} - 1 \\ &= \frac{2^\alpha}{2^{a_{n+1}}} - \frac{2^\alpha}{2^{a_{n+1}+a_{n+2}}} + \dots + \frac{2^\alpha}{2^{a_{n+1}+\dots+a_{n+h-1}}} - 1 \\ &< \frac{2^\alpha}{2^{a_{n+1}}} - 1 \\ &< 2^\alpha - 1. \end{aligned}$$

- Stel n is oneven, dan geldt wegens $a_{n+i} \geq 1$ voor alle $1 \leq i \leq h$ het volgende:

$$\begin{aligned} 0 &> -2^{\alpha-a_{n+1}} + 2^{\alpha-a_{n+1}-a_{n+2}} - \dots - 2^{\alpha-a_{n+1}-\dots-a_{n+h-1}} + 1 \\ &= -2^\alpha (2^{-a_{n+1}} - 2^{-a_{n+1}-a_{n+2}} + \dots + 2^{-a_{n+1}-\dots-a_{n+h-1}}) + 1 \\ &> -2^\alpha + 1 \\ &= -(2^\alpha - 1). \end{aligned}$$

Dus de teller is niet gelijk aan $\pm k(2^\alpha - 1)$ voor $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Hieruit volgt dat als h een even getal is, dat dan (5.11) een niet-dyadisch getal is.

Laat h oneven, dan geldt dat het niet-dyadische gedeelte in (5.11) gelijk is aan

$$\frac{(-1)^n}{2^{(a_1+\dots+a_{n+1})-1}} \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2^\alpha}\right)^{k_1} + \dots + \frac{(-1)^{n+h-1}}{2^{(a_1+\dots+a_{n+h})-1}} \sum_{k_h=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2^\alpha}\right)^{k_h}.$$

Er geldt voor elke som in deze vergelijking dat die in de vorm $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2^\alpha}\right)^i$ is. Dit omschrijven geeft

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2^\alpha}\right)^i &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^{2i} - \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^{2i+1} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{2\alpha}}} - \frac{1}{2^\alpha} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2^{2\alpha}}}\right) \\ &= \frac{2^{2\alpha}}{2^{2\alpha} - 1} - \frac{2^\alpha}{2^{2\alpha} - 1} \\ &= \frac{2^\alpha(2^\alpha - 1)}{(2^\alpha - 1)(2^\alpha + 1)} \\ &= \frac{2^\alpha}{2^\alpha + 1}. \end{aligned}$$

Dit invullen geeft

$$\frac{(-1)^n 2^{a_{n+2}+\dots+a_{n+h}} + (-1)^{n+1} 2^{a_{n+3}+\dots+a_{n+h}} + \dots + (-1)^{n+h-1}}{2^{(a_1+\dots+a_n)-1}(2^\alpha + 1)}.$$

We volgen dezelfde argumentatie als bij h even en we mogen concluderen dat hier ook (5.11) een niet dyadisch getal is. Dus als x een kwadratisch irrationaal getal is, dan is $\mathcal{M}(x)$ een niet dyadisch rationaal getal is.

iv. \mathcal{M} is singulier.

Om te laten zien dat de Minkowski \mathcal{M} -functie singulier is, gaan we aantonen dat de afgeleide van deze functie bijna overal gelijk aan 0 is.

Definieer de verzameling $B = \{x \in [0, 1] : \mathcal{M} \text{ is differentieerbaar in } x\}$. Uit Propositie 5.1.i volgt dat \mathcal{M} een strikt stijgende functie is. Een continue en strikt stijgende functie is bijna overal differentieerbaar. Hieruit volgt dat $\lambda(B) = 1$.

Definieer ook $E = \{x \in [0, 1] | \exists k \text{ zodanig dat } a_n(x) \leq k \text{ voor alle } n\}$ en bekijk de verzameling $N = [0, 1] \setminus E$. Er geldt hier $\lambda(E) = 0$ en $\lambda(N) = 1$ zoals is laten zien in [17] en [18], maar er hoeft niet te gelden $B = N$. Wel geldt dat voor bijna alle $x \in N$ de Minkowski \mathcal{M} -functie differentieerbaar is.

Omdat $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 1$ is het voldoende om te kijken naar $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ met $x = [0; a_1, a_2, \dots]_K$ om te bewijzen dat \mathcal{M} singulier is. Laat $\mathcal{M}(x) = y$ en r_n een n -de convergent van x en laat de Minkowski \mathcal{M} -waarde van r_n gelijk zijn aan $\rho_n = \mathcal{M}(r_n) = \mathcal{M}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$.

Er geldt volgens Stelling 4.4 dat $T^n(x) = [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]_K = \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + \frac{1}{\ddots}}}$.

Dan geldt ook

$$\frac{1}{T^n(x)} = a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+3} + \frac{1}{\ddots}}} = a_{n+1} + T^{n+1}(x).$$

Laat nu deze laatste uitdrukking gelijk zijn aan a'_{n+1} . Dan kunnen we de uitdrukking $x = \frac{p_n + T^n(x)p_{n-1}}{q_n + T^n(x)q_{n-1}}$ herschrijven in een uitdrukking met daarin a'_{n+1} . Er geldt dan

$$\begin{aligned} x &= \frac{p_n + T^n(x)p_{n-1}}{q_n + T^n(x)q_{n-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{T^n(x)}p_n + p_{n-1}}{\frac{1}{T^n(x)}q_n + q_{n-1}} \\ &= \frac{(T^{n+1}(x) + a_{n+1})p_n + p_{n-1}}{(T^{n+1}(x) + a_{n+1})q_n + q_{n-1}} \\ &= \frac{a'_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a'_{n+1}q_n + q_{n-1}}. \end{aligned}$$

Het doel is om een uitdrukking voor de afgeleide van $?(x)$ te bepalen. Bekijk hiervoor $|y - \rho_n|$ en $|x - r_n|$ om uiteindelijk een uitdrukking voor $\left| \frac{y - \rho_n}{x - r_n} \right|$ te vinden. Allereerst bekijken we $|x - r_n|$. Dit is gelijk aan

$$\begin{aligned} |x - r_n| &= \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \\ &= \left| \frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{q_n (a'_{n+1} q_n + q_{n-1})} \right| \\ &= \left| \frac{1}{q_n (a'_{n+1} q_n + q_{n-1})} \right|. \end{aligned}$$

Van deze vergelijking stellen we een bovengrens en ondergrens op. De bovengrens is

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{q_n (a'_{n+1} q_n + q_{n-1})} \right| &= \frac{1}{q_n ((T^{n+1}(x) + a_{n+1})q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{1}{a_{n+1} q_n^2 + T^{n+1}(x) q_n^2 + q_n q_{n-1}} \\ &< \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}. \end{aligned}$$

Omdat geldt dat $\{q_n\}_{n \geq 0}$ een stijgend rijtje is, geldt dat $q_{n-1} q_n < q_n^2$ voor alle n . Ook

geldt dat $T^{n+1}(x) \leq 1$. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{q_n(a'_{n+1}q_n + q_{n-1})} \right| &= \frac{1}{q_n((T^{n+1}(x) + a_{n+1})q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{1}{a_{n+1}q_n^2 + T^{n+1}(x)q_n^2 + q_nq_{n-1}} \\ &> \frac{1}{a_{n+1}q_n^2 + q_n^2 + q_n^2} \\ &= \frac{1}{q_n^2(a_{n+1} + 2)}. \end{aligned}$$

Dus de afchatting voor $|x - r_n|$ is nu

$$\frac{1}{q_n^2(a_{n+1} + 2)} < |x - r_n| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}.$$

Vervolgens wordt $|y - \rho_n|$ bepaald. Er geldt

$$\begin{aligned} |y - \rho_n| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{2^{(a_1+\dots+a_i)-1}} - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{2^{(a_1+\dots+a_i)-1}} \right| \\ &= \left| (-1)^n \left(\frac{1}{2^{(a_1+\dots+a_{n+1})-1}} - \frac{1}{2^{(a_1+\dots+a_{n+2})-1}} + \dots \right) \right|. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de afchatting voor $|y - \rho_n|$ gelijk is aan

$$\frac{1}{2^{a_1+\dots+a_{n+1}}} < |y - \rho_n| < \frac{1}{2^{(a_1+\dots+a_{n+1})-1}}.$$

Het differentiequotient $\delta_n := \left| \frac{y - \rho_n}{x - r_n} \right|$ is nu

$$\delta_n = \left| \frac{y - \rho_n}{x - r_n} \right| < \frac{1}{2^{(a_1+\dots+a_{n+1})-1}} / \frac{1}{q_n^2(a_{n+1} + 2)} = \frac{2q_n^2(a_{n+1} + 2)}{2^{a_1+\dots+a_{n+1}}}. \quad (5.12)$$

We gaan nu ook het differentiequotient bepalen in iteratie $n - 1$. Deze is gelijk aan

$$\delta_{n-1} = \left| \frac{y - \rho_{n-1}}{x - r_{n-1}} \right| > \frac{1}{2^{a_1+\dots+a_n}} / \frac{1}{a_nq_{n-1}^2} = \frac{a_nq_{n-1}^2}{2^{a_1+\dots+a_n}}. \quad (5.13)$$

Als de afgeleide bestaat en ongelijk is aan 0, moet voor $n \rightarrow \infty$ gelden dat $\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \rightarrow 1$. Er geldt

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} &< \frac{\frac{2(a_{n+1}+2)q_n^2}{2^{a_1+\dots+a_{n+1}}}}{\frac{a_n q_{n-1}^2}{2^{a_1+\dots+a_n}}} \\
&= \frac{1}{2^{a_{n+1}}} \cdot \frac{2(a_{n+1}+2)q_n^2}{a_n q_{n-1}^2} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2^{a_{n+1}}} \cdot \left(\frac{q_n}{q_{n-1}}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_{n+1}+2}{a_n}\right) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2^{a_{n+1}}} \cdot \left(\frac{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_{n+1}+2}{a_n}\right) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2^{a_{n+1}}} \cdot \left(a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_{n+1}+2}{a_n}\right) \\
&< 2 \cdot \frac{1}{2^{a_{n+1}}} \cdot (a_n + 1)^2 \cdot \left(\frac{a_{n+1}+2}{a_n}\right) \\
&= \frac{1}{2^{a_{n+1}}} \cdot a_n a_{n+1} \left(2 + \frac{4}{a_{n+1}} + \frac{4}{a_n} + \frac{8}{a_n a_{n+1}} + \frac{2}{a_n^2} + \frac{4}{a_n^2 a_{n+1}}\right) \\
&< 24 \cdot \frac{1}{2^{a_{n+1}}} \cdot a_n a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Voor iedere $x \in N$ kan er nu een strikt stijgend deelrijtje $\{a_{n_k}\}$ van $\{a_n\}$ gevonden worden zodanig dat $a_{n_{k-1}} < a_{n_k}$ en $a_{n_k} \rightarrow \infty$ en dus

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = 0. \quad (5.14)$$

Er geldt hier dat $\liminf \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \neq 1$ en dan bestaat óf de afgeleide niet óf de afgeleide is gelijk aan 0.

Omdat $\lambda(B) = 1$ geldt dat $\lambda(B^c) = 0$ waarbij B^c het complement van B is. Tevens geldt $N^c = E$. Hieruit volgt dat

$$0 \leq \lambda((N \cap B)^c) = \lambda(E \cup B^c) \leq \lambda(E) + \lambda(B^c) = 0$$

en dus $\lambda((N \cap B)^c) = 0$. Zodoende geldt nu $\lambda(N \cap B) = 1$ en dus is ? differentieerbaar voor bijna alle $x \in N$. Dus de afgeleide bestaat en is gelijk aan 0. Hieruit volgt dat ? singulier is. \square

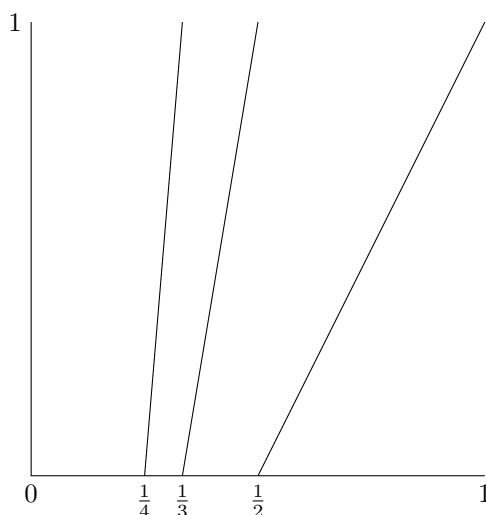
6 Lüroth-ontwikkeling

Bij onder andere de decimale ontwikkeling en de binaire ontwikkeling wordt het interval $[0, 1]$ opgedeeld in disjuncte deelintervallen waarbij elk deelinterval gelijke lengte heeft. Bij bijvoorbeeld de decimale ontwikkeling heeft elk deelinterval een lengte van $\frac{1}{10}$. In 1883 gaf Lüroth in [15] een getalsontwikkeling waarbij de deelintervallen niet van gelijke lengte zijn. Deze zogenaamde Lüroth ontwikkeling van een getal $x \in [0, 1]$ wordt gegeven door de volgende uitdrukking:

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1(a_1 - 1)a_2} + \cdots + \frac{1}{a_1(a_1 - 1)a_2 \cdots a_{n-1}(a_{n-1} - 1)a_n} + \cdots \quad (6.1)$$

met Lürothcijfers $a_n \geq 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. We noteren deze Lüroth ontwikkeling voor $x \in [0, 1]$ door $x = [a_1 a_2 \cdots]_L$. Deze ontwikkeling wordt gegenereerd door de Lüroth afbeelding $L : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ met

$$L(x) = \begin{cases} n(n-1)x - (n-1) & \text{als } x \in (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}], \\ 0 & \text{als } x = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$



Figuur 19: Lüroth ontwikkeling

We beschrijven hoe je ontwikkelingen van de vorm (6.1) krijgt met behulp van de afbeelding L .

We definiëren $a_1(x) = n$ als $x \in (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]$ en definieer voor alle $k \geq 1$ de Lürothcijfers door $a_k(x) = a_1(L^{k-1}(x))$ met $a_k(x) = \infty$ als $L^{k-1}(x) = 0$. We bepalen een algemene uitdrukking voor $L^{k-1}(x)$. Er geldt

$$L(x) = a_1(a_1 - 1)x - (a_1 - 1),$$

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{L(x)}{a_1(a_1 - 1)}.$$

Dit proces kunnen we herhalen met $L^2(x)$. Er geldt

$$\begin{aligned} L^2(x) &= a_1(L(x))(a_1(L(x)) - 1)L(x) - (a_1(L(x)) - 1) \\ &= a_2(a_2 - 1)L(x) - (a_2 - 1), \\ L(x) &= \frac{1}{a_2} + \frac{L^2(x)}{a_2(a_2 - 1)}, \\ x &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1(a_1 - 1)} \left(\frac{1}{a_2} + \frac{L^2(x)}{a_2(a_2 - 1)} \right). \end{aligned}$$

Dit itereren geeft voor $L^{k-1}(x)$ en x een algemene uitdrukking

$$\begin{aligned} L^{k-1}(x) &= \frac{1}{a_k} + \frac{L^k(x)}{a_k(a_k - 1)}, \\ x &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1(a_1 - 1)a_2} + \cdots + \frac{1}{a_1(a_1 - 1) \cdots a_{k-1}(a_{k-1} - 1)a_k} \\ &\quad + \frac{L^k(x)}{a_1(a_1 - 1) \cdots a_k(a_k - 1)}. \end{aligned}$$

Als $L^{k-1}(x) = 0$ voor een $k \geq 1$ dan geldt

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1(a_1 - 1)a_2} + \cdots + \frac{1}{a_1(a_1 - 1)a_2 \cdots a_{k-1}(a_{k-1} - 1)a_k}.$$

Als $L^{k-1}(x) \neq 0$ voor alle $k \geq 1$ dan geldt

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1(a_1 - 1)a_2} + \cdots + \frac{1}{a_1(a_1 - 1)a_2 \cdots a_{k-1}(a_{k-1} - 1)a_k} + \cdots.$$

Laat nu $\frac{p_k}{q_k} := \frac{p_k(x)}{q_k(x)}$ de som zijn van de eerste k termen van de getalsontwikkeling. Dan geldt

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| = \left| \frac{L^k(x)}{a_1(a_1 - 1) \cdots a_k(a_k - 1)} \right|.$$

Omdat $L^k(x) \in [0, 1]$ en $a_k \geq 2$ voor alle x en alle $k \geq 1$ geldt nu $|x - \frac{p_k}{q_k}| \leq \frac{1}{2^k} \rightarrow 0$ als $k \rightarrow \infty$. Dus de Lüroth ontwikkeling convergeert inderdaad naar x .

Voorbeeld 6.1. *Lüroth-ontwikkeling van $\frac{2}{7}$.*

Er geldt $x = \frac{2}{7} \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ en dus $a_1 = 4$. Deze x invullen in $L(x) = a_1(a_1 - 1)x - (a_1 - 1)$ geeft $L(\frac{2}{7}) = 4 \cdot 3 \cdot \frac{2}{7} - 3 = \frac{3}{7}$. Hieruit volgt $a_2 = 3$. Verder itereren geeft $a_3 = 2$ en $a_4 = 7$. Er geldt $L^4(x) = 0$ en dus is de Lüroth-ontwikkeling behorende bij $x = \frac{2}{7}$ gelijk aan $[4327]_L$.

Een variant op de Lüroth-ontwikkeling is de *alternerende Lüroth-ontwikkeling* gegeven in onder andere [3, 13]. Voor elke $x \in [0, 1]$ geldt dan het volgende:

$$x = \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_1(a_1 - 1)(a_2 - 1)} + \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{a_1(a_1 - 1) + \cdots + (a_{k-1} - 1)(a_k - 1)} + \cdots \quad (6.3)$$

met $a_k \geq 2$ en $k \geq 1$. Het dynamisch systeem dat deze ontwikkelingen produceert wordt gegeven door de afbeelding $L_A : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gedefinieerd door

$$L_A(x) = \begin{cases} n - n(n-1)x & \text{als } x \in (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}], \\ 0 & \text{als } x = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

met $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ en $a_1(x) = n$ als $x \in (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]$. Voor alle $k \geq 1$ definieer je nu de *alternerende Lürothcijfers* door $a_k(x) = a_1(L_A^{k-1}(x))$.

We noteren deze alternerende Lüroth-ontwikkeling voor $x \in [0, 1]$ met $x = [a_1 a_2 \cdots]_A$.

Merk op dat $L_A(x) = 1 - L(x)$.

Voorbeeld 6.2. *Alternerende Lüroth-ontwikkeling van $\frac{2}{7}$.*

Er geldt $x = \frac{2}{7} \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ en dus $a_1 = 4$. Deze x invullen in $L_A(x)$ geeft $L_A(\frac{2}{7}) = 4 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$. Hieruit volgt $a_2 = 2$. Er geldt $L_A^2(\frac{4}{7}) = \frac{6}{7}$ en dus $a_3 = 2$. Vervolgens geldt $L_A^3(\frac{6}{7}) = \frac{2}{7} = x$ en daardoor is de alternerende Lüroth-ontwikkeling periodiek en gelijk aan $x = [422]_A$.

Deze alternerende Lüroth-ontwikkeling heeft betere benaderingseigenschappen dan de standaard Lüroth-ontwikkeling. Definieer de benaderingscoëfficiënten $\theta_n(x)$ voor bijna alle x met

$$\theta_k(x) := q_k \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \quad (6.5)$$

met $k \geq 0$. Dan geldt dat $\frac{p_k}{q_k}$ een goede benadering is als $\theta_k(x)$ klein is.

De volgende stelling is geformuleerd en bewezen in [3].

Stelling 6.1. *Voor Lebesgue bijna alle x en voor elke $z \in (0, 1]$ bestaat het limiet*

$$F_L := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \#\{1 \leq j \leq N : \theta_j(x) < z\}.$$

Voor de alternerende Lüroth-ontwikkeling bestaat deze limiet ook en deze wordt F_A genoemd. Er geldt

$$F_L \leq F_A$$

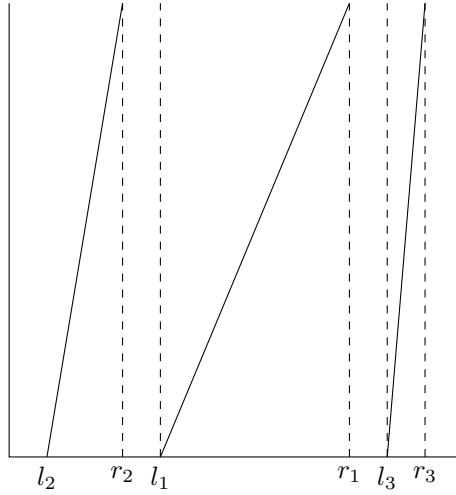
wat wordt bewezen in [3] en hieruit volgt dat de alternerende Lüroth-ontwikkeling betere benaderingseigenschappen heeft dan de standaard Lüroth-ontwikkeling.

6.1 Gegeneraliseerde Lüroth-ontwikkeling

Eerder hebben we de Lüroth-ontwikkeling gezien met daarbij de partitie $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}] : n \in \mathbb{N}_{\geq 2}\}$. Daarentegen bestaat er ook een algemene versie van deze ontwikkeling, namelijk de *gegeneraliseerde Lüroth-ontwikkeling*.

Beschouw een partitie $\mathcal{I} = \{(l_n, r_n] : n \in \mathcal{D}\}$ van $(0, 1]$ waarbij $\mathcal{D} \subset \mathbb{N}$ een eindige of aftelbare verzameling is en $\sum_{n \in \mathcal{D}} (r_n - l_n) = 1$. Schrijf $L_n = r_n - l_n$ en $I_n = (l_n, r_n]$ en neem aan dat voor $i, j \in \mathcal{D}$ met $i > j$ er geldt $0 < L_i \leq L_j < 1$. Laat $\Omega = \bigcup_{n \in \mathcal{D}} I_n$ en $I_\infty = [0, 1] \setminus \Omega$. Omdat \mathcal{I} een partitie is, volgt $\lambda(I_\infty) = 0$. Beschouw nu de volgende transformatie L_G op $[0, 1]$:

$$L_G(x) = \begin{cases} \frac{1}{r_n - l_n} x - \frac{l_n}{r_n - l_n} & \text{als } x \in \Omega, \\ 0 & \text{als } x \in I_\infty. \end{cases} \quad (6.6)$$



Figuur 20: Gegeneraliseerde Lüroth-ontwikkeling

We willen deze transformatie L_G itereren om een ontwikkeling van punten in $[0, 1]$ te genereren. Dit zijn precies de punten die tijdens het itereren nooit in I_∞ komen. Bekijk voor $x \in \Omega$ de volgende uitdrukkingen:

$$s(x) = \frac{1}{r_n - l_n} \quad \text{en} \quad h(x) = \frac{l_n}{r_n - l_n} \quad (6.7)$$

zodanig dat $L_G(x) = xs(x) - h(x)$. Er geldt dan voor $x \in I_n$ dat

$$s(x) = \frac{1}{L_n}. \quad (6.8)$$

Laat nu

$$s_k = s_k(x) = \begin{cases} s(L_G^{k-1}(x)) & \text{als } L_G^{k-1}(x) \in I_n, n \in \mathcal{D}, \\ \infty & \text{als } L_G^{k-1}(x) \in I_\infty \end{cases} \quad (6.9)$$

en

$$h_k = h_k(x) = \begin{cases} h(L_G^{k-1}(x)) & \text{als } L_G^{k-1}(x) \in I_n, n \in \mathcal{D}, \\ 1 & \text{als } L_G^{k-1}(x) \in I_\infty \end{cases} \quad (6.10)$$

met $s(x) = s_1(x)$ en $h(x) = h_1(x)$.

Hieruit volgt dat voor $x \in \Omega$ zodanig dat $L_G^k(x) \in \Omega$ voor alle $k \geq 1$ geldt

$$\begin{aligned} x &= \frac{h_1}{s_1} + \frac{L_G(x)}{s_1} \\ &= \frac{h_1}{s_1} + \frac{1}{s_1} \left(\frac{h_2}{s_2} + \frac{L_G^2(x)}{s_2} \right) \\ &= \frac{h_1}{s_1} + \frac{h_2}{s_1 s_2} + \frac{L_G^2(x)}{s_1 s_2} \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{h_1}{s_1} + \frac{h_2}{s_1 s_2} + \frac{h_k}{s_1 s_2 \cdots s_k} + \frac{L_G^k(x)}{s_1 s_2 \cdots s_k}. \end{aligned}$$

Dit noemen we de L_G -ontwikkeling van x . De k -de L_G -convergent van x wordt gedefinieerd door

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{h_1}{s_1} + \frac{h_2}{s_1 s_2} + \cdots + \frac{h_k}{s_1 s_2 \cdots s_k}. \quad (6.11)$$

Laat $M = \max_i L_i$ de lengte van het grootste deelinterval zijn in de partitie. Dan geldt vanwege (6.8) en $L_G^k(x) \in [0, 1]$ voor alle $k \in \mathbb{N}$ dat

$$\left| x - \frac{P_k}{Q_k} \right| = \frac{L_G^k(x)}{s_1 s_2 \cdots s_k} \leq M^k \rightarrow 0$$

voor $k \rightarrow \infty$ en dus convergeert de gegeneraliseerde Lüroth-ontwikkeling naar x .

Voor $x \in [0, 1]$ definiëren we de *gegeneraliseerde Lürothcijfers* $a_n := a_n(x)$ voor $n \in \mathbb{N}$ als volgt

$$a_n = k \Leftrightarrow L_G^{n-1}(x) \in I_k \quad \text{voor} \quad k \in \mathcal{D} \cup \{\infty\}. \quad (6.12)$$

De gegeneraliseerde Lüroth-ontwikkeling voor een $x \in [0, 1]$ wordt dan genoteerd als $x = [a_1 a_2 \cdots]_G$. Merk op dat als je de partitie $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}] : n \in \mathbb{N}_{n \geq 2}\}$ gebruikt, dat deze opzet dan weer de oorspronkelijke standaard Lüroth-ontwikkeling (6.1) geeft.

6.2 α -Lüroth-ontwikkelingen

Net als voor de standaard Lüroth-ontwikkeling kunnen we ook voor de gegeneraliseerde Lüroth-ontwikkeling een alternerende versie definiëren. Deze wordt de α -Lüroth-ontwikkeling genoemd en genoteerd met L_α . Hierbij geldt net als bij de standaard alternerende Lüroth-ontwikkeling dat $L_\alpha = 1 - L_G$ en dus wordt de afbeelding L_α gegeven door

$$L_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{r_n - x}{r_n - l_n} & \text{als } x \in I_n, n \in \mathcal{D}, \\ 0 & \text{als } x \in I_\infty. \end{cases}$$

Tevens geldt $L_\alpha(x) = 1 - s(x)x + h(x)$ en wordt met dezelfde uitdrukkingen voor s_k en h_k als bij de gegeneraliseerde Lüroth-ontwikkeling met L_α in plaats van L_G de α -Lüroth-ontwikkeling voor x gegeneerd. Er geldt

$$\begin{aligned} L_\alpha^k(x) &= 1 - s(L_\alpha^{k-1}(x))L_\alpha^{k-1}(x) + h(L_\alpha^{k-1}(x)) \\ &= 1 - s_k L_\alpha^{k-1}(x) + h_k. \end{aligned}$$

Omschrijven geeft

$$L_\alpha^{k-1}(x) = \frac{1 + h_k}{s_k} - \frac{L_\alpha^k(x)}{s_k}.$$

De α -Lüroth-ontwikkeling voor een $x \in [0, 1]$ wordt nu gegeven door

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1+h_1}{s_1} - \frac{L_\alpha(x)}{s_1} \\
&= \frac{1+h_1}{s_1} - \frac{1}{s_1} \left(\frac{1+h_2}{s_2} - \frac{L_\alpha^2(x)}{s_2} \right) \\
&= \frac{1+h_1}{s_1} - \frac{1+h_2}{s_1 s_2} + \frac{L_\alpha^2(x)}{s_1 s_2} \\
&\vdots \\
&= \frac{1+h_1}{s_1} - \frac{1+h_2}{s_1 s_2} + \dots + (-1)^{k-1} \left(\frac{1+h_k}{s_1 s_2 \dots s_k} + \frac{L_\alpha^k(x)}{s_1 s_2 \dots s_k} \right).
\end{aligned}$$

Als $L_\alpha^k(x) = 0$ voor een $k \in \mathbb{N}$ dan geldt dat x een eindige α -Lüroth-ontwikkeling heeft en dus gegeven wordt door

$$x = \frac{1+h_1}{s_1} - \frac{1+h_2}{s_1 s_2} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1+h_k}{s_1 s_2 \dots s_k}.$$

Laat de k -de convergent $\frac{\tilde{P}_k}{\tilde{Q}_k}$ van de α -Lüroth-ontwikkeling gegeven worden door

$$\frac{\tilde{P}_k}{\tilde{Q}_k} = \frac{1+h_1}{s_1} - \frac{1+h_2}{s_1 s_2} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1+h_k}{s_1 s_2 \dots s_k}.$$

Laat $N = \max_i L_i$ de lengte van het grootste deelinterval in de partitie. Dan geldt

$$\left| x - \frac{\tilde{P}_k}{\tilde{Q}_k} \right| = \frac{L_\alpha^k(x)}{s_1 s_2 \dots s_k} \leq N^k \rightarrow 0$$

voor $k \rightarrow \infty$ en dus convergeert de α -Lüroth-ontwikkeling naar x .

De α -Lürothcijfers worden op dezelfde manier bepaald zoals gegeven in vergelijking (6.12). Merk op dat de partitie $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}] : n \in \mathbb{N}_{n \geq 2}\}$ de standaard alternerende Lüroth-ontwikkeling zoals gegeven in vergelijking (6.3) geeft.

6.3 Relatie Minkowski α -functie en α -Lüroth-ontwikkeling

De reden om α -Lüroth-ontwikkelingen te introduceren is dat er een relatie bestaat tussen de Minkowski α -functie en de α -Lüroth-ontwikkeling. Bekijk hiervoor de partitie $\{(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}] : n \in \mathbb{N}_{n \geq 1}\}$ dan geldt $\frac{r_n-x}{r_n-l_n} = 2 - 2^n x$ en wordt de afbeelding $L_\alpha(x)$ gegeven door

$$L_\alpha(x) = \begin{cases} 2 - 2^n x & \text{als } x \in I_n, n \in \mathcal{D}, \\ 0 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

Laat $a_1(x) = n$ als $x \in (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$. Dan geldt voor iedere $n \geq 1$ dat

$$L_\alpha^n(x) = 2 - 2^{a_n} L_\alpha^{n-1}(x).$$

Hieruit volgt de volgende α -Lüroth-ontwikkeling voor x :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2}{2^{a_1}} - \frac{L_\alpha(x)}{2^{a_1}} \\
&= \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1}} \left(\frac{1}{2^{a_2-1}} - \frac{L_\alpha^2(x)}{2^{a_2}} \right) \\
&= \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \frac{L_\alpha^2(x)}{2^{a_1+a_2}} \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3-1}} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{a_1+\cdots+a_n-1}} + (-1)^n \frac{L_\alpha^n(x)}{2^{a_1+\cdots+a_n-1}} \\
&= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{(a_1+\cdots+a_k)-1}}.
\end{aligned}$$

De laatste uitdrukking is gelijk aan de Minkowski μ -functie zoals gegeven in Definitie 5.2.

7 Conclusie

In deze scriptie is er onderzoek gedaan naar verschillende getalsontwikkelingen. In het eerste deel werden getallen ontwikkeld met als basis $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Daarnaast is de β -ontwikkeling beschreven en tevens de verschillen tussen getalsontwikkelingen die ontwikkeld zijn met een gehele basis en een niet-gehele basis. Ieder getal $x \in [0, 1]$ kan worden opgeschreven als

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(x)}{n^k}$$

waarbij $a_k := a_k(x) \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ en $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Een β -ontwikkeling voor x wordt gegeven door

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(x)}{\beta^k}$$

waarbij $b_k := b_k(x) \in \{0, 1\}$ en $1 < \beta < 2$.

Het grote verschil tussen de beschreven getalsontwikkelingen is het aantal ontwikkelingen dat een getal $x \in [0, 1]$ kan hebben. Zo kan een getal $x \in [0, 1]$ een unieke ontwikkeling of precies twee ontwikkelingen hebben als het wordt ontwikkeld in een gehele basis, maar kan het aftelbaar of overaftelbaar veel ontwikkelingen hebben met een niet-gehele basis β .

Naast deze intuïtieve manier van getallen ontwikkelen zijn er in het tweede deel andere manieren gegeven om getallen te ontwikkelen. Er is uitleg gegeven over de kettingbreuk, α -Lüroth- en Lüroth-ontwikkeling. Vooral aan de theorie van kettingbreuken is veel aandacht besteed.

Behalve de verschillende getalsontwikkelingen zijn er ook relaties tussen deze verschillende getalsontwikkelingen gegeven. Deze relaties werden gegeven door de Cantorfunctie en de Minkowski φ -functie en hadden vergelijkbare eigenschappen. De meest belangrijke eigenschap die beide functies bezitten is de singulariteit. Dit betekent dat de functie continu is en dat de afgeleide bijna overal gelijk is aan 0. Door een bepaalde partitie te kiezen is er ook een relatie tussen de α -Lüroth ontwikkeling en de Minkowski φ -functie gegeven.

Een later doel van dit project is het ontwikkelen van lesmateriaal. Om lesmateriaal te maken moet er goed gekeken worden naar het curriculum van wat er op middelbare scholen aan wiskunde gegeven wordt. Alsmede moet het niveau van de doelgroep goed vastgesteld worden om zo het niveau van het materiaal te bepalen. Zo zal er geen gebruik worden gemaakt van maattheorie, maar zullen de leerlingen bijvoorbeeld wel de Cantorfunctie construeren.

In deze scriptie zijn relaties beschreven die al bekend zijn, maar meer in diepte worden toegelicht. Interessant voor een volgend project zal dan ook zijn om relaties tussen getalsontwikkelingen waar nog niet naar gekeken is te bestuderen.

Referenties

- [1] T. M. Apostol. *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, volume 41 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.
- [2] C. Baiocchi, V. Komornik, and P. Loreti. Cantor type functions in non-integer bases. *arXiv preprint arXiv:1605.01470*, 2016.
- [3] J. Barrionuevo, R. M. Burton, K. Dajani, and C. Kraaikamp. Ergodic properties of generalized Lüroth series. *Acta Arith.*, 74(4):311–327, 1996.
- [4] L. N. H. Bunt. *Van Ahmes tot Euclides. Hoofdstukken uit de geschiedenis van de wiskunde*. J. B. Wolters, Groningen-Djakarta, 1954.
- [5] K. Dajani and C. Kraaikamp. *Ergodic theory of numbers*, volume 29 of *Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2002.
- [6] I. Daubechies, S. Güntürk, Y. Wang, and Ö. Yılmaz. The golden ratio encoder. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 56(10):5097–5110, 2010.
- [7] O. Dovgoshey, O. Martio, V. Ryazanov, and M. Vuorinen. The Cantor function. *Expo. Math.*, 24(1):1–37, 2006.
- [8] A. Dujella. Continued fractions and RSA with small secret exponent. *Tatra Mt. Math. Publ.*, 29:101–112, 2004.
- [9] P. Erdős, I. Joó, and V. Komornik. Characterization of the unique expansions $1 = \sum_{i=1}^{\infty} q^{-n_i}$ and related problems. *Bull. Soc. Math. France*, 118(3):377–390, 1990.
- [10] J. F. Floron. A note on the history of the Cantor set and Cantor function. *Math. Mag.*, 67(2):136–140, 1994.
- [11] H. Hancock. *Development of the Minkowski geometry of numbers. Vols. One, Two*. Dover Publications, Inc., New York, 1964.
- [12] J. Havil. *Gamma*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. Exploring Euler’s constant, With a foreword by Freeman Dyson.
- [13] S. Kalpazidou, A. Knopfmacher, and J. Knopfmacher. Lüroth-type alternating series representations for real numbers. *Acta Arith.*, 55(4):311–322, 1990.
- [14] A. Ya. Khinchin. *Continued fractions*. The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1964.
- [15] J. Lüroth. Ueber eine eindeutige Entwicklung von Zahlen in eine unendliche Reihe. *Math. Ann.*, 21(3):411–423, 1883.
- [16] H. Minkowski. *Geometrie der Zahlen*. Bibliotheca Mathematica Teubneriana, Band 40. Johnson Reprint Corp., New York-London, 1968.
- [17] J. Paradís, P. Viader, and L. Bibiloni. A new light on Minkowski’s $\psi(x)$ function. *J. Number Theory*, 73(2):212–227, 1998.

- [18] J. Paradís, P. Viader, and L. Bibiloni. The derivative of Minkowski's $\varphi(x)$ function. *J. Math. Anal. Appl.*, 253(1):107–125, 2001.
- [19] A. Rényi. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 8:477–493, 1957.
- [20] R. Salem. On some singular monotonic functions which are strictly increasing. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 53:427–439, 1943.
- [21] N. Sidorov. Almost every number has a continuum of β -expansions. *Amer. Math. Monthly*, 110(9):838–842, 2003.
- [22] D. J. Struik. *Geschiedenis van de wiskunde*. Het Spectrum Utrecht, The Netherlands, 1990.
- [23] J. Wallis. *The arithmetic of infinitesimals*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer-Verlag, New York, 2004. Translated from the Latin and with an introduction by Jacqueline A. Stedall.