R.M.J. Vooys

Een blik achter de verrassend wiskundige structuur van M.C. Eschers Prentententoonstelling

Masterscriptie, verdedigd op donderdag 29 augustus 2013

Scriptiebegeleiders: B. de Smit, P. Kop
Examencommissie: H. Finkelnberg, B. Edixhoven (voorzitter)

Specialisatie: Mathematics and Education

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Voorwoord Masterscriptie

In 1956 maakte de Nederlandse kunstenaar M.C. Escher (1898-1972) *De Prentententoonstelling*. In 2000 bekeken wiskundigen H.W. Lenstra Jr. en B. de Smit deze prent vanuit een wiskundig perspectief. Ze vroegen zich af wat voor structuur er schuil gaat achter de *Prentententoonstelling*, en of er een meer bevredigende manier is om de wit gelaten vlek in het midden op te vullen. Deze vragen waren, achteraf gezien, vrij eenvoudig te beantwoorden, maar het duurde nog een paar jaar om de invulling van het witte plekje visueel te maken. Dit is gedaan met behulp van een computerprogramma gemaakt door Joost Batenburg en de invulling is getekend door de kunstenaars Hans Richter en Jacqueline Hofstra. Het project werd eindelijk voltooid in 2002, en na één persbericht kwam er een stortvloed aan aandacht van zowel Nederlandse als buitenlandse media.

De wiskunde achter *De Prentententoonstelling* is door H.W. Lenstra Jr. en B. de Smit gepubliceerd in *AMS notices* (2003) en *SIAM news* (2002). Het niveau waarop dit gepresenteerd werd is echter niet toegankelijk voor een breed, algemeen publiek. Deze masterscriptie heeft tot doel de wiskundige structuur toegankelijk te maken voor een algemener publiek. Naar verwachting zal later dit jaar (2013) het manuscript in deze masterscriptie gepubliceerd worden in de vorm van een *Zebra-boekje* (Epsilon Uitgaven). De aangenomen wiskundige voorkennis is die van een 4/5 vwo leerling, deze zal het Zebra-boekje probleemloos kunnen doorwerken. Mijn bedoeling is ook om het grotere publiek aan te spreken, zodat mensen die geen wiskundige achtergrond op vwo-niveau hebben toch het grote plaatje kunnen begrijpen.

Omdat dit document een *masterscriptie* betreft is een artikel bijgevoegd waarin op een hoger wiskundeniveau naar de prent gekeken wordt. Dit is geschreven als een wiskundige verantwoording van het manuscript.

Vooraf aan dit werk ging een onderzoek voor ‘Specialisatie’ van de lerarenopleiding Wiskunde aan het Interfacultair Centrum voor Lerarenopleiding, Onderwijsontwikkeling en Nascholing (ICLON), waar ik onderzoek deed naar de vraag ‘hoe schrijf je een boek over een wiskundeonderwerp voor algemeen publiek’. Hiervoor heb ik vooral gekeken naar manieren tot verhoging van de motivatie van de lezer om het boekje door te werken en naar manieren om het imago van de wiskunde te verbeteren door het schrijven van een boekje.

Samengevat vormt deze masterscriptie achtereenvolgens het manuscript voor de Zebra-reeks voor algemeen publiek en een artikel waarin een wiskundige verantwoording wordt gegeven.

Manuscript

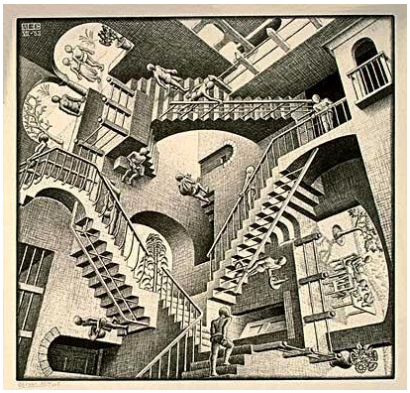
‘Een blik achter de verrassend wiskundige structuur van M.C. Eschers *Prententententoonstelling*’

Inhoudsopgave

1 Inleiding in *Prentententoonstelling* 3
1.1 De Prentententoonstelling 3
1.2 Het rooster nader bekeken 5
2 Transformaties 9
2.1 Coördinatenstelsels 9
2.2 Omzetten van cartesische coördinaten naar poolcoördinaten en omgekeerd 11
Nieuwe hoekmaat: Radialen 11
2.3 Transformatie 12
3 Complexe getallen en bewerken van plaatjes 16
3.1 Representaties in complexe vlak: complexe getallen en poolcoördinaten 17
3.2 Translatie, vergroting en rotatie in het complexe vlak 19
4 Complexe functies 20
4.1 De complexe exponentiële functie 23
4.2 De complex logaritme 23
4.3 De exponentiële afbeelding 24
4.4 Complex logaritmische afbeelding 27
5 Conforme afbeeldingen en Droste-effect 28
5.1 Conforme afbeeldingen 28
5.2 Droste-effect 29
6 De *Prentententoonstelling* complex bekeken 30
6.1 Een kloppende afbeelding 31
6.2 Toepassing exponentiële en logaritmische afbeelding 31
6.3 Een 'formule' voor de Prentententoonstelling 34
6.4 De formule achter de Prentententoonstelling 36
7 Het opvullen van de witte vlek in de *Prentententoonstelling* 37
Appendix 39
Uitwerkingen, opgaven verwezen naar [hoofdstuk].[vraagnummer] 39
Meer toelichting op enkele wiskunde concepten in dit boek 42

1 Inleiding in *Prentententoonstelling*

Nederlands kunstenaar Maurits Cornelis Escher (1938-1972) is vrij algemeen bekend om zijn werken, zoals *Metamorphose, De waterval* of *Relativiteit.*



De meeste werken zetten de kijker tot denken door het overgaan van twee naar drie dimensies, spelingen met perspectief, onmogelijke figuren of illusies. Dit zijn vrij wiskundige concepten, maar M.C. Escher was zelf geen wiskundige. Hij heeft enkel wiskunde gehad op middelbaar schoolniveau en was weinig geïnteresseerd in de formaliteiten. Dit weerhoudt wiskundigen er echter niet van om naar zijn prenten te kijken en het uit te puzzelen.

In dit boek gaan we kijken naar een werk van Escher, *Prentententoonstelling*. In dit hoofdstuk beantwoorden we eerst vragen als:

- *Wat wilde Escher in deze prent uitbeelden?*
- *Welke structuur kunnen we vinden?*
- *Kunnen we achterhalen wat er in de wit gelaten plek zou kunnen zitten?*

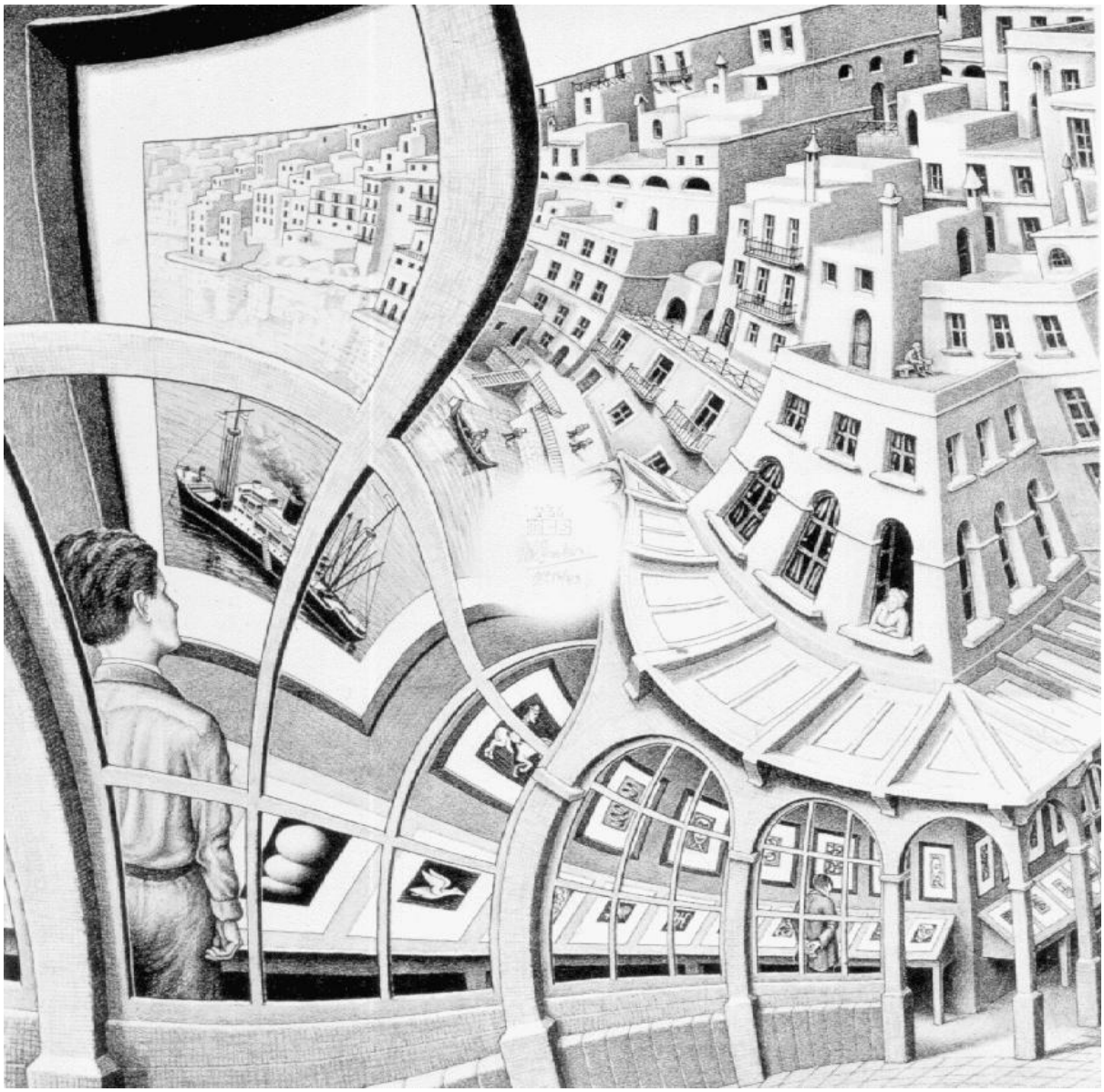
In 2000 heeft wiskundige Hendrik Lenstra naar deze prent gekeken en wilde graag een formule maken waaruit je van een normaal beeld een vervormd beeld kan krijgen zoals in *De Prentententoonstelling* en op deze manier achterhalen wat er in de wit gelaten plek moet staan. Over deze achterliggende wiskunde gaat de rest van dit boek. Na het lezen van dit boek weet je onder andere meer over hoe je als wiskundige naar een prent zou kunnen kijken, hoe de transformatie van de ene afbeelding naar een andere afbeelding beschreven kan worden en hoe je werkt met complexe getallen en functies op het complexe vlak.

Om te helpen bij het doorwerken van dit boekje en het goed begrijpen van de nieuwe begrippen worden ook korte opgaven en voorbeelden gegeven. Je wordt aangemoedigd deze rustig voor jezelf uit te werken. Als je er niet uit komt is dat niet erg, achterin dit boekje staan korte uitwerkingen.

1.1 De Prentententoonstelling

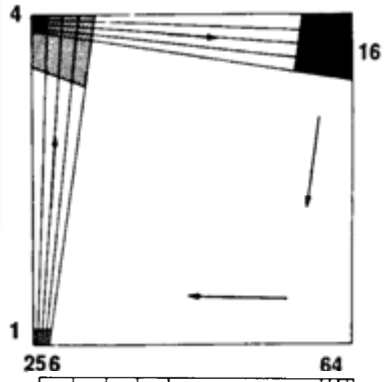
Kijk naar de *Prentententoonstelling* op de bladzijde hiernaast. We gaan de prent af en beschrijven wat we zien van linksonder met de klok mee rond de witte vlek.

- *Linksonder naar linksboven*: Een man staat in een prentengallerij en kijkt naar een schilderij. Op dit schilderij zien we een schip langs een kust met gebouwen.
- *Linksboven naar rechtsboven*: De gebouwen treden langzaam uit het schilderij, aan de meest rechter zijde is het niet langer duidelijk dat de gebouwen deel zijn van de schilderij.
- *Rechtsboven naar rechtsonder*: In een van de gebouwen kijkt een vrouw uit het raam, welke zich recht boven het dak bevindt van een prentengallerij.
- *Rechtsonder naar linksonder:* Van buiten kijken we een prentengallerij in, en links zien we weer de man staan die naar een schilderij kijkt.

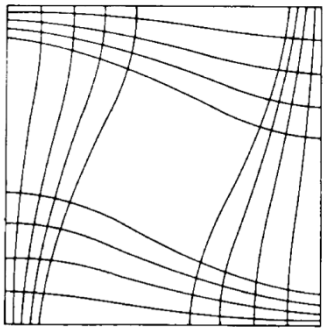


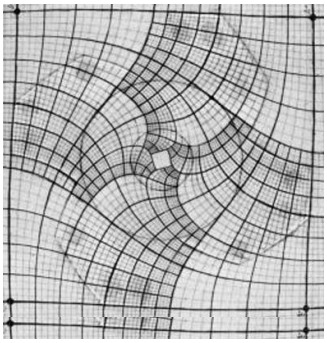
Het plaatje is nu rond en we zouden weer helemaal opnieuw kunnen beginnen: Man kijkt naar schilderij met gebouwen dat een prentengallerij bevat waarin een man staat die kijkt naar een schilderij enzovoorts. Escher wilde namelijk een cirkelvormige expansie zonder begin of einde creëren. Dit zien we goed terug als we met de klok mee lopen vanuit de man: hij begint als toeschouwer van een schilderij, maar blijkt zelf onderdeel uit te maken van de schilderij.
In het midden van de prent zien we een witte plek, met de handtekening van Escher. De reden voor deze vlek is niet helemaal duidelijk. Een mogelijke reden is dat de details rond het midden van de vlek zo klein zouden zijn dat het onmogelijk was om door te gaan. Of dat het doel van de prent was bereikt (cirkelvormige expansie) en Escher ook niet precies wist hoe het midden opgevuld moest worden en het daarom maar open heeft gelaten.
Maar er kan nog een diepere reden zijn, en dat was in het jaar 2000 voor wiskundige Hendrik Lenstra de reden om te onderzoeken of Escher misschien op een wiskundig probleem stuitte waardoor hij de prent niet netjes af kon maken.
Om dit te onderzoeken moeten we eerst weten *hoe* Escher deze cirkelvormige expansie heeft ontwikkeld. Kijk nog eens terug naar de prent. De expansie is goed zichtbaar als je kijkt naar de ramen van het gebouw van de prentengalerij rechtsonder naar linksonder. Als we aannemen dat de ramen in de galerij normaal gesproken even breed zijn, worden ze in de vervorming drie keer zo groot.

Als eerste poging maakte Escher een rooster zoals hiernaast met rechte lijnen. Ga je van linksonder naar linksboven wordt een vierkantje 4 keer groter, en ga je dan een heel rondje maak je een vergroting van 4x4x4x4=256 mee.



Een van de meest kenmerkende eigenschappen van de prenten van Escher is dat het totaalplaatje, ondanks de vervormingen, nog steeds 'normaal' lijkt te zijn. In *De Toverspiegel van M.C. Escher* schreef Bruno Ernst, wie Escher persoonlijk kende, het volgende: "*Escher probeerde aanvankelijk het idee met rechte lijnen te verwenzenlijken. Intuïtief kwam hij echter tot de gebogen lijnen. De oorspronkelijke vierkantjes blijvan dan ook beter 'vierkant'.*" Zie de figuren hiernaast. De vervorming werd veel te sterk in zijn eerste poging. Bij de tweede poging introduceerde Escher gekromde lijnen. Alle lijnen snijden elkaar onder nagenoeg rechte hoeken, zoals in een normaal rooster, maar toch is het hele plaatje duidelijk vervormd. Wiskundig zeggen we dat de afbeelding *conform* moet zijn, de hoeken blijven na vervorming gelijk. In het onderste plaatje hiernaast is dit goed te zien. Dit concept bekijken we in een volgend hoofdstuk in meer detail.



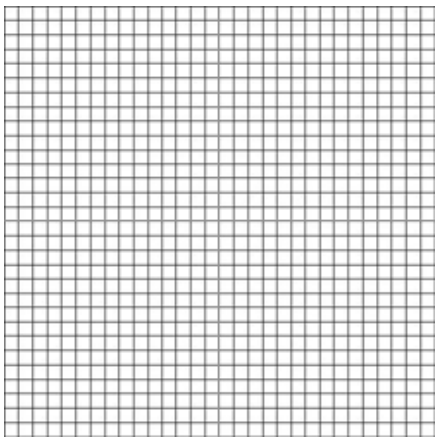


Gelukkig voor ons zijn de bouwtekeningen van Escher goed bewaard gebleven en het achterliggende rooster van de *Prentententoonstelling* is te zien in de figuur hiernaast. Het meest bijzondere aan dit rooster is dat het volledig met de hand gemaakt is. Vanaf het moment dat hij dit rooster had ontwikkeld hoefde Escher enkel nog de hokjes in te tekenen om van een normaal plaatje naar een vervormd plaatje te gaan. Escher maakte vier delen van een onvervormde versie van de *Prentententoonstelling*. Elk deel is 4 keer groter dan het andere. Deze studies moeten elkaar deels overlappen in het vervormde rooster. Elke studie tekende Escher hokje voor hokje in het vervormde rooster om zo *De Prentententoonstelling* te krijgen, een cyclische expansie zonder begin of eind.

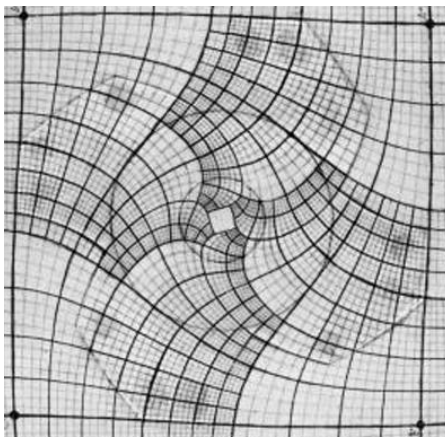
1.2 Het rooster nader bekeken

Het rooster dat Escher heeft ontwikkeld geeft wiskundigen veel informatie over de achterliggende structuur. Het doel is om een formule te ontwikkelen die van een normaal recht rooster het vervormde rooster van Escher maakt.

We maken vanaf nu onderscheid tussen twee werelden: de normale, rechte wereld met een 'recht rooster' en de vervormde wereld met een 'Escherrooster', zie hieronder.



Recht rooster voor normale, rechte wereld

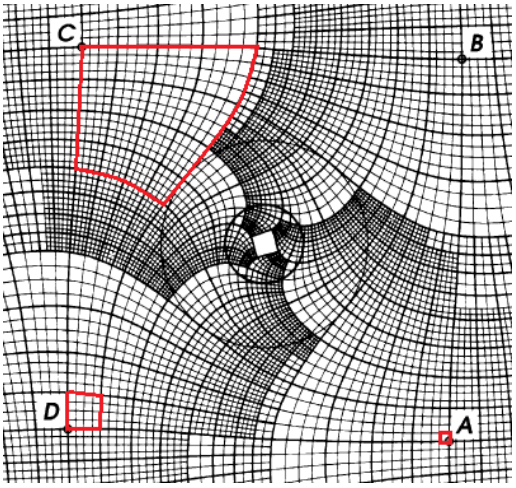


Escherrooster voor vervormde wereld

We gaan twee wandelingen maken in beide roosters: één rond de witte vlek en één buiten de witte vlek. In de rechte wereld geldt dat als je 4 even grote stappen naar voren, naar rechts, naar achteren en naar links neemt je op exact hetzelfde punt terugkomt. We zeggen dat het pad gesloten is: het eindpunt valt samen met het beginpunt.

Eerste wandeling: om de witte vlek

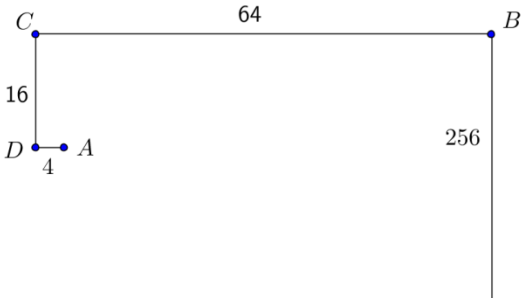
Kijk nu naar de bovenste figuur hiernaast. We lopen eerst het rondje met klok mee vanuit *A: A-D-C-B-A.* In het Escherrooster is het pad gesloten. Bij *A* is een klein rood vierkantje getekend, gaan we richting *D* zien we dat dit vierkantje 4 maal vergroot wordt. Zo ook van *D* naar *C*. Dit is de cyclische expansie van Escher. In de rechte wereld betekent dit dat de afstand van *A* naar *D* niet een vaste lengte heeft, maar onderweg steeds langer wordt. De stapgrootte van *A-D* is dus niet 1, maar 4. Zijde *DC* is daardoor ook 4 maal zo lang als zijde *AD*. Je loopt in de rechte wereld niet een rondje, maar in een spiraal, zie de tweede figuur. In de expansie is het eindpunt dus 4x4x4x4=256 maal verder weg. Lopen we de wandeling in omgekeerde richting, maken we juist een verkleining mee.



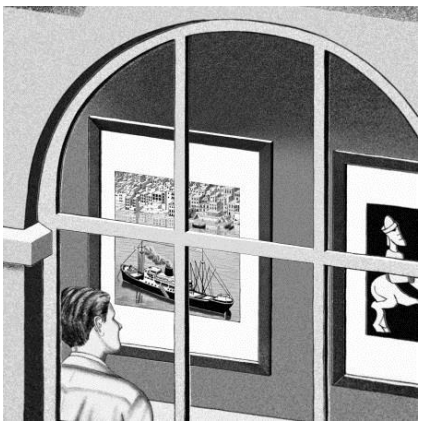
Een wandeling ABCDA in het Escherrooster is gesloten ...

Het Droste-effect

In het Escherrooster vallen het beginpunt en eindpunt wel samen, de man in de *Prentententoonstelling* ziet zichzelf in de schilderij terug, maar wel 256 maal verkleind. In de onvervormde versie van de *Prententoonstelling* zal dus een 256 verkleinde man te zien zijn. Dit effect noemen we het Droste-effect, vernoemd naar de cacaopoeder producent Droste, nog steeds in de winkel te vinden. Op het pak zie je een vrouw met een pak Droste cacaopoeder in haar handen, waarop een vrouw staat afgebeeld met een pak Droste cacaopoeder, enzovoorts. Dit effect zie je ook terug in de afbeelding hieronder, echter is de verkleining zo sterk dat dat niet met blote oog te zien is.

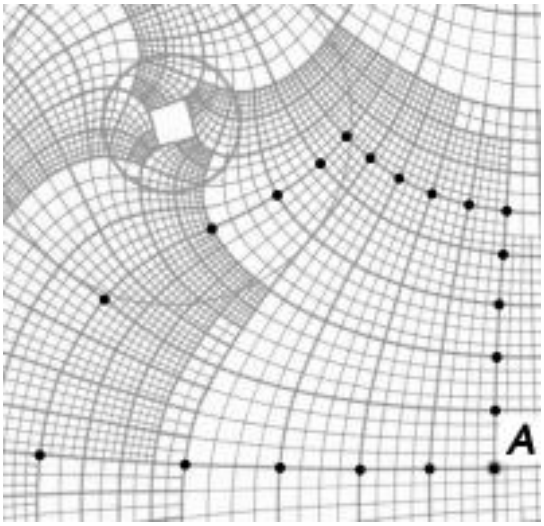


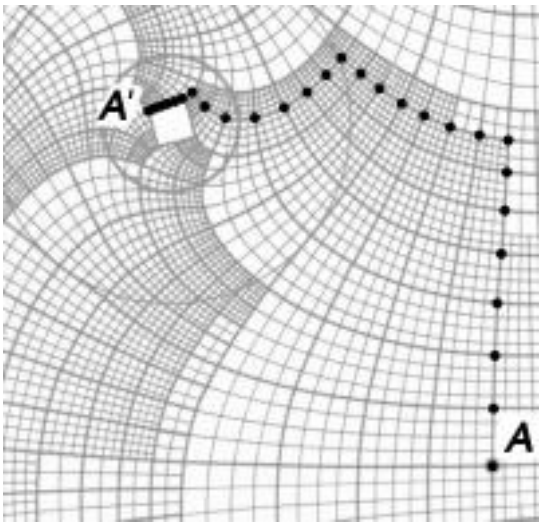
... maar in de rechte wereld is dat pad niet gesloten, maar een spiraal!



Als je 256 maal inzoomt rond het midden, zal je weer de man zien die kijkt naar de schilderij

Tweede wandeling: buiten de witte vlek
We gaan nu een rondje maken *buiten* de witte vlek. Zie de figuur links. We beginnen in punt *A* en gaan lopen in een (vervormd) vierkantje van 5 bij 5 hokjes. We lopen eerst naar boven, de stapgroottes (afstand tussen de stippen) worden een beetje kleiner vanwege de cyclische expansie. Gaan we na vijf stappen naar links worden de stapjes echter weer groter. Uiteindelijk komen weer in het zelfde punt uit, zowel in de Escherwereld als in de normale wereld.

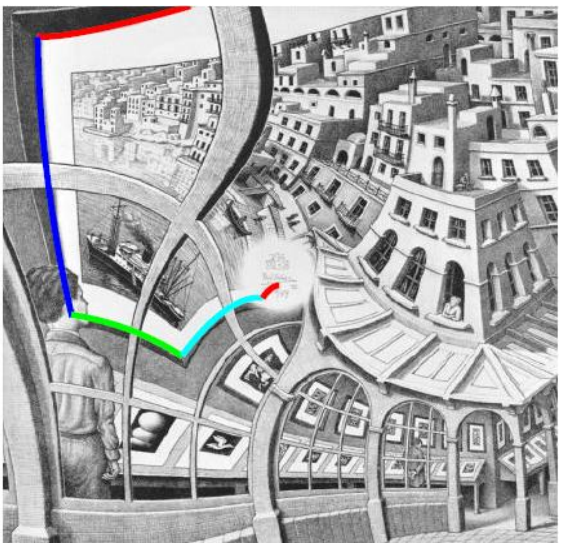




Kijk nu naar de figuur rechts, we maken nu een wandeling van 7 bij 7 hokjes. Bij de derde bocht kom je een sterke afbuiging tegen. Hierdoor komen we nu aan de rand van het kleine witte vierkantje uit, bij punt *A'*. In de normale wereld moet het rondje gesloten zijn, maar in de Escherwereld is deze niet gesloten. Punt *A* en punt *A'* moeten hetzelfde zijn. Als Escher iets rond punt *A* tekent, zou je redeneren dat dit ook in punt *A'* getekend moet worden. Maar in de originele prent zie je dit niet terug: punt *A'* moet zich dus in de witte vlek bevinden!

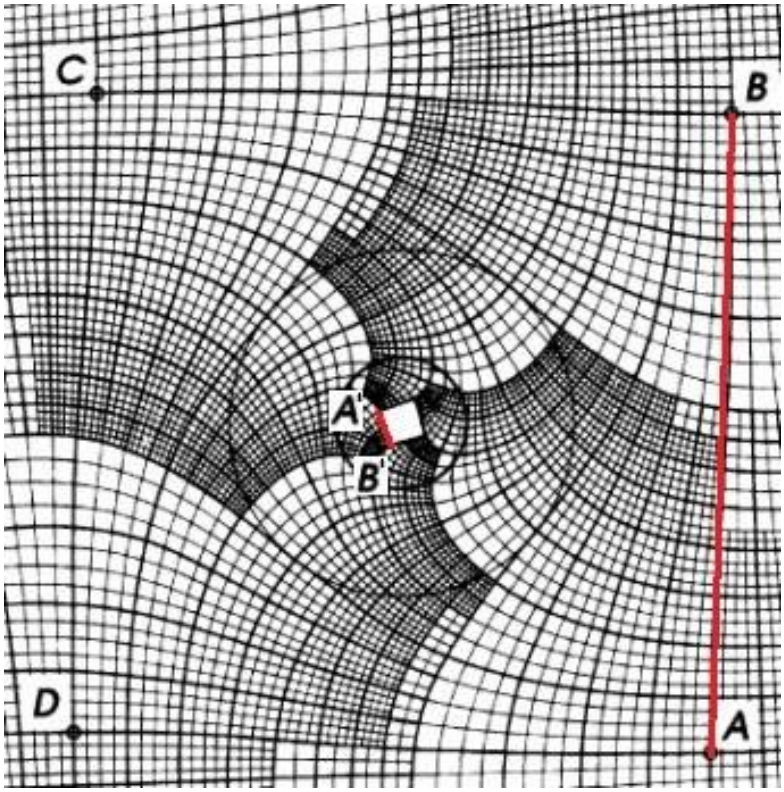
Wat betekent dit voor de andere objecten in de *Prentententoonstelling*? Zie de figuur onderaan deze pagina. De omlijsting van het schilderij heeft in de normale wereld 4 zijdes en vormt een gesloten pad. Maar in de prent zien we dat de vierde hoek niet is getekend, de bovenste rode rand sluit niet aan bij de lichtblauwe rand. De aansluiting vindt dus plaats in het witte gat, aangegeven met een kleine rode lijn.

OPGAVE 1.1
Ga zelf ook een aantal wandelingen uitproberen. Kies een punt op de zijde *AB* en zelf een stapgrootte. Ga na dat je soms weer terugkomt op je startpositie, en soms uitkomt langs het kleine witte vierkantje in het midden. Let op: in het midden wordt het heel klein, waardoor aflezen lastig wordt.



In de vorige opgave heb je zelf na kunnen gaan dat er vanuit elk punt op zijde *AB* een wandeling bestaat welke op de zijde *A'B'* uitkomt, dit is in de figuur hieronder met een rode lijn aangegeven. Objecten die Escher tekent in de buurt van zijde *AB* moet ook, verkleind en geroteerd, getekend worden langs *A'B'*.

OPGAVE 1.2
Ga door meten na dat zijde *A'B'* ongeveer 22,5 keer kleiner is dan *AB,* en geroteerd is onder een hoek van ongeveer 157° rond het middelpunt van het witte vierkantje.



We kunnen dit proces herhalen voor de andere zijdes *BC, CD* en *DA*. Wat blijkt is dat het vierkant *ABCD* zich in het kleinere vierkantje *A'B'C'D'* terecht komt. Alles wat zich *binnen ABCD* bevindt moet zich dan ook binnen *A'B'C'D'* bevinden. De prent zou dus in het midden een verkleinde én geroteerde versie van zichzelf bevatten.

De bovenstaande bevindingen kunnen we als volgt samenvatten:

- Het Escherrooster is een conform rooster, dat wilt zeggen dat de roosterlijnen elkaar loodrecht snijden. Dit volgt uit de quote van Bruno Ernst.
- Een gesloten rondje rond het midden (de witte vlek) zorgt voor een vergroting in rechte wereld met factor 256.
- De witte vlek bevat een verkleinde en verdraaide versie van de prent (ongeveer factor 22,5 kleiner en hoek van ongeveer 157°).

Deze drie bevindingen hebben we alleen opgemerkt door goed te kijken naar het rooster van *De Prentententoonstelling*. Passen we dit toe op de prent zouden we een opgevulde versie kunnen maken. We hebben tot nu toe echter niets *precies* gedaan om dit netjes te doen.

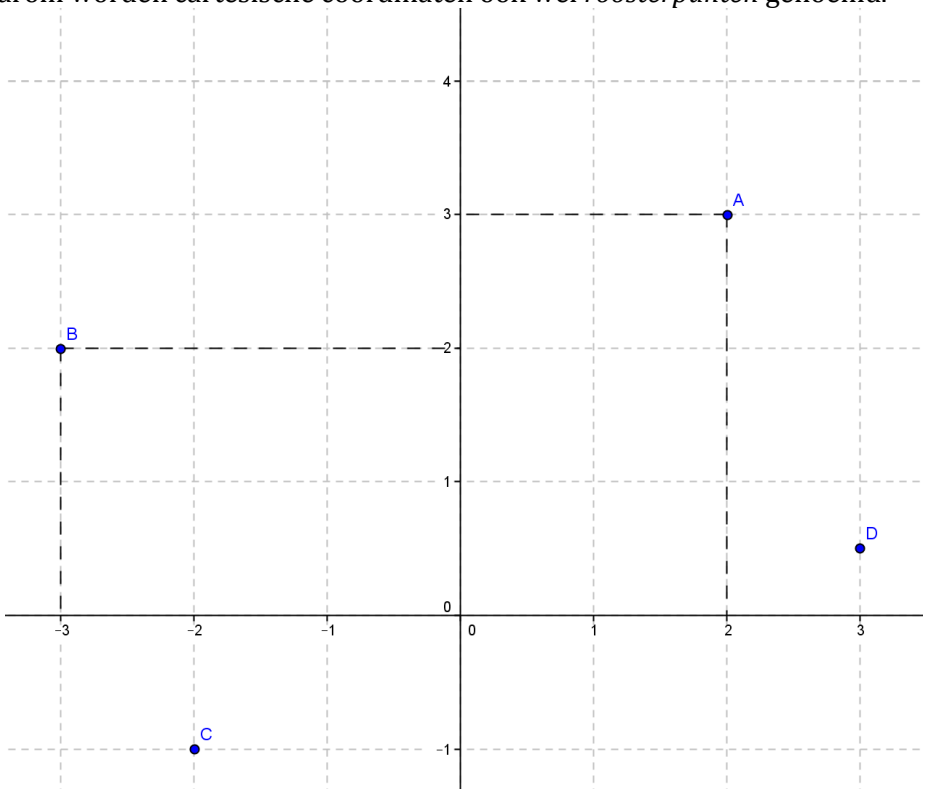
De vraag voor de rest van dit boekje luidt: hoe maken we vanuit een rechthoekig rooster een Escherrooster dat aan bovenstaande drie eisen voldoet?

2 Transformaties

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat het probleem met de witte vlek in *De Prentententoonstelling* op te lossen is als we een formule weten te construeren waarmee we van een 'normale' afbeelding naar een vervormde afbeelding kunnen gaan. Een dergelijke overgang noemen we een transformatie. Een alledaags voorbeeld is een spiegel. Kijk je in de spiegel zie je jezelf gespiegeld, links is vervangen door rechts en rechts vervangen door links. Maken we een kromming in de spiegel zoals de lachspiegels op de kermis, is jouw spiegelbeeld ook vervormd. Als je niet weet hoe je er uit ziet, maar wel precies weet hoe deze krommingen in de spiegel tot stand zijn gekomen kan je in principe van daar uit een rechte spiegelbeeld creëren, waaruit je kan herleiden hoe je er in werkelijkheid uit ziet. Dit is in principe wat we gaan doen met het Escherrooster. Om dit te doen hebben we een aantal nieuwe concepten nodig, in dit hoofdstuk maken we een begin met enkele transformaties. Daarvoor is het nodig om te kunnen wisselen tussen verschillende coördinatenstelsels.

2.1 Coördinatenstelsels

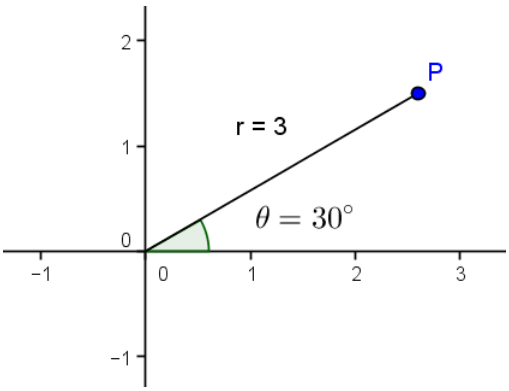
Om een plaatje te kunnen beschrijven moeten we eerst vastleggen hoe we elk punt aan kunnen wijzen. Dit doen we aan de hand van zijn *coördinaten*. Er zijn verschillende manieren om dat te doen, we geven hier twee voorbeelden van. Het meest gebruikte coördinatenstelsel is het zogeheten cartesisch rooster. Je bepaald de positie van een punt in het vlak aan de hand van de afstand tot twee op elkaar loodrecht staande assen (de *x-as* en de *y*-as). In de figuur hieronder zit punt *A* op afstand 2 naar rechts van de verticale as en 3 boven de horizontale as en heeft daarom coördinaten (2,3). Op soortgelijke manier geven we *B* de coördinaten (-3,2). Door met stippellijnen langs de assen horizontaal en verticaal te trekken verdeel je het hele vlak in een rooster. Daarom worden cartesische coördinaten ook wel *roosterpunten* genoemd.



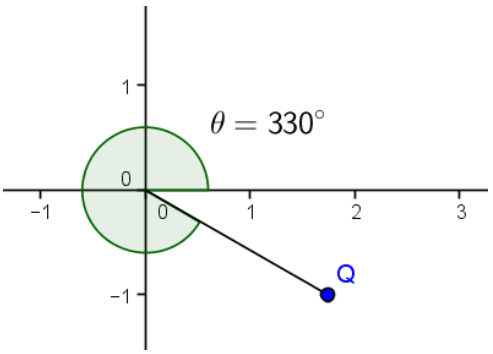
OPGAVE 2.1

Geef de cartesische coördinaten van punt C en D, en die van de oorsprong.

Er is nog een andere manier om punten in het vlak aan te geven, namelijk met *poolcoördinaten*. We gebruiken hier weer de assen zoals in het cartesische rooster, met oorsprong, maar in plaats van aan te geven hoeveel naar rechts en hoeveel naar omhoog een punt zich van de oorsprong bevindt, bekijken we zijn *afstand* r tot de oorsprong en de *hoek* θ die de lijn tussen het punt en de oorsprong maakt met de horizontale as. De coördinaten worden genoteerd als (r, θ). Zie voorbeeld in de figuur hiernaast: punt P bevindt zich op een afstand 3 van de oorsprong en de lijn met de oorsprong maakt een hoek van 30°. We noteren dit als (3, 30°).



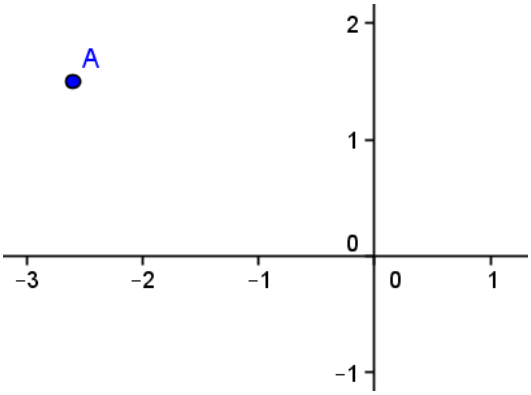
Maken we een heel rondje, een hoek van 360°, komen we op exact hetzelfde punt uit. Punt P heeft dan hoeken 30°, 390°, 750° en zo kan je oneindig door gaan. Om één coördinaat aan punt P te geven spreken we daarom af dat we de hoeken waarden aannemen in het interval $[0°, 360°)$. We beginnen de hoek bij 0° ten opzichte van de positieve kant van de horizontale as en wordt positief als we tegen de klok in de hoek laten toenemen. Daarom geven we punt Q in de figuur hiernaast een hoek van 330° en niet $-30°$.

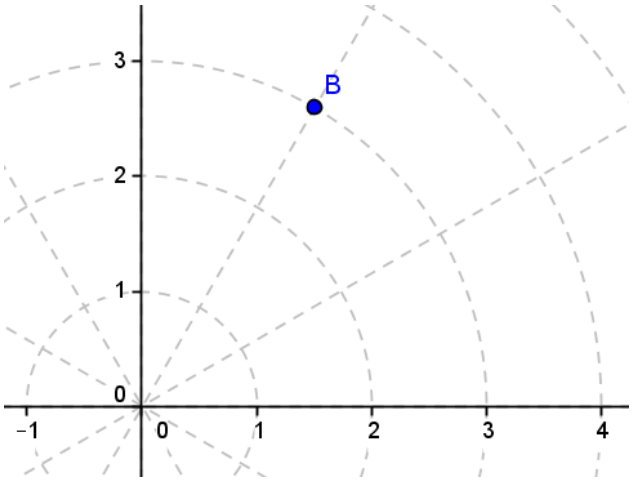


In de figuren hierboven hebben we nog steeds de getallenlijnen gebruikt zoals bij de cartesische coördinaten, maar het is niet goed af te lezen wat de poolcoördinaten zijn van de punten: je moet zelf de afstand tot de oorsprong moeten meten en de hoek met een geodriehoek bepalen. Daarom is het handiger om met een *poolrooster* te werken. Deze is verdeeld in cirkels en lijnen vanuit de oorsprong. De straal van de cirkels geven de afstand tot de oorsprong aan. De lijnen zijn de hoeken ten opzichte van de horizontale as. Zie de volgende opgave voor het verschil.

OPGAVE 2.2

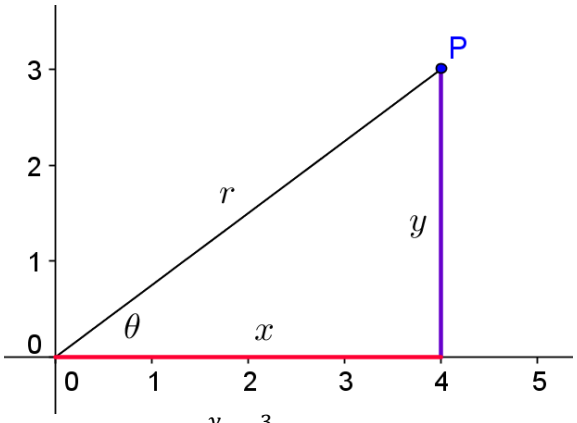
Hieronder zie je twee figuren. Geef de poolcoördinaten van punten A en B. Voor A heb je een geodriehoek met hoeken nodig, B kan je vrijwel direct aflezen.





2.2 Omzetten van cartesische coördinaten naar poolcoördinaten en omgekeerd

Het is ook mogelijk om direct vanuit het cartesisch coördinatensysteem de poolcoördinaten te berekenen. Kijk naar de figuur. Stel we hebben van een punt P in een cartesisch rooster de coördinaten gevonden: (4,3). We willen nu weten wat de poolcoördinaten van P zijn. We hebben te maken een rechthoekige driehoek met rechte zijden van lengte x en y. Voor P geldt dus $x = 4$ en $y = 3$. Omdat de schuine zijde r de afstand van P is tot de oorsprong, zien we met behulp van de Stelling van Pythagoras dat $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. En met goniometrie zien we dat, met x als aanliggende zijde (rood) en y als overstaande zijde (blauw), voor de hoek geldt: $\tan(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$, ofwel $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36{,}9°$. De poolcoördinaten van P wordt dus gegeven door $(5, 36{,}9°)$.



Dus gegeven de cartesische coördinaten (x, y) van een punt kunnen we de poolcoördinaten in het algemeen bepalen met de formules:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Dit noemen we een *coördinatentransformatie.*

We kunnen ook de andere kant op: als de poolcoördinaten (r, θ) van een punt gegeven zijn, zien we met goniometrie (r is de schuine zijde in de driehoek, ga zelf na):

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

OPGAVE 2.3

Reken de volgende coördinaten om naar het andere coördinatenstelsel (rond af op 1 decimaal):

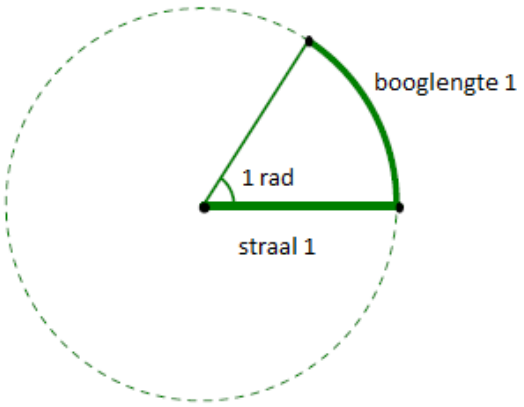
$(x, y) = (3{,}4)$ $\quad (r, \theta) = (?, ?)$ $\quad (r, \theta) = (2{,}40°)$ $\quad (x, y) = (?, ?)$

$(x, y) = (-4{,}1)$ $\quad (r, \theta) = (?, ?)$ $\quad (r, \theta) = (4, 125°)$ $\quad (x, y) = (?, ?)$

Nieuwe hoekmaat: Radialen

In dit hoofdstuk hebben we de hoeken gemeten in graden, maar er is ook een andere manier om hoeken te definiëren: de *radiaal*.

Neem een eenheidscirkel, dat is een cirkel met straal 1. De hoek vanuit het middelpunt is *1 radiaal* als de booglengte gelijk is aan 1. Zie figuur hiernaast.



Een volledig rondje is 360°, met hoeveel radialen komt dat overeen? De omtrek van de cirkel is 2π. Dus we kunnen zeggen dat 360° overeenkomt met 2π radialen. Dus 1 radiaal komt overeen met $\frac{360}{2\pi} = 57.7°$.

OPGAVE 2.4: reken om van graden naar radialen en andersom (rond af op 1 decimaal)

$\frac{1}{2}\pi$ rad = $\quad$ °

30° = $\quad$ rad

$\frac{7}{6}\pi$ rad = $\quad$ °

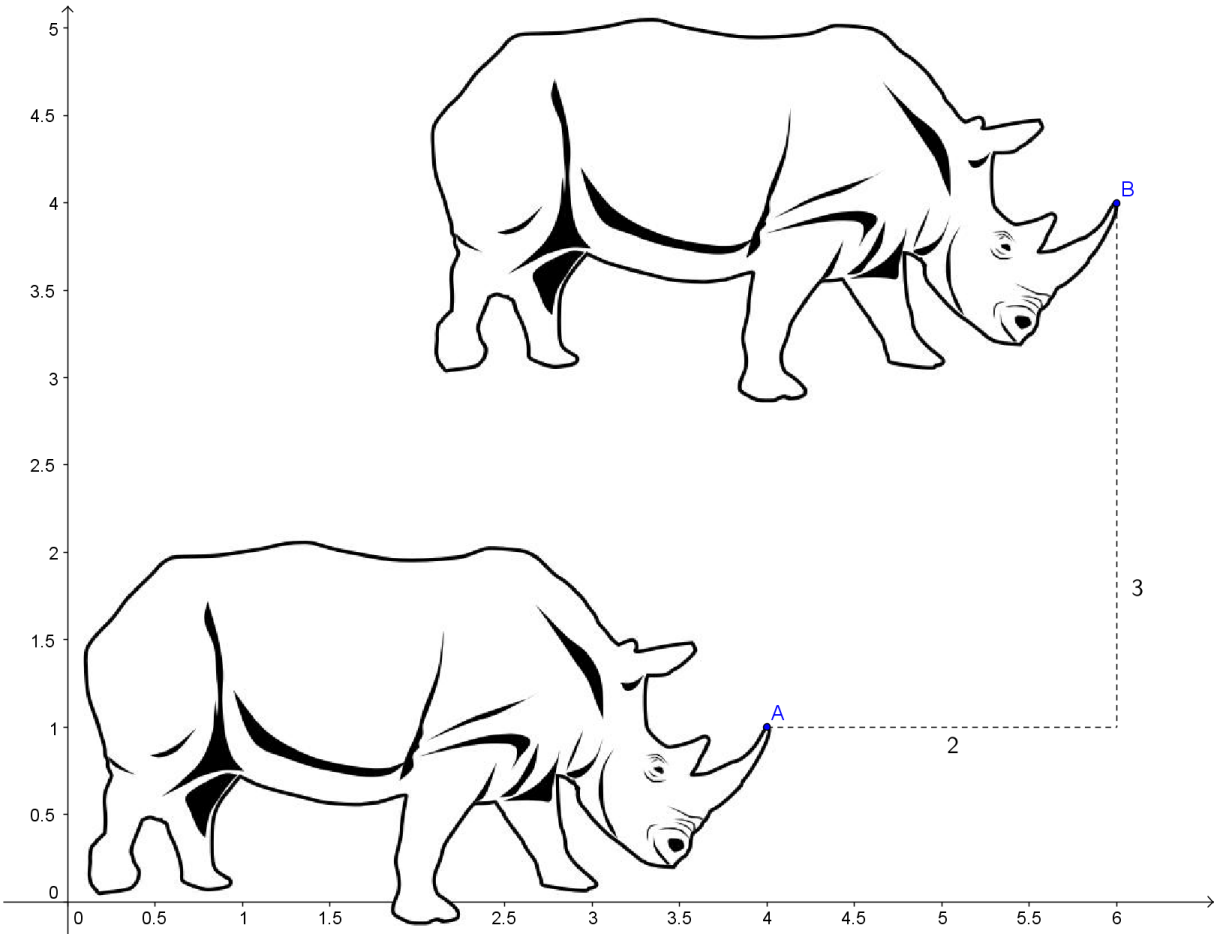
120° = $\quad$ rad

2.3 Transformatie

Het poolrooster en cartesisch rooster zijn beiden niet geschikt om punten in *De Prentententoonstelling* aan te geven. Escher heeft immers zelf een rooster gemaakt. Escher tekende eerst het plaatje in een rechthoekig rooster (cartesisch rooster) om het daarna met behulp van zijn zelfgemaakte rooster te vervormen. De overgang van het 'rechte' plaatje naar het vervormde plaatje is een transformatie.
In deze paragraaf bekijken we drie transformaties: *translatie, rotatie en vergroting*.

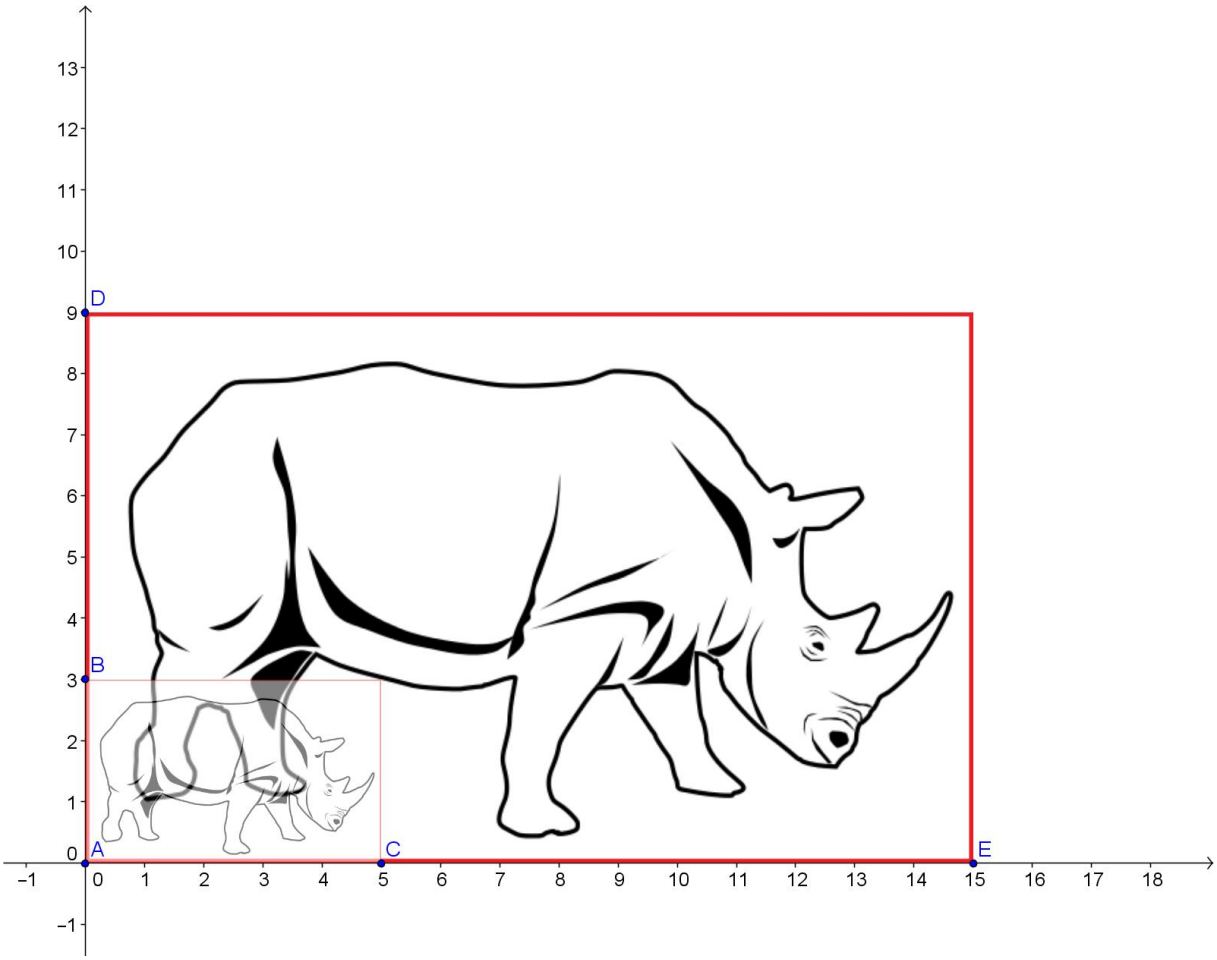
Translatie

Een translatie is een transformatie waarbij we, simpel gezegd, een plaatje op een andere plek verschuiven in het vlak. Stel: we willen de neushoorn in de figuur hieronder 2 naar rechts en 3 omhoog verplaatsen. Dan moeten we elk punt van de neushoorn dus 3 omhoog en 2 naar rechts plaatsen. Dat noteren we als volgt: $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 3)$. De coördinaten van het punt *A,* (4,1) in de figuur, wordt dus naar *B* (4+2,1+3)=(6,4) verplaatst ofwel *getransleerd*. Aan het einde van deze paragraaf wordt deze notatie verder toegelicht.



Vergroting/verkleining

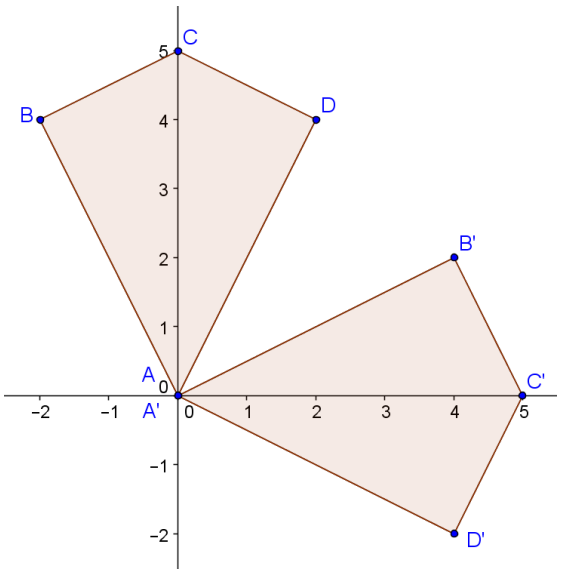
We willen nu de neushoorn 3x vergroten, voor het gemak plaatsen we een rechthoek om de neushoorn. Zie de figuur op de volgende pagina. De rechthoek is 5 cm bij 3 cm, vergroot wordt deze 15 cm bij 9 cm. Kijk wat er gebeurt met punt *B*, coördinaat (0,3). Bij de vergroting wordt deze naar *D* (0,9) verplaatst. Punt *C* op de x-as wordt van (5,0) naar *E* (15,0) gebracht. Alle coördinaten lijken te voldoen aan de formule $(x, y) \rightarrow (3x, 3y)$. In het algemeen als we een *vergroting van waarde N* willen hebben, dan is de transformatie $(x, y) \rightarrow (Nx, Ny)$.



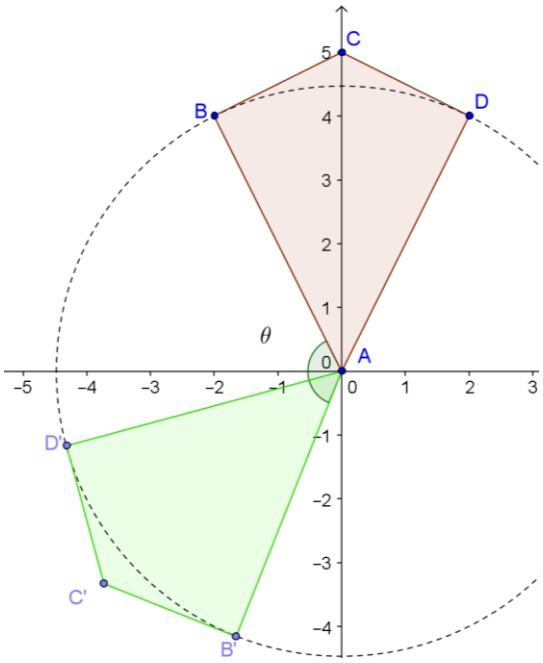
We kunnen ook slechts in één richting vergroten of verkleinen, bijvoorbeeld alleen horizontaal. Stel: we willen van het rechthoek met de neushoorn hierboven een vierkant maken waarbij we de horizontale zijdes van 5 cm naar 3 cm brengen. Met de *y*-coördinaten verandert er niets, maar de *x-coördinaten* worden met een factor $\frac{3}{5}$ vermenigvuldigd. De transformatie is $(x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{5}x, y\right)$.
Een *combinatie* van vergroten in horizontale richting en verkleining in verticale richting is ook mogelijk: $(x, y) \rightarrow (4x, \frac{1}{2}y)$ maakt een figuur 4x breder en 2x kleiner.

OPGAVE 2.5
Geef de transformatie bij een vergroting van een factor 2 in verticale richting en een vergroting van een factor 1/6 in horizontale richting.

Rotaties / draaiingen
Stel: we willen de vlieger hieronder een kwartslag rechtsom draaien, het onderste puntje van de vlieger zit in de oorsprong. We moeten dan de volgende verplaatsingen maken:
Punt A ligt op de oorsprong en blijft op zijn plek, A'.
Punt B $(-2,4)$ gaat naar B' $(4,2)$.
Punt C $(0,5)$ gaat naar C' $(5,0)$.
Punt D $(2,4)$ gaat naar D' $(4,-2)$
Het ziet er naar uit de translatie gelijk is aan $(x, y) \rightarrow (y, -x)$ (controleer dit voor elk voor de 4 punten).



Dit was een rotatie 90° rechtsom. Wat gebeurt er eigenlijk bij een rotatie rond de oorsprong met een willekeurige hoek? We bekijken wat er gebeurt met punt B van de vlieger als we rond A willen draaien onder een hoek van θ.
Punt B ligt op afstand r van A. Maken we een rotatie rond het punt A, dan verandert de afstand tot het draaipunt niet. Denk aan draaimolen; hoewel je zelf van plaats verandert, verandert je afstand tot het middelpunt van de draaimolen niet. De hoek waarover we draaien is θ. Wat er dus gebeurt is dat punt B in een cirkelboog rond het punt A wordt gebracht tot er een hoek ter grootte van θ is gelopen. In het plaatje hiernaast staat B' een hoek θ verder weg, en alle andere punten ook. De groene vlieger is een hoek θ gedraaid ten opzichte van zijn beginpositie.



Om met rotaties te *rekenen* en een transformatieformule op te stellen is het handiger om over te gaan op *poolcoördinaten*. We plaatsen de oorsprong op het draaipunt. De transformatie voor een rotatie rond het middelpunt met hoek α wordt dan:
$(r, \theta) \rightarrow (r, \theta + \alpha)$
In het voorbeeld had punt C de poolcoördinaten (5,90°). Na een draaihoek van 115° staat C' dan op (5, 205°).

We hebben het in het vorige hoofdstuk over omzettingen tussen coördinatenstelsels gehad. Om van poolcoördinaten naar cartesische coördinaten te hebben we de volgende formules:
$(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Hier is $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.

De transformatie voor rotatie onder hoek α kan ook in cartesische coördinaten geschreven worden als:

$$(x, y) \rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \alpha\right), \sqrt{(x^2 + y^2)}\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \alpha\right)\right)$$

Deze formule ziet er behoorlijk complex uit als je dat vergelijkt met $(r, \theta) \rightarrow (r, \theta + \alpha)$. Nu zie je een reden waarom het handig kan zijn om over te gaan naar een ander coördinatenstelsel.

Over de notatie
In deze paragraaf hebben we de notatie $(x, y) \rightarrow (\ldots, \ldots)$ geïntroduceerd. Deze lees je als volgt: gegeven de coördinaten (x, y), plaats deze naar het volgende punt $(\ldots, \ldots)$. Op de puntjes staat dan het recept waar dit punt heengebracht moet worden. We hebben hierboven het recept gegeven voor vergroting/verkleining, translatie en voor draaiing. Bij draaiing bleek het handiger te zijn om over te gaan op poolcoördinaten: $(r, \theta) \rightarrow (r, \theta + \alpha)$. Hier staat in woorden "Neem het punt met coördinaten (r, θ)en breng deze naar de coördinaten $(r, \theta + \alpha)$."

Hoeveel verschillende transformaties zijn er? In principe oneindig veel. Je mag namelijk helemaal zelf bepalen wat je in de … plaatst. Dit zal af kunnen hangen van zowel x als y. We hebben de 3 meest voorkomende transformaties laten zien als inleiding, maar je kunt zelf andere functies van x en y maken.
Zo is $(x, y) \rightarrow (x^2 - 3xy + 18, y^x)$ een prima transformatie. Zo wordt het punt (2,3) na invullen verplaatst naar (4,8) en dit kan je zelf uitwerken voor allerlei andere punten. Het resultaat van deze transformatie is echter een stuk lastiger met woorden te omschrijven

Zoals je bij rotaties hebt kunnen zien, kunnen de transformaties er vrij snel ingewikkeld uit zien in cartesische coördinaten. Het rekenen werd eenvoudiger door de keuze van poolcoördinaten. Voor de prent van Escher zijn we op zoek naar transformatie van een normaal rechthoekige rooster naar het Escherrooster waar dingen geroteerd en vergroot worden en een Droste-effect optreedt.
Zowel in cartesische als in poolcoördinaten zullen we dit Escherrooster niet kunnen maken, dus we presenteren een *andere* manier die heel erg lijkt op wat we tot nu toe hebben gezien.

In het volgende hoofdstuk gaan we een nieuw concept introduceren: het zogeheten complexe vlak. Dit is niet veel anders dan een nieuw coördinatensysteem met nieuwe manieren van rekenen, waardoor het uitwerken van het Escherrooster een stuk eenvoudig wordt. Dit concept is nieuw, daarom wordt er dieper op ingegaan. Alles wat in de komende paar paragrafen aan de orde komt gaan we direct toepassen op de *Prentententoonstelling.*

3 Complexe getallen en bewerken van plaatjes

We kennen de volgende verzamelingen getallen:

- De gehele positieve getallen: zoals 1, 2, 3, 4
- De gehele getallen (dus ook negatief): zoals -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3
- De breuken, ofwel rationale getallen: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$
- De rest van de getallenlijn, ofwel niet-rationale getallen: $\sqrt{2}, \pi, \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, …

Niet-rationale getallen zijn getallen die niet als breuk te schrijven zijn.
De bovenstaande verzameling getallen vormen samen de 'getallenlijn', ook wel de reële getallen genoemd, vaak aangeduid met het symbool $\mathbb{R}$.

In de vorige hoofdstukken hebben we plaatjes bekeken op een vlak, bijvoorbeeld het cartesisch rooster en het poolrooster. Het cartesisch rooster was handig voor de transformaties als translatie en vergroting, het poolrooster was juist handiger voor rotatie. We zullen in dit hoofdstuk een nieuw vlak definiëren met speciale regels voor optellen en vermenigvuldigen van punten. Dit vlak heet het *complexe vlak*.

Het complexe vlak is hetzelfde als het reële vlak. In het complexe vlak gaan we punten *vermenigvuldigen* en *optellen*.

Laat (a, b) en (c, d) twee punten zijn in het complexe vlak. Dan definiëren we

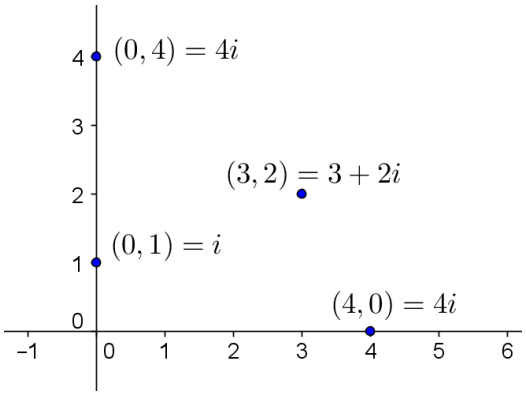
- Optellen: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- Vermenigvuldigen $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

De optelling lijkt logisch, gewoon de 'x-coördinaten' bij elkaar optellen en dan de 'y-coördinaten'. Vermenigvuldigen ziet er willekeurig en ingewikkeld uit, maar de werking en waar het vandaan komt wordt binnenkort duidelijker.

OPGAVE 3.1
Neem $(a, b) = (2,3)$ en $(c, d) = (4, -1)$. Reken uit door invullen in de bovenstaande twee regels:
Optellen: $(2,3) + (4, -1) = \cdots = (6,2)$
Vermenigvuldigen: $(2,3) \cdot (4, -1) = \cdots = (11, 10)$

3.1 Representaties in complexe vlak: complexe getallen en poolcoördinaten

Er is een handigere manier om met punten in het complexe vlak te werken. In de reële getallen kunnen we getallen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Dit gaan we doen met zogeheten *complexe getallen*. De verzameling van complexe getallen wordt ook wel aangegeven met $\mathbb{C}$. Het complexe vlak geven we twee assen: de horizontale as noemen we de reële as en de verticale as de imaginaire as. In het voorbeeld hiernaast zie je dat we (3,2) representeren als $3 + 2i$. Het deel "zonder i" noemen we het reële deel, en het deel "met de i" noemen we het imaginaire deel. De i noemen we een *imaginaire eenheid* en representeert (0,1).



GETALLENVOORBEELD
Tellen we nu twee complexe getallen op, dan hebben we in de twee representaties:
In coördinatenvorm: $(2,3) + (4,-1) = (2+4, 3-1) = (6,2)$
In complexe getallen: $2 + 3i + 4 - i = (2+4) + (3-1)i = 6 + 2i$
We tellen dus niets anders dan de reële delen bij elkaar op, en dan de imaginaire delen.
Aftrekken van twee complexe getallen kan ook:
$(2 + 3i) - (4 - i) = (2 - 4) + (3i - -i) = -2 + 4i$

Voor de vermenigvuldiging van complexe getallen gaan we eerst kijken wat $(0,1) \cdot (0,1)$is, als we de 'vermenigvuldigingsdefinitie' gebruiken:

$$(0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0)$$

We representeerden (0,1) als het complexe getal i. We hebben dus: $i \cdot i = i^2 = -1$.
Dit geeft aanleiding tot de naam *imaginair*. Bij het oplossen van vergelijkingen weet je bijvoorbeeld dat $x^2 = 4$ twee oplossingen heeft: $x = 2 \; of \; x = -2$. Maar $x^2 = -1$ heeft geen reële oplossingen, immers het kwadraat van elk reëel getal is niet negatief. Maar met complexe getallen is er wel een oplossing, we hadden zojuist dat $i^2 = -1$. Dus de complexe oplossingen voor $x^2 = -1$ zijn $x = i \; of \; x = -i$ (ga dit laatste zelf na). We schrijven niet $i = \sqrt{-1}$, dit leidt namelijk tot ongewenste tegenstrijdigheden, zie voor een voorbeeld het kader hiernaast.

Bekijk de "gelijkheden" hieronder. Als je $i = \sqrt{-1}$ schrijft, krijg je de ongewenste conclusie dat $-1 = 1$.

$$\begin{aligned} -1 &= i^2 \\ &= i \cdot i \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \\ &= \sqrt{-1 \cdot -1} \\ &= \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

Ga na waar het mis gaat!

GETALLENVOORBEELD
Vermenigvuldigen we twee complexe getallen, dan hebben we in de twee representaties:
In notatie van coördinaten: $(2,3) \cdot (4,-1) = (2 \cdot 4 - 3 \cdot -1, 2 \cdot -1 + 3 \cdot 4) = (11,10)$
In complexe getallen werken we de haakjes uit:

$$\begin{aligned} &(2 + 3i) \cdot (4 - i) \\ &= 2 \cdot 4 + 3i \cdot -i + 2 \cdot -i + 3i \cdot 4 \\ &= 8 - 3i^2 - 2i + 12i \\ &= 8 - 3 \cdot (-1) + 10i \\ &= 11 + 10i \end{aligned}$$

OPGAVE 3.2
Bereken: $(3 + 2i) - (-1 + 4i)$ en $(3 + 2i) \cdot (-1 + 4i)$

Delen van complexe getallen

Bij optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van twee complexe getallen krijgen we altijd een complex getal van de vorm $a + bi$. Vanwege de nieuwe 'vermenigvuldiging' is het *delen* door een complex getal niet heel vanzelfsprekend. Zoals je weet van de reële getallen geldt $\frac{A}{B} = C$ als $A = C \cdot B$

We leggen delen uit aan de hand van een voorbeeld: We willen $\frac{2+3i}{4-i}$ schrijven in de vorm $a + bi$. $\frac{2+3i}{4-i} = a + bi$, dus $2 + 3i = (a + bi)(4 - i)$. Haakjes uitwerken geeft (reken na!):

$$2 + 3i = 4a + b + (4b - a)i$$

Het reële deel en het imaginaire deel moeten links en rechts hetzelfde zijn, dus;

$$2 = 4a + b$$
$$3 = 4b - a$$

Dit is een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Dit kan je oplossen (zie appendix), dan krijg je $a = \frac{5}{17} en\ b = \frac{14}{17}$. Conclusie: $\frac{2+3i}{4-i} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$.

Er bestaat een snellere methode, wordt uitgelegd in de appendix, maar we gaan deze techniek niet verder gebruiken voor ons onderwerp.

Een andere representatie: poolcoördinaten

We kunnen een punt in het complexe vlak ook representeren met poolcoördinaten. We geven wel andere namen dan in het vorige hoofdstuk. De afstand r van oorsprong tot het punt in het complexe vlak noemen we een *modulus*, de hoek θ noemen we het *argument,* welke we vanaf nu altijd in radialen zullen meten. In hoofdstuk 2 hebben we de volgende formules gezien om van het cartesisch coördinatenstelsel (x, y) naar het poolcoördinaten stelsel (r, θ) te gaan, en terug:

$$x = r\cos(\theta) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r\sin(\theta) \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

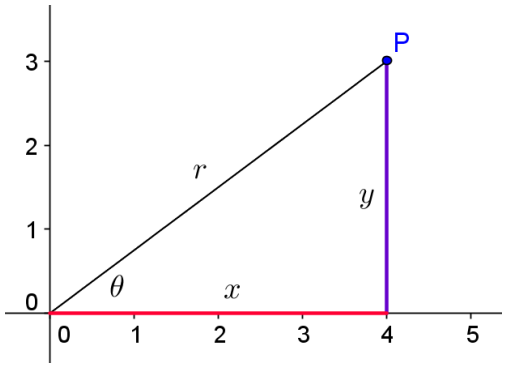
We gebruiken dit nu ook voor de representatie voor een punt in het complexe vlak in poolcoördinaten.

Bekijk de figuur hiernaast, we zullen het punt P op verschillende manieren representeren:

In *coördinaten*: (4,3)

Complexe getal: $4 + 3i$

Poolcoördinaat: modulus $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, argument $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 0{,}927$ rad.



Een andere manier om poolcoördinaten te gebruiken is gebruik te maken van de omzettingsformules hierboven. Het reële deel van $4 + 3i$ is gelijk aan 4, in het plaatje speelt dit de rol van x, en we hebben dat $x = r\cos(\theta)$ dus $4 = 5\cos(0.927)$. Het imaginaire deel van $4 + 3i$ is gelijk aan 3, we hebben met $y = r\sin(\theta)$ dus $3 = 5\sin(0{,}927)$. We kunnen $4 + 3i$ ook schrijven als $5\cos(0{,}927) + 5\sin(0{,}927)i$.

Samengevat kan een punt met coördinaten (a, b) in het complexe vlak gepresenteerd worden met het complex getal $a + bi$. Heeft (a, b) modulus r en argument θ dan hebben we ook: $a + bi = r\cos(\theta) + r\sin(\theta)\,i$

3.2 Translatie, vergroting en rotatie in het complexe vlak

In deze paragraaf gaan we opnieuw de transformaties translatie, vergroting en rotatie bekijken, maar nu in het complexe vlak. We zullen daartoe alle drie de representaties van een punt in het complexe vlak kunnen gebruiken: coördinaten (a, b), complex getal $a + bi$ of met modulus en argument $r\cos(\theta) + i\,r\sin(\theta)$.
Omdat het soms minder duidelijk kan zijn wat het reële deel is en wat het imaginaire deel, wordt de 'i' soms aan de voorkant gezet: $a + bi$ of $a + ib$ zijn twee notaties die hetzelfde betekenen.
We hebben verder voorheen een punt in een vlak bijvoorbeeld de letter *P* gegeven. Het zal voortaan handiger worden om de letters *w* of *z* te gebruiken. De letter *P* bewaren we dan voortaan voor het reële vlak.
In het reële geval gebruik je voor een getal *in het algemeen* de letters *x* of *y*. In het complexe geval gebruiken we *w* of *z*. We spreken dan meestal van "het complexe getal *z*", waarin *z* dan geschreven kan worden als $z = a + bi$ of $z = r\cos(\theta) + i\,r\sin(\theta)$.

Translatie in het complexe vlak
Stel: we willen het punt (2,3) naar het punt (6,2) transleren. In het complexe vlak is dit niet veel anders dan in de eerste coördinaat 4 optellen en in de tweede coördinaat er 1 aftrekken. In complexe getallen notatie moeten we dus $4 - i$ optellen bij $2 + 3i$ om het getal $6 + 2i$ op te tellen.

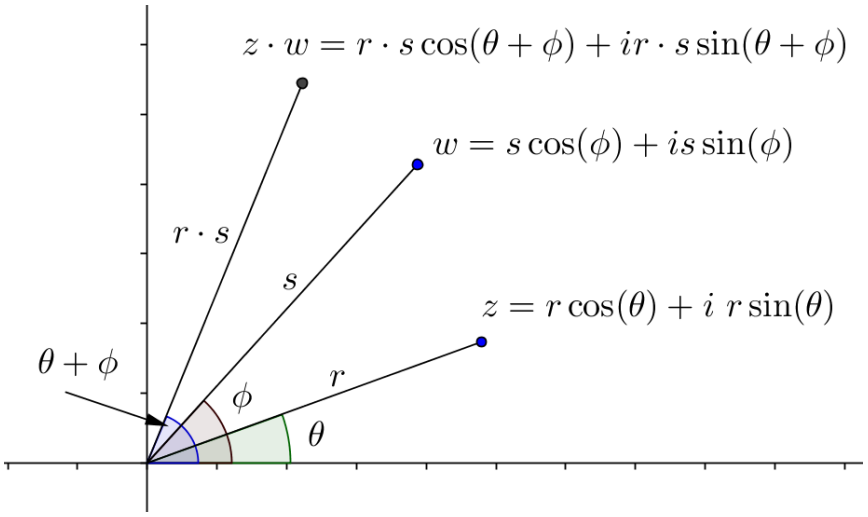
Vergroting in het complexe vlak
Stel: we willen een figuur 2 maal groter maken. In hoofdstuk twee hebben we gezien dat we de coördinaten kunnen vermenigvuldigen met 2: $(x, y) \to (2x, 2y)$. Voorbeeld: (3,2) komt dan in (6,4) terecht. In notatie van complexe getallen kunnen we ook vermenigvuldigen met 2: $(3 + 2i) \cdot 2 = 6 + 4i$.

Vermenigvuldigen met complexe getal herzien
We zagen net dat we een plaatje vergroten als we vermenigvuldigen met een reëel getal. Wat gebeurt er met een plaatje als we vermenigvuldigen met een *complex getal* in plaats van een reëel getal? We hadden eerder de vermenigvuldigingsregel gezien, in complexe getallennotatie: $(a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + i\,(ad + bc)$.
We vermenigvuldigen complexe getallen *z* en *w* met behulp van de poolcoördinaten. We hebben in dit voorbeeld $z = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ en $w = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
We gaan deze twee getallen met elkaar vermenigvuldigen en herschrijven in de vorm $a + bi$. Hiervoor heb je twee goniometrische somformules nodig. De uitwerking is te vinden in de appendix, maar ga zelf na dat geldt:

$$z \cdot w = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot 3\ \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \cdots$$
$$= 6\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + 6\,i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Uit dit getallenvoorbeeld zien we, dat de modulus van $z \cdot w$ gelijk is aan $2 \cdot 3$, en het argument gelijk is aan $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$. Dit blijkt ook in het algemeen te gelden, met $z = r\cos(\theta) + i\,r\sin(\theta)$ en $w = s\cos(\phi) + i\,s\sin(\phi)$ hebben we $z \cdot w = r \cdot s\,(\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi))$

In andere woorden: bij het vermenigvuldigen van twee complexe getallen tel je de hoeken bij elkaar op. Het argument van het product van twee getallen is de som van de argumenten. Zie ook de figuur op de volgende pagina.



Roteren in het complexe vlak
Stel: we willen een figuur roteren rond een hoek 1,4 rad om de oorsprong. We hebben zojuist gezien dat vermenigvuldiging met een complex getal $r\cos(\theta) + i\,r\sin(\theta)$ hetzelfde is als vergroten met r en draaien over een hoek θ. Een punt w kunnen we dus onder een hoek 1,4 rad draaien door w te vermenigvuldigen met $\cos(1{,}4) + i\sin(1{,}4)$.

In de volgende opgave ga je zelf de bovenstaande transformaties toepassen.

OPGAVE 3.3
In de figuren hieronder zie je een vierkant en een driehoek. Neem deze over op een blaadje. Hieronder staan zes bewerkingen, de z is een willekeurig complex getal dat een punt in de figuur representeert. Leg uit wat de bewerkingen doen met het vierkant en de driehoek: translatie, vergroting en/of rotatie? Kies bijvoorbeeld zelf een punt z en schrijf deze als $z = a + bi$ of $z = r\cos(\theta) + i\,r\sin(\theta)$, bereken de uitkomst en geef deze aan in de figuur.

i) $z + (2 + 3i)$

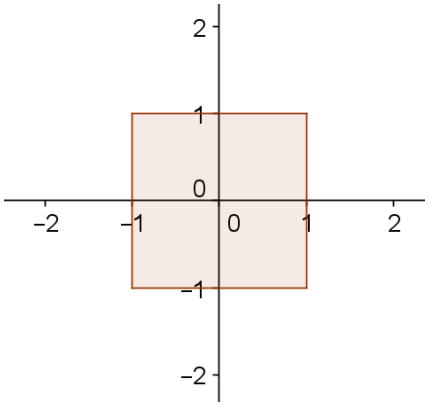
ii) $z \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

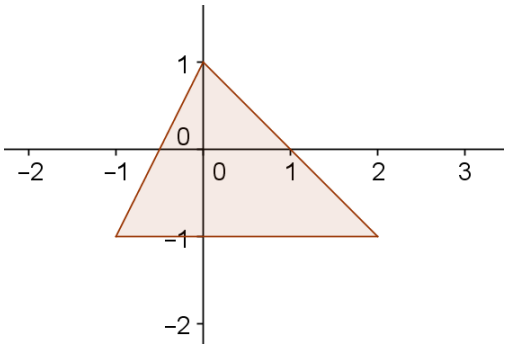
iii) $z \cdot 3$

iv) $z \cdot i$

v) $z \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

vi) $z \cdot (2 - i)$





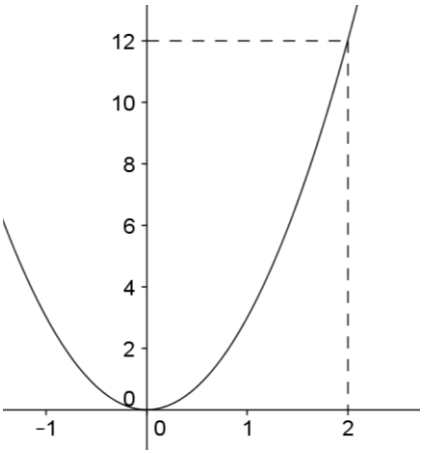
4 Complexe functies

In het vorige hoofdstuk hebben we de transformaties translatie, vergroting en rotatie bekeken met behulp van complexe getallen. In de vorige opgave namen we als voorbeeld een vierkant en keken we wat er gebeurt met dit vierkant als we een bewerking uitvoerden, zoals vermenigvuldiging met een complex getal. In wiskundige termen hebben we een *afbeelding* gemaakt van een vierkant naar een geroteerd en vergroot vierkant. Nemen we bijvoorbeeld het hoekpuntje van het vierkantje met $z = 1 + i$ en als bewerking "vermenigvuldigen met i" dan zeggen we dat we "$1 + i$" afbeelden op "$-1 + i$".
Dit proces beschrijven we nu even wat eenvoudiger. De bewerking schrijven we als een functievoorschrift $f(z)$. De bewerking op z noemen we nu een functie *f*, "vermenigvuldiging met i" kunnen we dan noteren als "$f(z) = z \cdot i$".
De notatie "$f(x)$" heb je op school waarschijnlijk ook gezien. Voorbeelden van functies zijn:

- $f(x) = 3x^2$,
- $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3}$,
- $f(x) = \sin(x) + 3\cos(x)$,
- $f(x) = 3^x$,
- $f(x) = \log_4 x$
- $f(x) = e^{3x}$
- $f(x) = \ln(x + 2)$

Deze functies hebben ook betekenis in het complexe vlak en we noteren dan $f(z)$ in plaats van $f(x)$ om onderscheid te geven tussen het complexe getal z en het reële getal x.
Voor de structuur achter *De Prentententoonstelling* van Escher zal blijken dat de functies e^z en $\ln(z)$ een zeer belangrijke rol gaan spelen, in de volgende paragraaf worden deze twee functies uitgebreid toegelicht. Voor we daar mee verder gaan, beschouwen we nog één aspect van functies, namelijk het maken van grafieken.

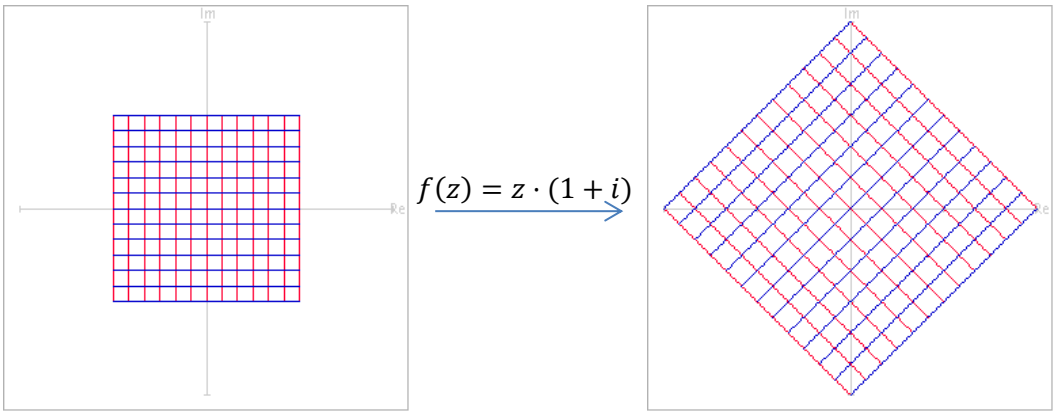
'Grafieken' van complexe functies
In het reële geval kunnen we grafieken maken van bijvoorbeeld $f(x) = 3x^2$. Daarvoor neem je als horizontale as de '*x*-as' en de verticale as de '*y*-as'. Elk getal op de deze *x*-as vul je in de functie in, dit nieuwe getal geef je aan door een punt boven de horizontale as te zetten. De coördinaten van dat punt zijn $\big(x, f(x)\big)$. In de figuur hiernaast zie je als we $x = 2$ invullen de functiewaarde gelijk is aan $f(2) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$, dus een punt op de grafiek is (2,12). Doe dit voor alle getallen op de x-as, de coördinaten samen vormen de grafiek van de functie $f(x) = 3x^2$. In termen van afbeeldingen: we hebben de punten op de *x*-as 'afgebeeld' op de kromme lijn (parabool).

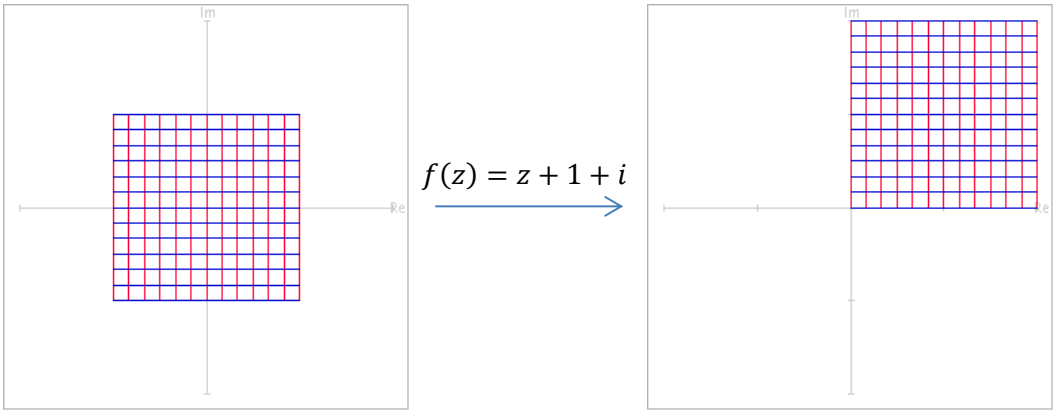


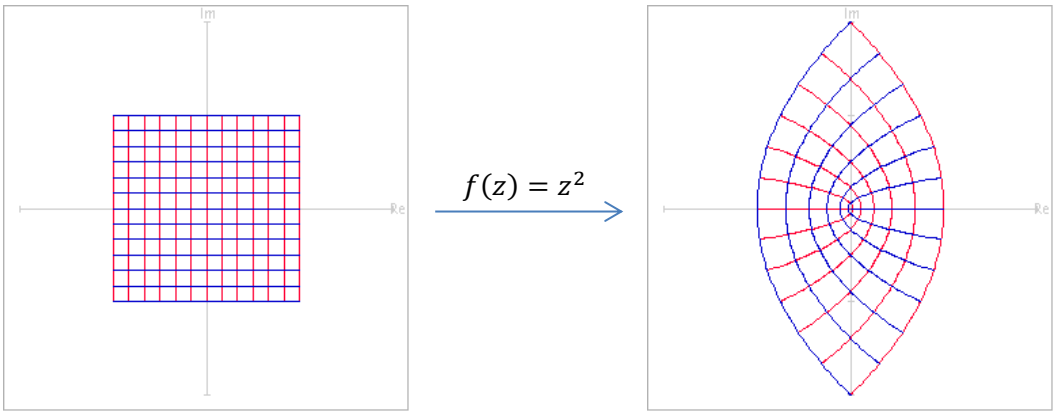
In het reële geval heb je alleen het reële getal x om in te vullen en er komt een reëel getal uit (elk één component). De bestaat dan uit twee dimensies (invoer x en uitvoer $f(x)$) en kunnen we in het platte vlak tekenen. In het complexe getal vul je een complex getal met twee componenten (reëel deel en imaginair deel) in de functie en er komt een complex getal uit met ook twee componenten. De grafiek moet dan uit vier dimensies bestaan, dit kunnen we niet tekenen. We kunnen dus niet spreken van een grafiek van een complexe functie. Wat we wel kunnen doen is twee complexe vlakken naast elkaar neerleggen. Op de linkervlak tekenen we een figuur, meestal een vierkant rooster met gekleurde roosterlijnen. In het rechtervlak komt het resultaat te staan: elk roosterpunt van het linkervlak wordt afgebeeld op een punt in het linkervlak. Op de volgende pagina zie je drie voorbeelden, met daarachter in woorden de werking (ga na!):

- $f(z) = (1 + i) \cdot z$ (het rooster wordt 45° gedraaid en $\sqrt{2}$ keer vergroot)
- $f(z) = z + 1 + i$ (het rooster wordt verplaatst: 1 naar rechts, 1 omhoog)
- $f(z) = z^2$ (elk roosterpunt $a + bi$ wordt gekwadrateerd: $(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$)

Op internet kan je computerprogramma's (applet) vinden waarop je deze figuren kan maken. Zoek in een zoekmachine naar 'applet complex function' of 'complex function visualizer' (de meeste applets zijn in het Engels). Probeer vooral zelfbedachte functies uit.







Bovenstaande afbeeldingen zijn gemaakt met ComplexTool van www.jimrolf.com/complex.htm

4.1 De complexe exponentiële functie

In de rest van dit hoofdstuk zullen we twee belangrijke functies voor de *Prentententoonstelling* bekijken: de complexe e-macht e^z en de complexe logaritme $\ln(z)$. Als je nog niet weet wat er bedoeld wordt met "e-macht": in de appendix staat een korte toelichting gegeven zoals die ook op school gegeven wordt.
Op school noem je verbanden van de vorm $y = a^x$ een exponentieel verband. Bijvoorbeeld $y = 2^x, y = 5^x$ of $y = 10^x$. In dit boek en in de wiskunde is het gewoonte om de term *exponentiële functie* te gebruiken bij $f(z) = e^z$, met e het getal van Euler, in vijf decimalen is dat $e = 2{,}71828$. Dus in dit boekje hebben we het over de complexe e-macht als we spreken over de complexe exponentiële functie.
Om te bepalen wat de exponentiële functie doet, zoals met een vierkant rooster zoals op de vorige pagina, moeten we in staat zijn om bijvoorbeeld e^{3+5i} te herschrijven in de vorm "$a + bi$". Dit wordt gegeven door de **formule van Euler**: $e^{\theta i} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
De formule van Euler maakt gebruik van de poolcoördinaten representatie. Dit werken we voor het voorbeeld e^{3+5i} uit:

- We gebruiken eerst de eigenschap van de e-macht: $e^{n+m} = e^n e^m$
- Dit geeft: $e^{3+5i} = e^3 e^{5i}$
- Op de tweede factor, e^{5i}, gebruiken we de formule van Euler: $e^{5i} = \cos(5) + i\sin(5)$
- Dus $e^{3+5i} = e^3\cos(5) + i\, e^3\sin(5)$

We hebben nu een manier om de e-macht van een complex getal te herschrijven in de vorm $a + bi$. De formule van **Euler** geeft ook een mooie manier om de representatie in poolcoördinaten te schrijven: als $z = a + bi$ een complex getal is, dan herschrijven we dit in poolcoördinaten als $z = r\, e^{i\theta}$, met r de modulus en θ het argument.

OPGAVE 4.1
Schrijf in de vorm "$a + bi$" zoals in het voorbeeld hierboven:
a) e^i
b) $e^{\pi i}$
c) $e^{6+i\,\pi/3}$
d) $e^{3+2\pi i}$

Periodiciteit van de complex e-macht
De laatste opgave (d) zag je misschien iets bijzonders, het antwoord is $e^{3+2\pi i} = e^3$. We bekijken nogmaals de formule van Euler: $e^{\theta i} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Van goniometrie weten we dat de cosinus en sinus periodiek zijn met periode 2π: $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 4\pi) = \cdots = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$ en zo ook $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$, met k een geheel getal.
Dit betekent dat e^z periodiek is met periode $2\pi i$: $e^z = e^{z+2\pi i} = \cdots = e^{z+k\cdot 2\pi i}$. Om deze reden kan je direct zien dat $e^{3+2\pi i} = e^3$.

OPGAVE 4.2
(a) Controleer met behulp van (d) uit de vorige opgave dat $e^{3+2\pi i} = e^3$.
(b) Schrijf in de vorm $a + bi$: $e^{3+22\pi i}$ en $e^{1+455\pi i}$.

4.2 De complex logaritme

In deze paragraaf bekijken de complexe logaritme. Kijk weer naar de appendix achterin voor een behandeling in het reële geval zoals op de middelbare school.
De logaritme is de 'inverse' van de exponentiële functie: als $e^a = b$ dan $\ln(b) = a$. In complexe getallen kunnen we dit schrijven als: $e^{a+bi} = u + iv$ dan is $\ln(u + iv) = a + bi$
Getallenvoorbeeld: $\ln(e^3\cos(5) + i\, e^3\sin(5)) = 3 + 5i$, want $e^{3+5i} = e^3\cos(5) + i\, e^3\sin(5)$.

Er is echter één probleem. We hebben gezien dat exponentiële functie periodiek is in de imaginaire richting: $e^{a+bi} = e^{a+(b+2\pi)i} = \cdots = e^{a+(b+2\,k\,\pi)i} = u + i\,v$
Elk van deze complexe getallen geeft hetzelfde punt $u + iv$ aan.
Dus de logaritme kan niet uniek bepaald worden: als $e^3 = e^{3+2\pi i}$, dan volgt $\ln(e^3) = \ln(e^{3+2\pi i})$

en daarmee de onzinnige conclusie $3 = 3 + 2\pi i$. Dit lossen we als volgt op in de representatie van poolcoördinaten: we kiezen ervoor om het argument θ altijd tussen 0 en 2π te laten zijn.
Als $z = r\, e^{i\theta}$, dan definieren we: $\ln(z) = \ln\left(r \cdot e^{i\theta}\right) = \ln(r) + i\theta$.
Getallenvoorbeeld: $z = 2e^{i\pi/4}$, dan $\ln(z) = \ln(2e^{i\pi/4}) = \ln(2) + i\pi/4$

Als θ een andere waarde aanneemt buiten het interval $[0,2\pi)$, hebben we 'last' van de periodiciteit van de exponentiële functie: $e^{i(\theta+2\pi k)} = e^{i\theta}$. De logaritme heeft meerdere zogeheten 'takken': $\ln(z) = \ln(r) + i(\theta + 2\pi k)$. Voor elke waarde van k kunnen we een andere logaritme van $\ln(z)$definiëren. Dit effect zullen we later nog een keer bekijken bij het maken van de logaritmische afbeelding in hoofdstuk 4.6.

4.3 De exponentiële afbeelding

We gaan nu stapsgewijs bekijken wat de complexe functie $f(z) = e^z$ doet met een plaatje. We gaan kijken wat de beelden onder deze functie zijn van een paar speciale gevallen om zo de werking van deze functie goed te begrijpen. We kijken naar de reële as en naar de imaginaire as, dan naar willekeurige horizontale en verticale lijnen.

De reële as

Een wiskundige notatie voor de reële as is: $z = a + 0i$, waarbij a iedere reële waarde mag aannemen. We laten nu de exponentiële functie werken op de reële as. We vullen daartoe eenvoudigweg het punt z in de functie in: $f(z) = f(a + 0i) = e^a$.
Je strekt de reële as 'exponentieel' uit. Het punt $(1,0)$ gaat naar $(e^1, 0)$ en het punt $(2,0)$ gaat naar $(e^2, 0)$, in het algemeen gaat het punt $(a, 0)$ gaat naar $(e^a, 0)$. Let ook op voor negatieve waarden van a, e^a nog steeds positief is: het punt $(-3,0)$ gaat naar $(e^{-3}, 0) = (0.0497 \ldots, 0)$.

De imaginaire as

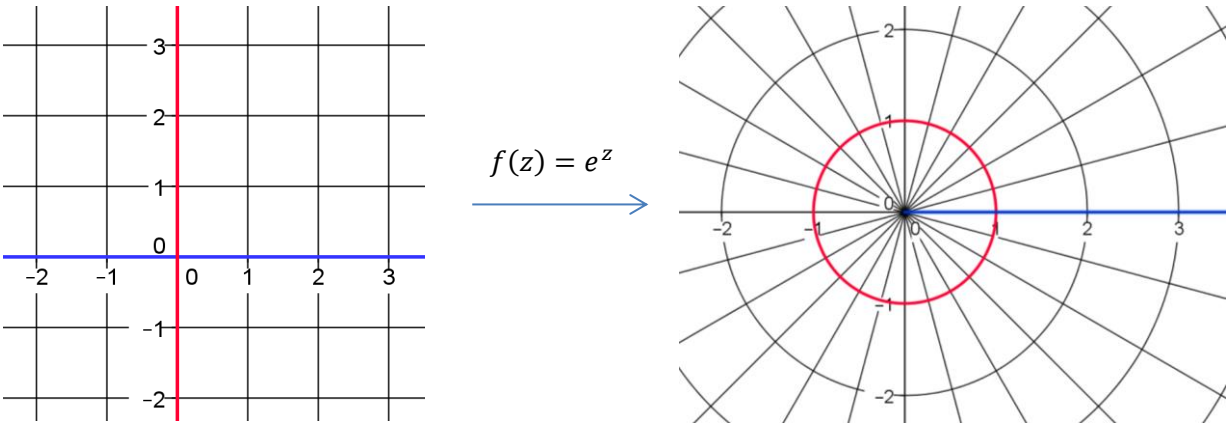
Nu is $z = 0 + ib$. Invullen in de functie: $f(b) = e^{ib} = \cos(b) + i\,\sin(b)$. Laten we b lopen over waarden tussen 0 en 2π krijgen we een cirkel van straal 1.

OPGAVE 4.3

Ga zelf na met zelfgekozen waarden van op het interval $[0,2\pi)$ dat inderdaad de imaginaire as wordt afgebeeld op een cirkel met straal 1.

Eerder noemden we de periodiciteit van de exponentiële functie. Nemen we waarden voor b buiten $[0,2\pi)$ komen we nog steeds op de cirkel met straal 1 terecht. Dus de hele imaginaire as zal worden afgebeeld op een cirkel van straal 1.

De figuur hieronder laat de exponentiële afbeelding zien, de rode lijn is de reële as en de blauwe lijn is de imaginaire as.



Horizontale lijn

Nu nemen we lijnen parallel aan de reëel as. Nemen we bijvoorbeeld de punten op de lijn gegeven door $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$ (zie oranje lijn in de figuur hieronder) krijgen we door invullen:

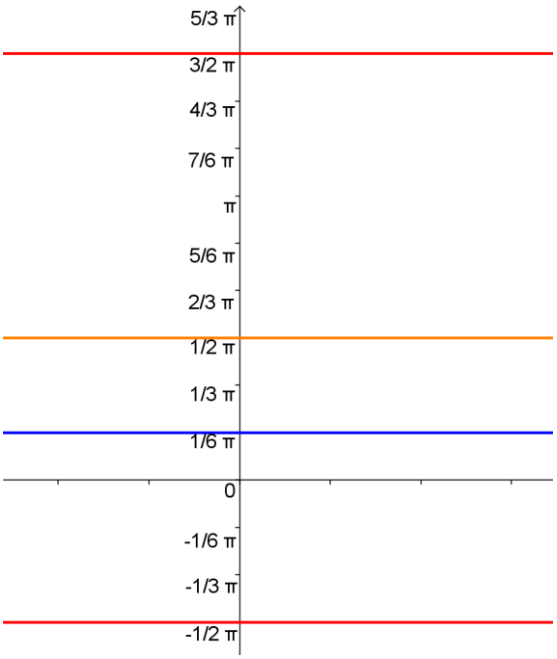
$f\left(a + i\frac{\pi}{2}\right) = e^{a+\frac{i\pi}{2}} = e^a\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = e^a(0+i) = i\,e^a$. Het argument van $i\,e^a$ is $\frac{\pi}{2}$ en dit is onafhankelijk van a.

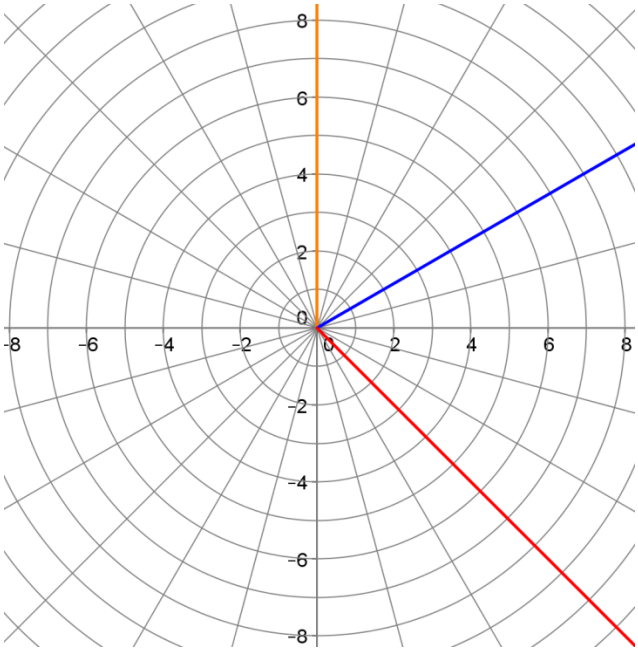
Nemen we een ander voorbeeld: de horizontale lijn $(a, \frac{\pi}{6})$ (paarse lijn):

$f\left(a + \frac{\pi}{6}i\right) = e^a\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = e^a\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right)$. Het argument is gelijk aan $\frac{\pi}{6}$ ook hier onafhankelijk van de keuze van a.

Laten we a lopen over alle reële getallen dan zien we in de resulterende 'grafiek' dat een horizontale lijn wordt afgebeeld op een 'halflijn'. e^a is voor elke reële a positief, maar nooit precies nul.

In de figuur hieronder hebben we met een rode lijn de periodiciteit van de exponentiële functie gebruikt: $e^{-\frac{\pi}{2}i} = e^{\frac{3\pi}{2}i}$. We zien hierdoor dat we de zelfde reeks halflijnen krijgen als we horizontale lijnen boven de $(a, 2\pi)$ en onder $(a, 0)$ bekijken. In andere woorden: voor elke gehele k worden de horizontale lijnen $(a, \theta + 2\pi k)$ op dezelfde halflijn afgebeeld.





OPGAVE 4.4

Ga na dat de volgende conclusie geldt: *Een horizontale lijn wordt na de exponentiële afbeelding een halflijn vanuit de oorsprong*.

Ga ook de volgende bewering na: *De helling van deze halflijn wordt bepaald door de waarde van het snijpunt met de imaginaire as.*

Verticale lijn

Tot slot bekijken we lijnen parallel aan de imaginaire as. De verticale lijn $(2, b)$ wordt als volgt afgebeeld (zie ook figuren op de volgende pagina):

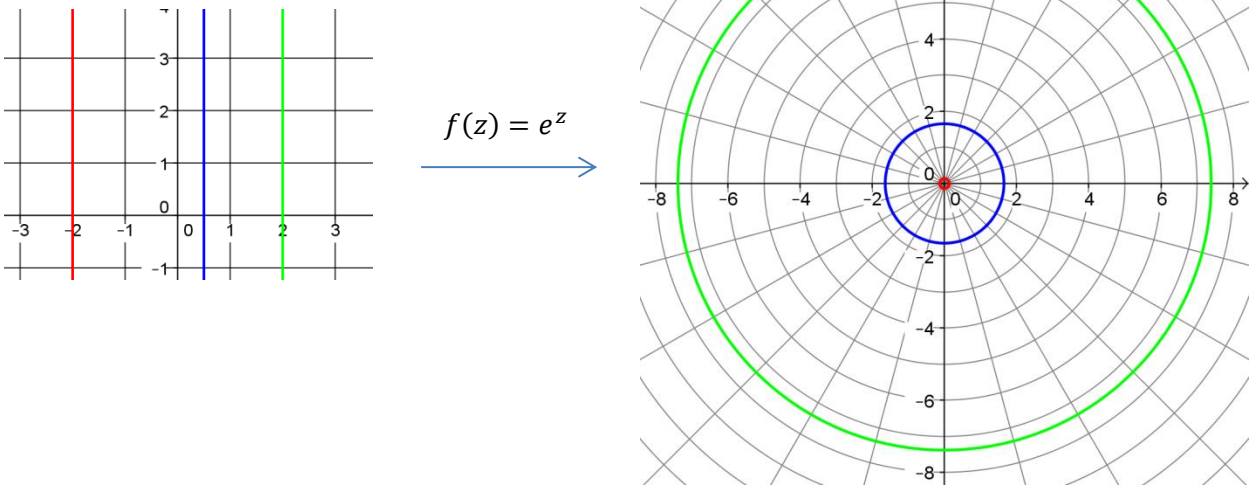
$f(2+bi) = e^{2+bi} = e^2(\cos(b) + i\sin(b))$. Laten we b lopen over alle reële getallen hebben we een cirkel met straal e^2 (groen in de figuur).

Voor een ander lijn $(-2, b)$ krijgen we:

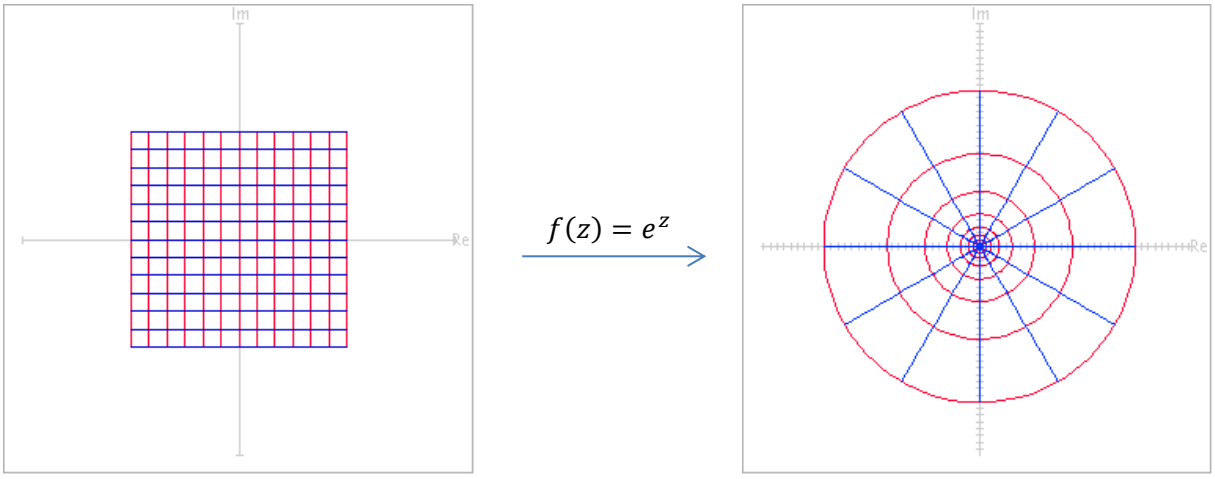
$f(-2+bi) = e^{-2+bi} = e^{-2}(\cos(b) + i\sin(b))$, ofwel een cirkel met straal e^{-2} (rood).

OPGAVE 4.5

Ga na dat de volgende conclusie geldt: *Een verticale lijn wordt bij de exponentiële afbeelding een cirkel*. En: *De straal van de cirkel wordt bepaald door de waarde van het snijpunt met de reële as*.



Conclusie: de complexe exponentiële functie transformeert een rechthoekig rooster naar een cirkelvormig rooster, waarbij verticale lijnen worden afgebeeld op cirkels en horizontale lijnen afgebeeld worden op halflijnen. Dit is goed te zien in de figuur hieronder.



Zelf maken

Dit effect kan je zelf maken:

- Neem een vel A4 roosterpapier en leg het met de lange kant onder (liggend).
- Teken een rechthoekig rooster, elk hokje 2 bij 2 centimeter.
- Teken met blauw de horizontale lijnen en met rood de verticale lijnen.
- Rol nu het papier in een koker langs de lange zijde, zorg dat de uiteindes elkaar precies 2 cm overlappen en zorg dat het rooster zich aan de binnenzijde bevindt.
- Kijk nu door de koker, je ziet nu de exponentiële afbeelding.

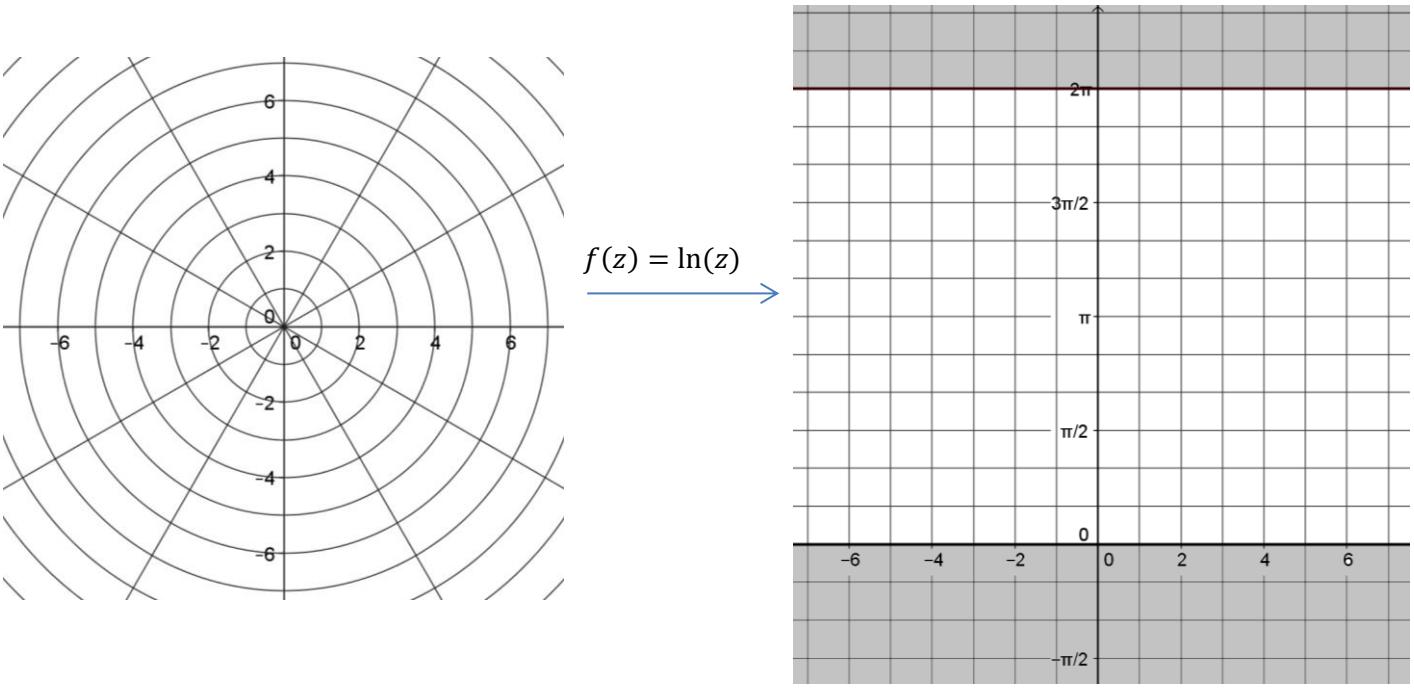
De rode horizontale lijnen zijn de stralen geworden, en de zwarte verticale lijnen zijn cirkels geworden. Het is wel lastig te zien, omdat je ogen proberen scherp te stellen, dus je kan niet het hele plaatje scherp zien. Als je beschikking heb tot grotere vellen papier (A3 bijvoorbeeld) wordt het snel duidelijker.

4.4 Complex logaritmische afbeelding

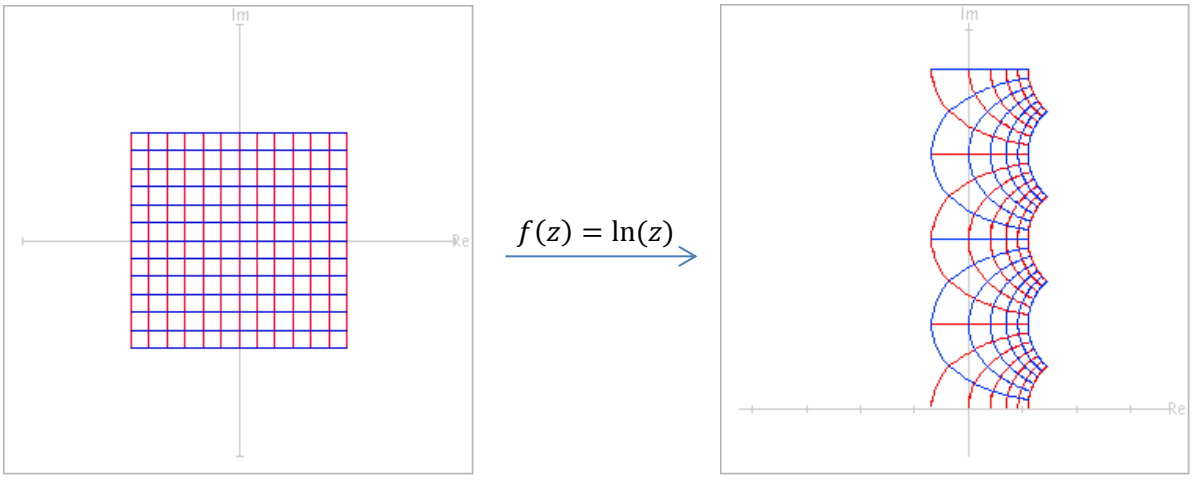
Wat er precies gebeurt met horizontale en verticale lijnen als je de logaritmische afbeelding gebruikt is lastiger te beschrijven. Allereerst hebben we het probleem met de 'takken' van de logaritme waar we het eerder over hadden, in formulevorm konden we voor $z = r\,e^{i\theta}$ schrijven:

$$\ln(z) = \ln\left(re^{i(\theta+2\pi k)}\right) = \ln(r) + i\,(\theta + 2\pi k)$$

Als oplossing voor het definiëren van de logaritmische functie hebben we dat we θ alleen waarden tussen 0 en 2π laten aannemen.
Omdat de complexe logaritmische functie in principe de inverse is van de complexe exponentiële functie, zal de complexe logaritme het 'omgekeerde' doen met cirkels en halflijnen: cirkels worden juist afgebeeld op verticale lijnen en halflijnen worden afgebeeld op horizontale lijnen. Maar we maken nu expliciet de restrictie dat het argument tussen 0 en 2π moet zitten. In een figuur betekent dit dat een 'cirkelvormig rooster' wordt afgebeeld op een rechthoekig rooster op het zogeheten 'bovenste halfvlak'. Dit is verticaal begrensd tussen 0 en 2π en onbegrensd in horizontale richting, zie de figuur hieronder. Het grijze gebied in het rechterplaatje is dus buitengesloten.



Om tóch uitspraak te kunnen doen over wat de logaritmische functie doet met horizontale en verticale lijnen, kunnen we het volgende proces afgaan. Zoek een verzameling punten die, als je dáárop de exponentiële afbeelding laat werken, op een verticale danwel horizontale lijn worden afgebeeld. De applet die op pagina 21 werd gebruikt geeft op deze manier het volgende plaatje:

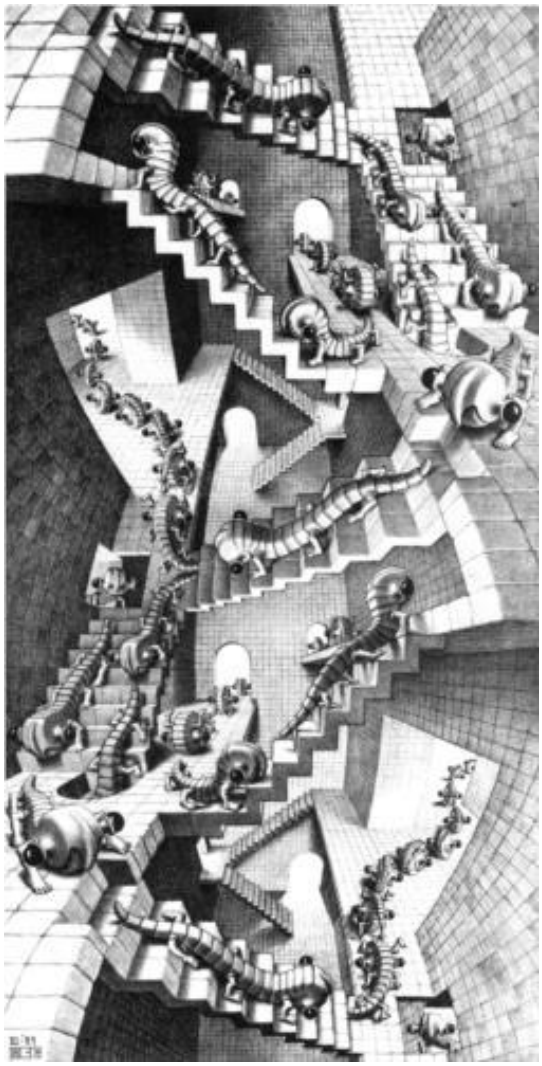


5 Conforme afbeeldingen en Droste-effect

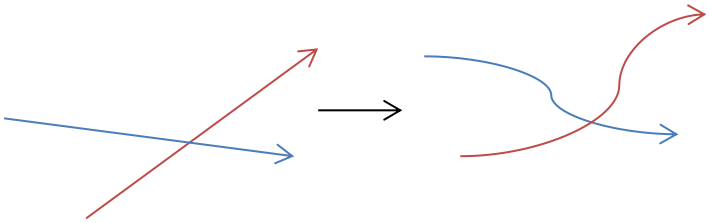
We hebben in het vorige hoofdstuk kennis gemaakt met complexe getallen, complexe functies en hebben al enkele werkingen van complexe functies in het complexe vlak gezien: het vermenigvuldigen met een complex getal introduceert rotatie en vergroting, en de e-macht nemen van punten in het complexe vlak zorgt voor cirkelvormige vervormingen.
In dit hoofdstuk maken we een start met toepassing op de *Prentententoonstelling*. In het eerste hoofdstuk hebben we drie eisen gegeven: conformiteit, Droste-effect en rotatie van 157° en verkleining van factor 22,5. De eerste twee eigenschappen gaan we in dit hoofdstuk in meer detail toelichten.

5.1 Conforme afbeeldingen

Escher is bekend om zijn vervormingen die op het eerste gezicht prima lijken te kloppen, de *Prentententoonstelling* waar dit boek om draait is daar een voorbeeld van. Een ander voorbeeld is de prent hiernaast, '*Het Trappenhuis*' (1951). Kijk naar de bakstenen. Je weet dat de bakstenen normaal gesproken rechthoekige blokken zijn. Maar kijken we naar de prent zien we in de muren een vervorming optreden. Zoomen we sterk in op zo'n blok, zijn recht kruisende lijnen ook recht zoals je verwacht, maar zoomen we een beetje uit dan is globaal toch nog een bolle vervorming te zien. Dit is sterker te zien als je naar de middelste verticale strip kijkt, van boven naar beneden. Je kijkt eerst tegen een muur, maar op 1/3 gaat de muur over tot een vloer, wat weer langzaam toch weer een rechtopstaande muur wordt, en onderaan het plaatje toch weer een vloer.



We zouden dit plaatje kunnen vertalen in termen van afbeeldingen zoals eerder gedaan. Een rechthoekige muur wordt afgebeeld naar een vervormde muur, waar *lokaal* de hoeken gelijk gebleven zijn. We noemen een dergelijke afbeelding *conform,* een ander woord is hoekgetrouw. Het plaatje hieronder laat het begrip conformiteit schematisch zien. Hebben we in het origineel twee kruisende lijnen en beelden we deze *conform* af, dan kruisen de nu vervormde lijnen elkaar nog steeds onder dezelfde hoek als in het origineel:



In het eerste hoofdstuk hebben we gezien dat *De Prententoonstelling* ook een conforme afbeelding is. Kijk bijvoorbeeld naar de hoekpunten van de schilderij waar de man naar kijkt, de hoeken moeten daar ook 90° zijn.

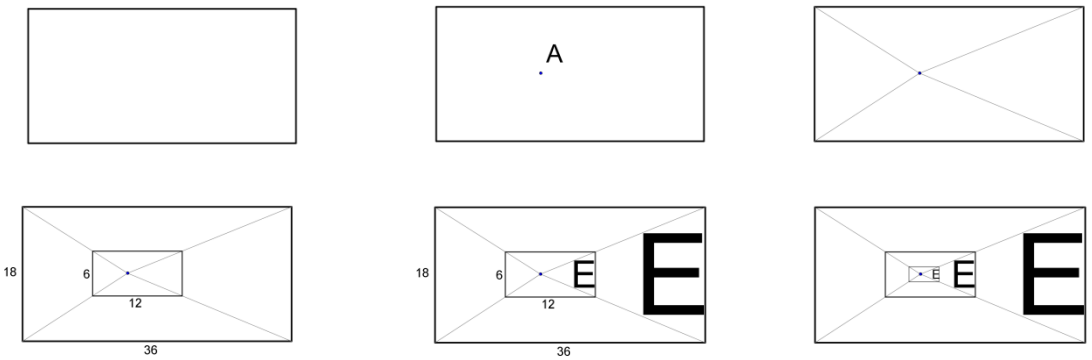
5.2 Droste-effect

Het Droste-effect is het effect waarop een plaatje in een plaatje in een plaatje enzovoorts is bevat. De naam komt van de cacaofabrikant Droste, maar ook andere reclamecampagnes hebben gebruik gemaakt van dit effect. Hieronder twee voorbeelden. In het linkerplaatje zie je een kuipje ´La vache qui rit´, daarop zit je een koe met oorbellen. Op deze oorbellen zie je weer een afbeelding van het kuipje, met een koe met oorbellen enzovoorts. Op het rechterplaatje zie je een pakje boter ´Land O Lakes´, met daarop een indiaans meisje afgebeeld wie een pakje boter van hetzelfde merk vast houdt, met daarop haarzelf afgebeeld met een pakje boter enzovoort.
In het de boterpak is er één punt waar de plaatjes naar toe convergeren: als je rond dit put inzoomt met een bepaalde factor kom je het zelfde plaatje tegen. In dit geval zie je dat de lange zijde van het boterpak ongeveer 12 keer verkleind wordt.

Een Droste-effect is vrij eenvoudig zelf te maken, hier zullen we een voorbeeld geven hoe je een Droste-effect maakt waarbij de volgende versie 3x verkleind is.

1. Teken een (groot) rechthoek op een vel papier.
2. Plaats ergens in het rechthoek een stip, dit speelt de rol van het punt waar we naar toe convergeren bij het inzoomen. (punt A in de figuur hieronder)
3. Vanuit deze stip maak je licht 4 stippellijnen naar de hoekpunten van deze rechthoek
4. Deel de zijdes van de rechthoek door 3, en plaats de zijdes binnen het rechthoek zodanig dat de hoekpunten van dit verkleinde rechthoekje op de stippellijnen staan.
5. Maak nu een tekening in het grotere rechthoek, maar niet in de kleinere.
6. Herhaal stap 4. In stap 5 kopieer je nu de tekening 3 maal verkleind in het kleinere rechthoek.
7. Herhaal stap 6 zo vaak als je kan.

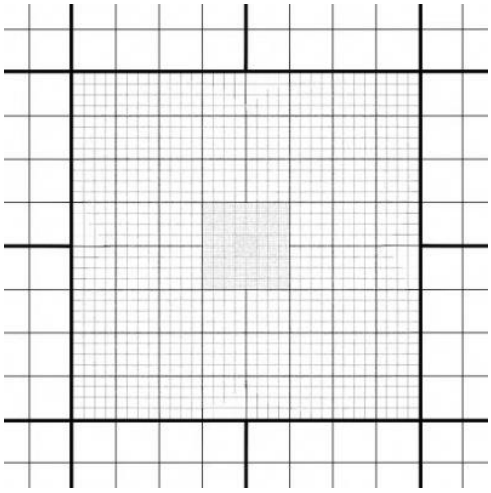
In de figuren hieronder zie je de bovenstaande stappen op volgorde. Als plaatje hebben we de letter E gebruikt.

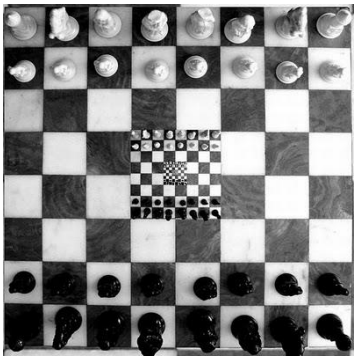


6 De *Prentententoonstelling* complex bekeken

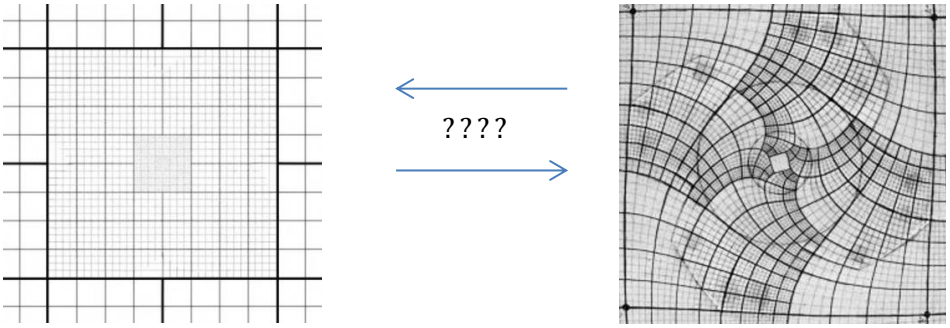
In dit hoofdstuk gaan we nu de complexe getallen, conforme afbeeldingen en het Droste-effect gebruiken om de *Prentententoonstelling* te beschrijven.

Voor de *Prentententoonstelling* maakte Escher een vervormd rooster, wat het het Escherrooster noemen. Om de prent te tekenen gebruikte Escher een normaal rooster waarin de situatie in vier verschillende versies is getekend: een man dat naar een schilderij kijkt, een haven, een stad met prentengallerij, een prentengallerij waarin een man staat dat naar een schilderij kijkt. Dit is in principe al het Droste-effect. Escher deed het zelf niet zo, maar wij gaan nu een speciaal rooster gebruiken dat we het Drosterooster zullen noemen, een voorbeeld staat hieronder. Het is in principe een rechthoekig rooster, maar in het centrum is een verkleinde versie van het rooster getekend, in principe zoals we in het vorige paragraaf gezien hebben. Om het Droste-effect in dit rooster beter te zien is een figuur bijgevoegd van een schaakbord dat in het midden een 4x verkleinde versie van zichzelf bevat. De linkerfiguur is het 'Drosterooster' van het rechterfiguur.





De vraag dat we in dit hoofdstuk gaan beantwoorden is hoe we heen en weer kunnen gaan tussen het Drosterooster en het Escherrooster, welke transformatie gaat er schuil?



In het eerste hoofdstuk hebben we gezien dat een rondje in het Escherrooster een vermenigvuldiging van 256 met zich meebrengt. Deze factor zal gelijk aan vergrotingsfactor in het Drosterooster. Dus de vierkantjes in het Drosterooster wordt per stap 256 keer kleiner. NB: dit is niet te zien in de figuur hierboven, dat is een schets. Een factor van 1/256 is veel te klein om te zien.

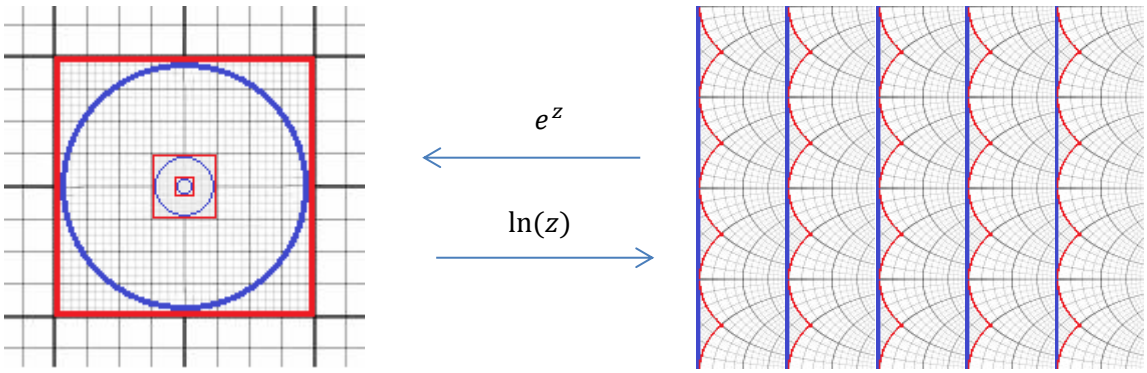
6.1 Een kloppende afbeelding

Bij het maken van de afbeelding hierboven moet de transformatie wel 'kloppen'. Dit betekent een aantal dingen: de afbeelding is conform en er mag niets conflicterend overlappen. De laatste opmerking hebben we nog niet eerder gezien. Bij het maken van een complexe functie kan het gebeuren dat één complex getal het resultaat is van meerdere invoergetallen. Voorbeeld: $f(z) = z^2$, als $f(z) = 1$ kan $z = 1$ óf $z = -1$. Dus zowel 1 als -1 wordt afgebeeld op 1, er is sprake van een overlap. Dit is niet erg als $z = -1$ en $z = 1$ dezelfde kleur hebben, en een gebiedje rond $z = -1$ en $z = 1$ hetzelfde zijn en precies elkaar overlappen. Gebeurt dit niet, dus hebben $z = -1$ *en* $z = 1$ een verschillende kleur, dan hebben we een afbeelding die niet 'kloppend' is en ongeschikt voor onze analyse.
Nemen we een punt in het Drosterooster en bekijken de kleur van dit punt (zeg: zwart) dan moet dit met één punt in het Escherrooster na transformatie corresponderen en nog steeds de kleur zwart houden. Andersom geldt dat ook: een punt in het Escherrooster moet horen bij één punt in het Drosterooster met dezelfde kleur.

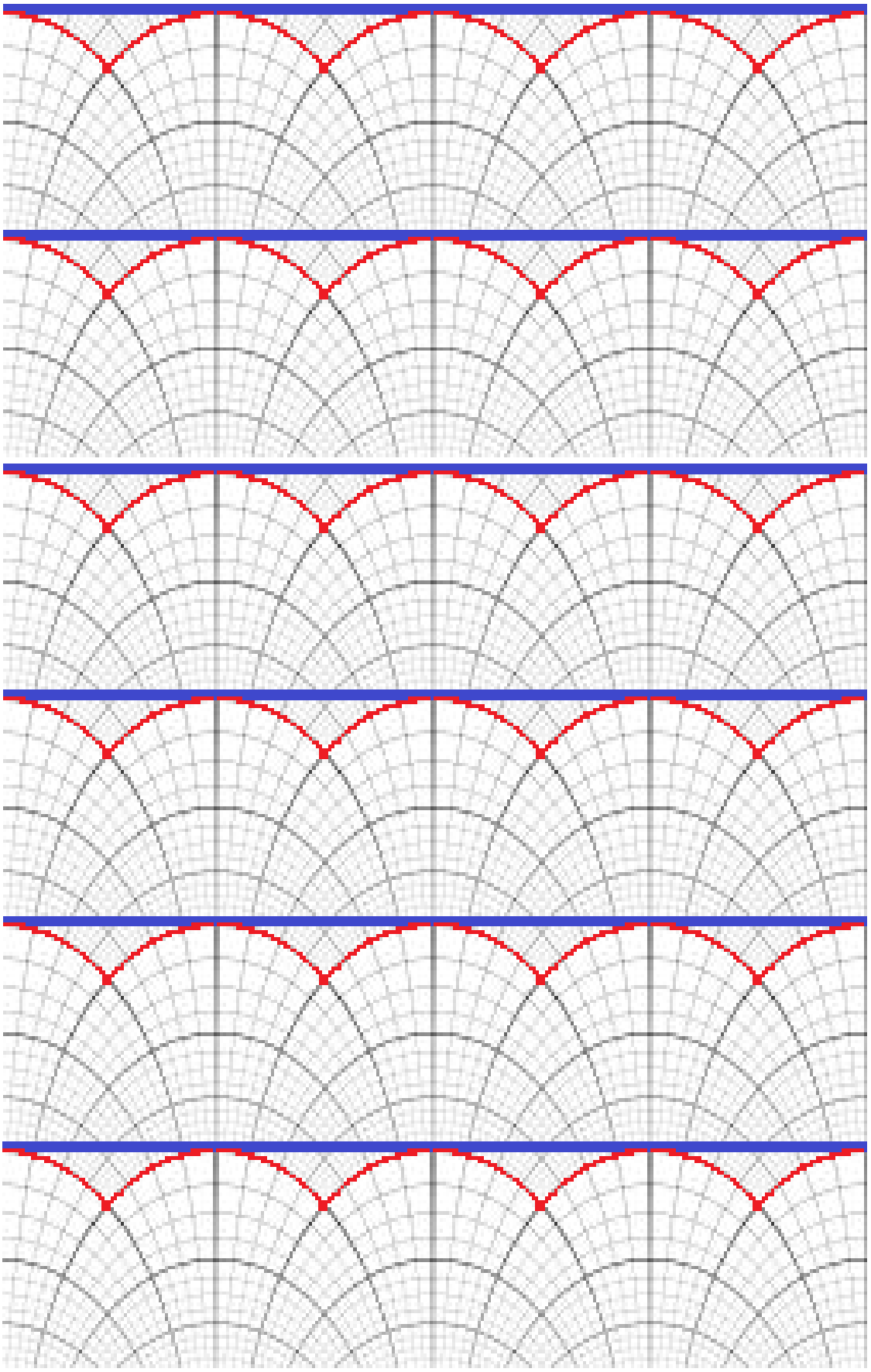
In hoofdstuk 4 hebben we de exponentiële afbeelding bekeken, de exponentiële functie is conform. Het bewijs dat de exponentiële functie conform is, is vrij technisch maar wordt gegeven in de appendix. Hiervoor moet je weten hoe je de afgeleide neemt van een complexe functie daar hebben we het in dit boekje niet over gehad, maar wordt wel in de appendix uitgelegd.
Een plaatjesbewijs kunnen we wel geven. In een standaardrooster snijden horizontale lijnen en verticale lijnen elkaar loodrecht. De exponentiële functie beeldt horizontale lijnen af op halflijnen en verticale lijnen op cirkels. Halflijnen en cirkels snijden elkaar ook loodrecht, de hoeken zijn behouden. Dit is echter niet het volledige bewijs, immers moet conformiteit gelden voor elk willekeurig paar snijdende lijnen. Maar neem vanaf nu aan dat de exponentiële functie, en ook de logaritme, een conforme functie is.

6.2 Toepassing exponentiële en logaritmische afbeelding

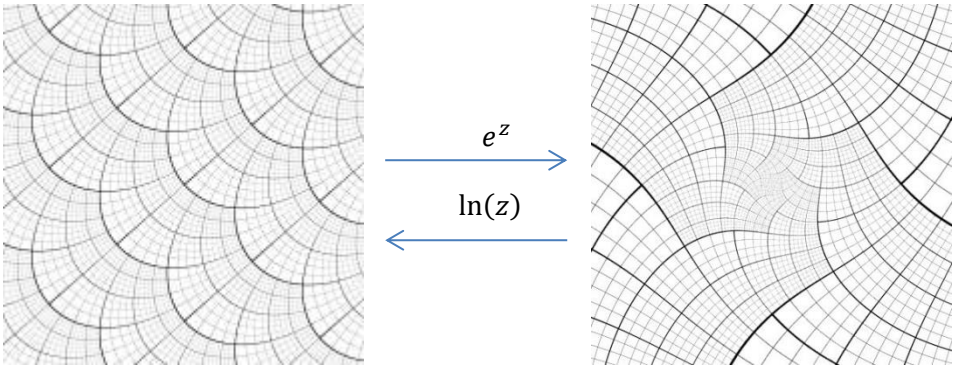
We gaan nu kijken wat de exponentiële en logaritmische afbeelding met het Drosterooster en met het Escherrooster doet.
In het Drosterooster tekenen we rode vierkanten en blauwe cirkels. We wisten uit hoofdstuk 4 dat de exponentiële afbeelding verticale lijnen afbeeldt op cirkels. De logaritmische afbeelding maakt van cirkels verticale lijnen, zie hoofdstuk 4.6. In dat hoofdstuk hebben ook laten zien wat de logaritmische functie doet met een recht rooster, om dit te zien maakten we een rooster zodanig dat de exponentiële afbeelding op dit rooster het normale rechte rooster geeft. Dit doen we nu ook met het Drosterooster, met de rode vierkanten en blauwe cirkels. De rechterstrook gaat in horizontale richting in principe oneindig lang door, maar is verticaal wel begrenst. Dit vanwege de 'takken' van de logaritme, we beperken het argument van een complex getal in het Drosterooster tot $[0,2\pi)$.



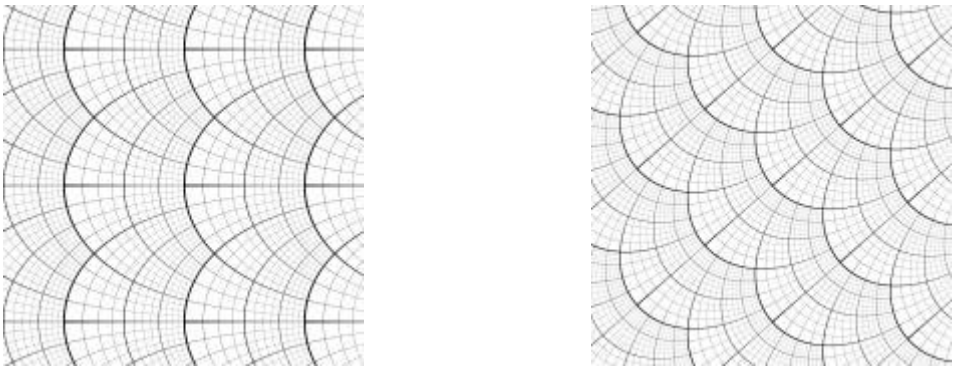
In hoofdstuk 4.5 hebben we een fysieke voorstelling gemaakt van de exponentiële afbeelding. Als we in gedachten het rechterrooster hierboven omhoog oprollen en er door heen kijken, krijgen we het linker rooster terug. Op de volgende bladzijde is het rechterrooster volledig gegeven, deze kan je uitknippen en zelf oprollen.



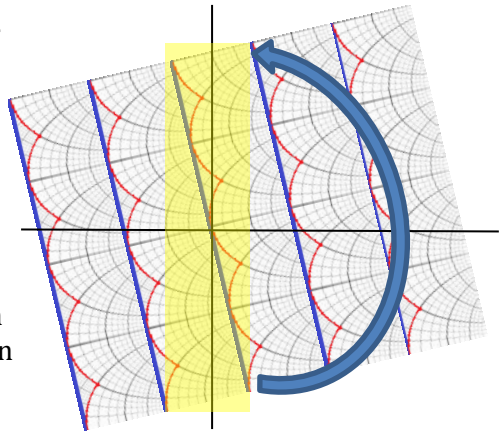
In plaats van het Drosterooster nemen we nu het Escherrooster en passen we dezelfde constructie toe: welk rooster heb je nodig om, na exponentiële afbeelding, het Escherrooster te krijgen? Dat blijkt er als volgt uit te zien:

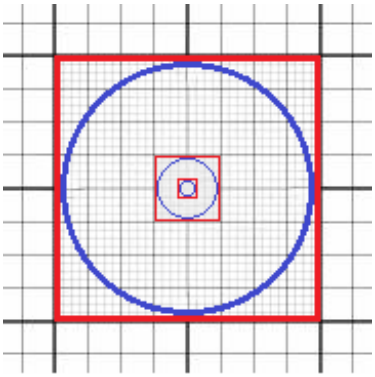


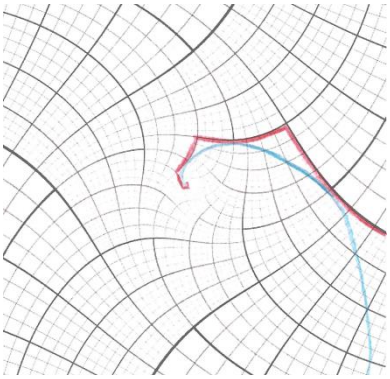
We leggen nu de twee 'logaritmische' roosters naast elkaar:



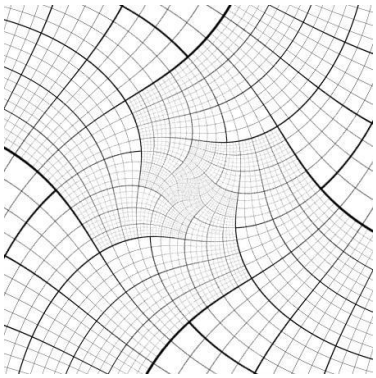
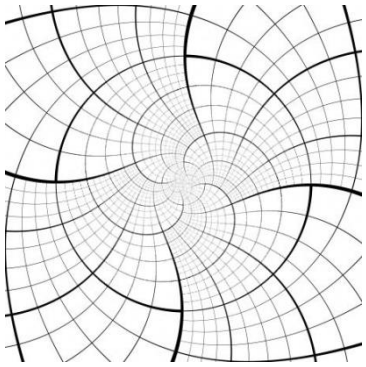
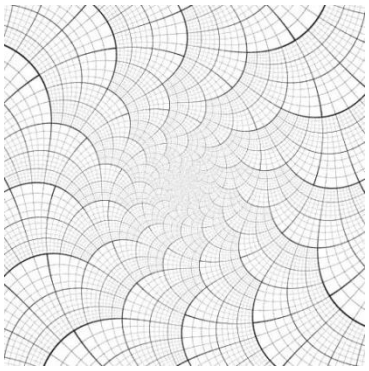
Het lijkt erop dat deze twee roosters hetzelfde zijn, behalve dat het rechterrooster geroteerd is en een klein beetje verkleind. We weten van hoofdstuk 3 dat rotatie en vergroting een resultaat is van vermenigvuldiging met een complex getal $a + bi$.
Met het uitgeknipte rooster van de vorige pagina, kan je zelf experimenteren dat dit klopt. In plaats van het rooster recht langs de blauwe lijn oprollen, kan je het rooster ook schuin oprollen zoals in het plaatje hiernaast. Kies rond het midden één blauwe lijn uit, en laat bij het oprollen de uiteindes aansluiten bij een naburig lijn; hiernaast is de onderkant van de middelste blauwe lijn aansluiten met de bovenkant van de lijn er rechts naast.
Kijk je door de koker zie je dat de blauwe lijnen spiralen zijn geworden, en de rode vierkanten volgen de roosterlijnen van het Escherrooster.
Zie ook de figuur hieronder:





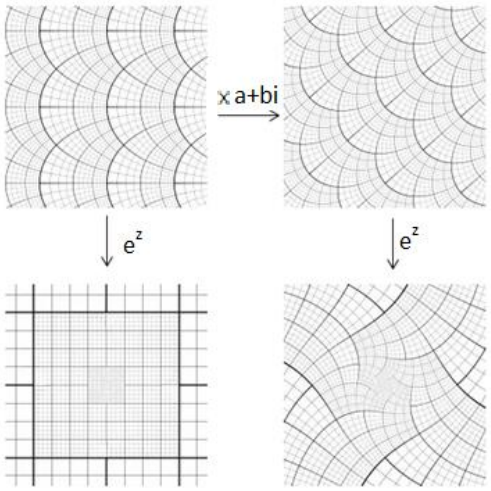


Andere vervormingen zijn ook mogelijk, we zouden het papier nog schuiner kunnen leggen, of juist de andere kant op draaien (of de andere kant van de koker inkijken). Experimenteer zelf of je de volgende vervormingen kan terugzien (kan lastig zijn).

6.3 Een 'formule' voor de Prentententoonstelling

Hiernaast is de vorige paragraaf samengevat in één figuur. De bovenste rij zijn de 'logaritmische roosters', als je hierop de exponentiële functie op laat werken krijg je het Drosterooster of het Escherrooster. Om van het linker naar de rechter logaritmische rooster te gaan vermenigvuldigen we met een complex getal $a + bi$. Welk getal hebben we nog niet bepaald en dat gaan we in deze paragraaf doen.
We zouden de gehele route kunnen samenvatten met de afbeelding $f(z) = e^{(a+bi)\cdot \ln(z)}$ met z een complex getal in het Drosterooster *zonder* 0.



OPGAVE 6.1
Ga na dat de formule inderdaad klopt. Waarom zou de formule niet gelden voor $z = 0$?

Ten slotte geldt deze formule ook alleen als we wat hoeken betreft beperken tot $[0,2\pi)$ vanwege de 'takken' van de complexe logaritme. Met deze restricties kunnen we wel spreken van een formule voor de *Prentententoonstelling*.

De vermenigvuldiging met $a + bi$

We moeten het logaritmisch rooster roteren en vergroten door te vermenigvuldigen met een complex getal $a + bi$. Hiermee moet het de afbeelding 'kloppend' blijven na de exponentiële afbeelding: de blauwe lijnen en rode lijnen moeten perfect aansluiten. We gaan dit stapsgewijs uitwerken. Onderstaande tekst refereert naar de vier figuren op de volgende pagina.
Het Drosterooster heeft als vermenigvuldigingsfactor 256. Dat betekent dat als een cirkel straal 1 heeft, de volgende grotere cirkel straal 256 heeft. Zie de figuur hieronder als schets van de situatie. We hebben in deze schets willekeurig een rode vierkant en blauwe cirkel door punt (1,0) laten gaan: zien we dit als getekend op het complexe vlak wordt namelijk dit punt $z = 1 + 0i$ afgebeeld op $\ln(1 + 0i) = 0$. De blauwe cirkel door $z = 1$ rond de oorsprong wordt dan afgebeeld op de blauwe verticale lijn dat loopt van 0 tot $2\pi i$. De grotere groene cirkel met straal 256 wordt afgebeeld op een verticale lijn van $\ln(256)$ tot $\ln(256) + 2\pi i$ (ga na!). We creëren zo een rechthoek. Zie de tweede figuur. Deze rechthoek wordt vervolgens met $a + bi$ vermenigvuldigd: er is een rotatie en vergroting. We weten nog niet precies wat a en b zijn, dus we beginnen eerst met een rotatie zonder vergroting of verkleining en alleen rotatie. Het is

handiger om in poolcoördinaten af te gaan, dus $a + bi = re^{i\theta}$, de rotatie (welke we niet weten) is θ. Het linkerhoekpunt zit in de oorsprong en deze blijft op zijn plek, de andere hoekpunten draaien onder de hoek θ, maar wel zodanig dat dat rechterbovenhoek boven de linkeronderhoek op de imaginaire as terechtkomt. Zie de derde figuur.

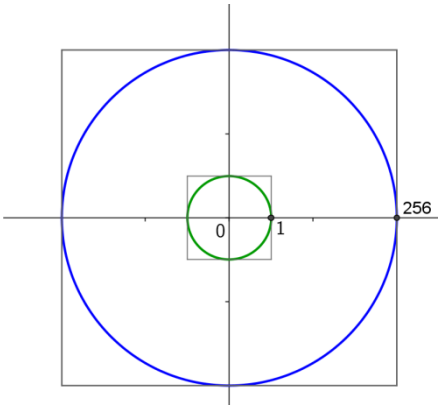
We weten dat we op dit scheve rooster de exponentiële afbeelding gaan toepassen, daarvoor was het van belang dat het imaginaire deel tussen 0 en 2π zit. Herinner bijvoorbeeld dat $e^{3+2i} = e^{3+(2+2\pi)i}$. Daarom moet het hoekpuntje aangegeven met "$e^{i\theta} \cdot (\ln(256) + 2\pi i)$" teruggebracht worden naar $2\pi i$. Zie de vierde figuur. Hiertoe vermenigvuldigen we met r.
Er geldt:

$$r \cdot e^{i\theta}(\ln(256) + 2\pi i) = 2\pi i$$

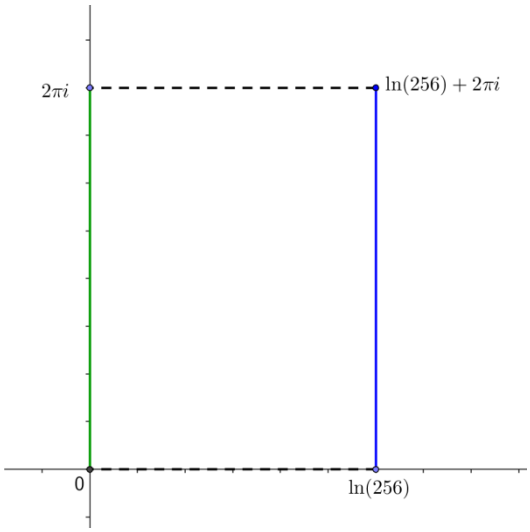
We kunnen hieruit concluderen dat:

$$a + bi = r \cdot e^{i\theta} = \frac{2\pi i}{\ln(256) + 2\pi i} = \frac{(2\pi)^2}{(2\pi)^2 + (\ln(256))^2} + i\frac{2\pi \ln(256)}{(2\pi)^2 + (\ln(256))^2}$$

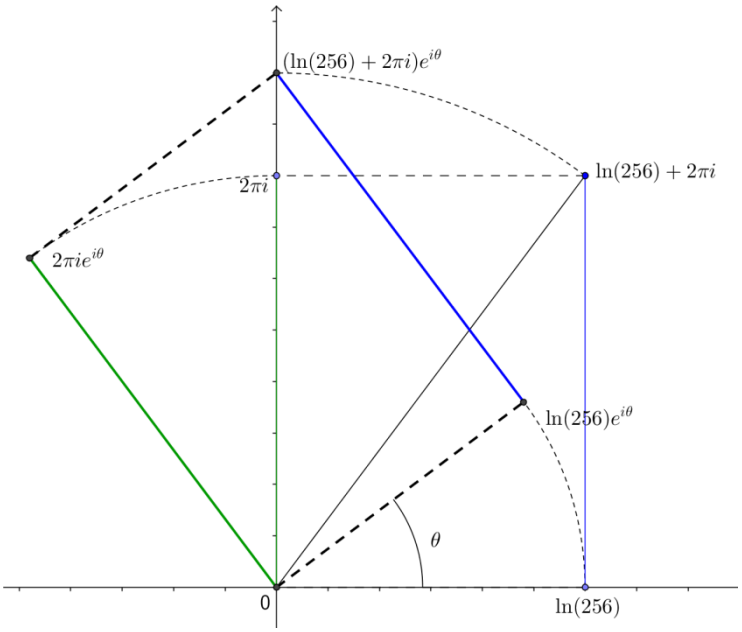
In de appendix wordt de laatste tussenstap uitgelegd, daarvoor moet je weten hoe je 'deling door complex getal' eenvoudiger kan uitwerken.



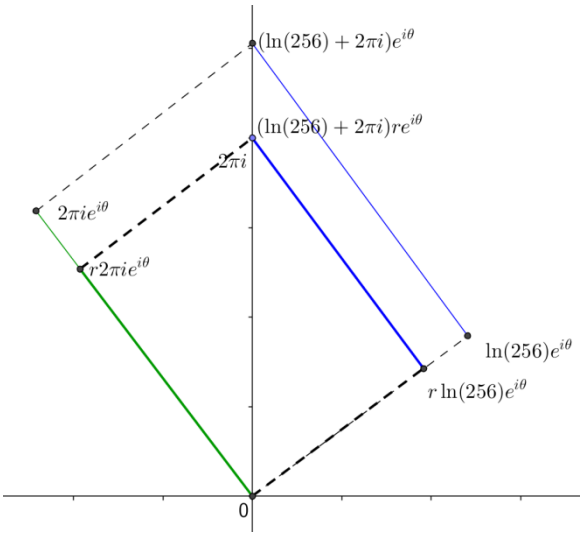
1) Cirkel straal 1 en cirkel straal 256 in Drosterooster (niet op schaal!)



2) Logaritme van figuur 1, cirkels worden verticale lijnen van 0 tot 2π.



3) Vermenigvuldiging met $e^{i\theta}$, de rechthoek wordt onder een hoek θ geroteerd



4) Vermenigvuldiging met r. Het hoekpunt op de imaginaire as moet naar $2\pi i$ gebracht worden.

6.4 De formule achter de Prentententoonstelling

In het eerste hoofdstuk van dit boekje hebben we gezien dat het Droste-effect terugkomt in de *Prentententoonstelling*. Een pad in het Escherrooster rond het witte gat gaf een vergroting van 256 mee, dat hebben we gebruikt om te achterhalen wat het getal $a + bi$ moest zijn. We hebben nog een andere eis: namelijk dat het Droste-effect terugkomt in een rotatie van ongeveer 157° en met een verkleining van ongeveer 22,5. Deze twee gokken ga je nu expliciet uitrekenen in de volgende opgave.

De formule kunnen we met behulp van de laatste opgave van de vorige paragraaf nu schrijven:

$$f(z) = e^{\left(\frac{2\pi i}{2\pi i + \ln(256)}\right)\ln(z)}$$

Aan het einde van het eerste hoofdstuk heb je zelf gemeten onder welke hoek en met welke vergroting in *de Prentententoonstelling* terugkomt: een verkleiningsfactor van ongeveer 20 en een hoek van ongeveer 157°. Dit ga je nu zelf exact berekenen in de volgende opgave.

OPGAVE 6.2

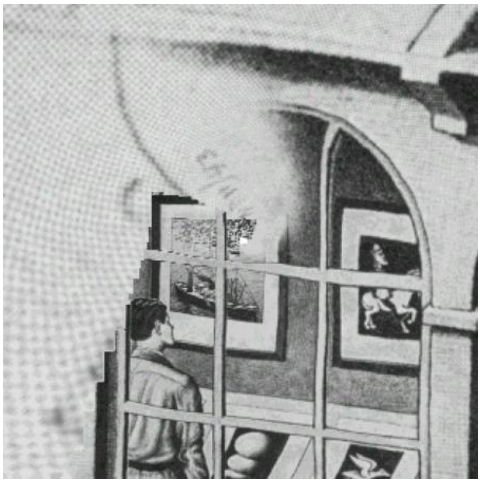
We bekijken punten *A* en *B* in het Drosterooster (niet in Escherrooster). Punt *B* ligt op de cirkel met straal *r* en punt A ligt op de grotere cirkel met straal $256 \cdot r$.
Gebruik voorlopig de formule $f(z) = e^{(a+bi)\ln(z)}$, dat is met uitschrijven makkelijker.

a) Vul de punten A en B in de formule *f(z)* hierboven:
   $f(A) = f(256 \cdot r) = \cdots$
   $f(B) = f(r) = \cdots$
b) *f* heeft nu punten *A* en *B* afgebeeld in twee punten in het Escherrooster. Met welk getal moet je vermenigvuldigen om het beeld van *A* te krijgen uit het beeld van *B,* ofwel bereken 'factor': $f(A) = factor \cdot f(B)$. Deze *factor* is een complex getal, schrijf het als één e-macht.
c) Deze *factor* heeft de betekenis dat het plaatje invariant is onder vermenigvuldiging met deze *factor*, dat wilt zeggen dat je exact dezelfde afbeelding krijgt als je het hele Escherrooster gaat vermenigvuldigen met dit complexe getal. Je hebt geleerd dat vermenigvuldigen met een complex getal een rotatie en vergroting geeft. Vul voor *factor* voor $a + bi$ in:
   $a + bi = \frac{(2\pi)^2}{(2\pi)^2 + (\ln(256))^2} + i\frac{2\pi\ln(256)}{(2\pi)^2 + (\ln(256))^2}$
d) Schrijf factor in de vorm $r\, e^{i\theta}$.
e) Wat is de waarde van de vergroting *r* en de rotatie θ? Reken de rotatie om in graden.

Het eindantwoord van deze opgave is: verkleining van $e^a = 22{,}58368453\ldots$ en rotatie over $\theta = b = 2{,}751085637\ldots$rad = 157,6255961...°. Zie de appendix voor de complete uitwerking.

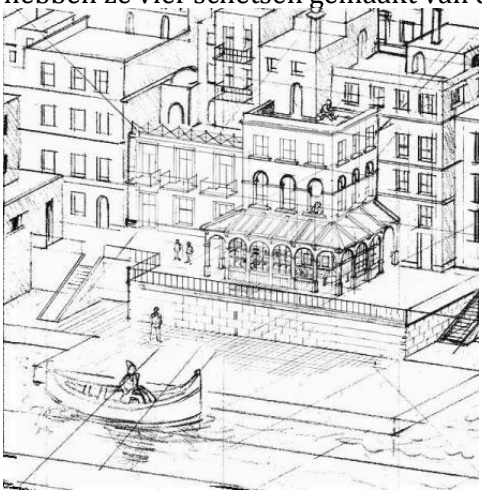
7 Het opvullen van de witte vlek in de *Prentententoonstelling*

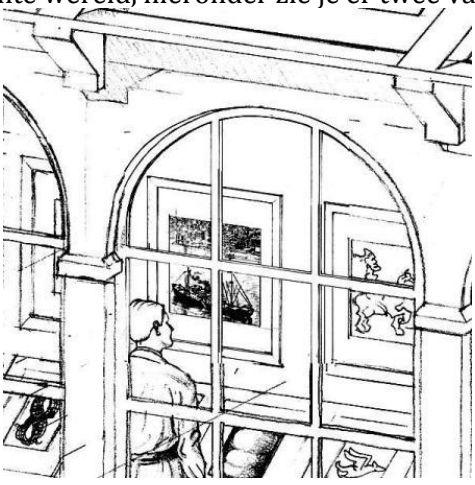
De formule en wiskunde achter de prent is nu gevonden. In Eschers *Prentententoonstelling* is een wit gelaten gat. We zijn erachter gekomen dat daarin oneindig veel versies van de *Prentententoonstelling* schuil gaat, elke keer wel onder een hoek van 157° gedraaid en verkleind met een factor van 22,5. Dit wist Escher echter zelf niet, en we zien dat zijn handgemaakte rooster niet *exact* overeenkomt met ons wiskundige rooster: er zitten hele minimale onnauwkeurigheden in. Ook overlapt het witte gat *iets* meer dan alleen het bovengenoemde droste-effect. Dat heeft enkele gevolgen. Als je de gevonden transformatie in omgekeerde richting toepast op *de Prentententoonstelling* zou je het rechte plaatje krijgen met de Droste-effect, maar witte vlek wordt helaas wel meegenomen. Zie de afbeelding hieronder. De witte vlek spiraliseert naar buiten toe. Je ziet ook dat het rechte plaatje op een paar plekken misvormd is, de gebouwen zijn bijvoorbeeld scheef of de ramen worden dunner. Dit heeft te maken met de kleine onnauwkeurigheden in Eschers handgemaakte rooster. Het blijft alsnog heel knap van Escher dat hij zó nauwkeurig heeft gewerkt en het bijna klopt.



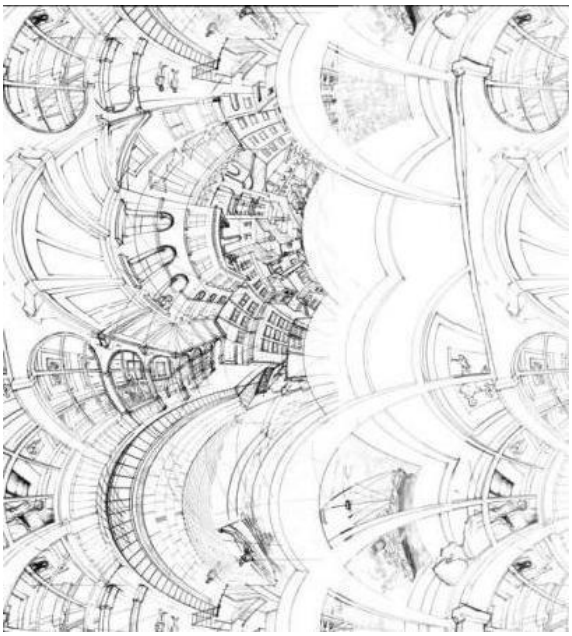
De witte veeg over het rechte plaatje verbergt een hoop informatie. We kunnen dus niet *zomaar* de witte vlek invullen. Eerst moet de witte veeg ingevuld worden, vervolgens op het ingevulde rechte plaatje weer de transformatie toepassen en pas dan hebben we het wit gelaten gat in *De Prentententoonstelling* opgevuld.

In 2000, toen Hendrik Lenstra en Bart de Smit bezig waren met deze prent, is de wiskunde uit dit Zebra-boekje vrij snel onthuld. Maar het duurde nog 2 jaar voordat tekenaars Hans Richter en Jacqueline Hofstra, samen met wiskundestudent Joost Batenburg wie de software heeft ontwikkeld, om het gat daadwerkelijk gevuld te krijgen. De tekenaars hebben de scheve lijnen rechtgetrokken en volgens de stijl van Escher de ontbrekende informatie ingevuld. Daarbij hebben ze vier schetsen gemaakt van de rechte wereld, hieronder zie je er twee van.





Jacqueline heeft de nieuwe schetsen van grijstinten voorzien en gedetailleerd ingekleurd, dit heeft ze gedaan in het logaritmische plaatje, zie de figuur hieronder.



Met het computerprogramma van Joost Batenburg is *De Prentententoonstelling* compleet gemaakt, zie hieronder. Ga naar escherdroste.math.leidenuniv.nl waar een animatie te vinden is waarin langzaam naar het midden wordt ingezoomd en je inderdaad een geroteerde versie van de prent terugziet.

Appendix

In deze appendix worden de uitwerkingen gegeven van alle tussenopgaven, en een aantal extra toelichtingen gegeven op de wiskunde die gebruikt is in het boekje. De wiskunde is vooral gericht op bovenbouw vwo-leerlingen, er wordt niets nieuws uitgelegd, al wordt er wel een stuk uitgelegd over differentieerbaarheid van complexe functies.

Uitwerkingen, opgaven verwezen naar [hoofdstuk].[vraagnummer]

1.1 Zie de figuur op de daarvolgende pagina, je moet op het kleine rode lijntje uitkomen

1.2 meet AB op, meet A'B' op, de lijn is een factor $\frac{AB}{A'B'} \approx 20$ keer verkleind (jouw waarde kan iets anders zijn).
De hoek die AB maakt ten opzichte van A'B' is ongeveer 157 graden: trek een lijn vanuit het middelpunt (midden van witte vierkant) naar A en van middelpunt naar A', meet de hoek tussen de twee lijnstukken. Doe hetzelfde voor B en B'

2.1 $C = (-2,-1),\ D = \left(3,\frac{1}{2}\right)$

2.2 $A = (3{,}150), B = (3,60)$

2.3 $(r,\theta) = (5{,}53.1)$ $(x,y) = (1.5,1.3)$
$(r,\theta) = (4.1,345{,}9)$ $(x,y) = (-2.3,3.3)$

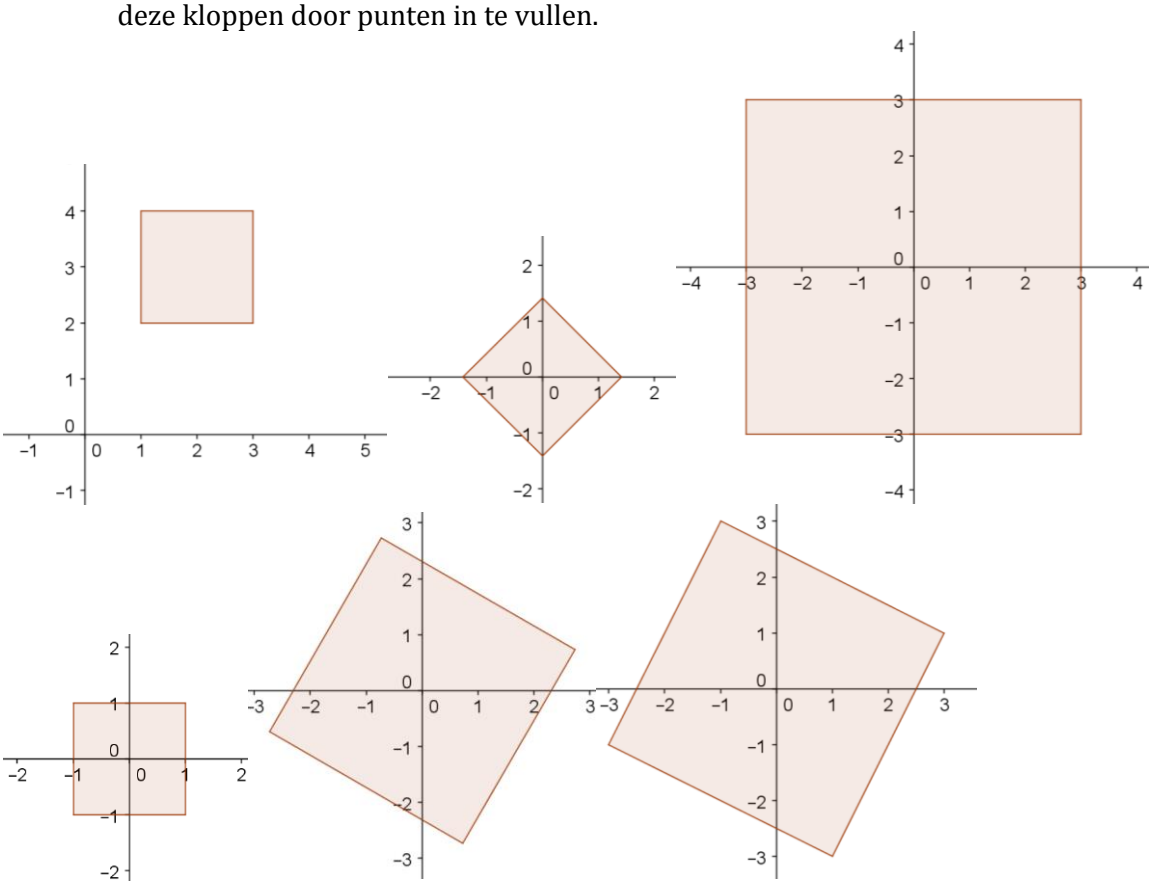
2.4 $90°$ $210°$
$\frac{\pi}{6}$ rad $\frac{2\pi}{3}$ rad

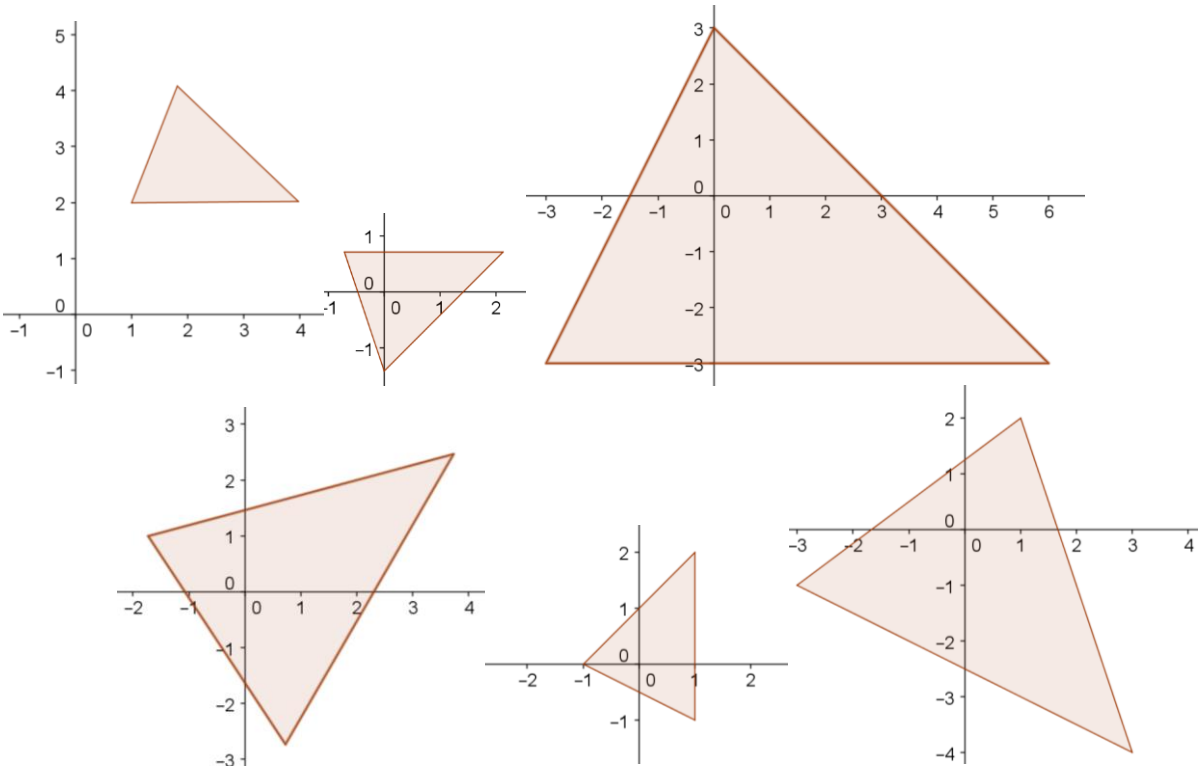
2.5 $(x,y) \rightarrow \left(\frac{1}{6}x, 2y\right)$

3.1 $(2{,}3) + (4,-1) = (2+4{,}3-1) = (6{,}2)$
$(2{,}3) \cdot (4,-1) = (2\cdot 4 - 3\cdot -1{,}2\cdot -1 + 3\cdot 4) = (11{,}10)$

3.2 $(3+2i) + (-1+4i\,) = 2+6i$
$(3+2i)\cdot(-1+4i) = -11+10i$

3.3 In de figuren hieronder zie je de werking van elk van de zes opgaven. Ga zelf na dat deze kloppen door punten in te vullen.





4.1 $e^i = \cos(1) + i\sin(1)$ $e^{6-\frac{\pi}{3}i} = e^6\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + ie^6\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$e^{\pi i} = -1$ $e^{3+2\pi i} = e^3$

4.2 a) klopt

4.2 b) $e^{3+22\pi i} = e^3$ $e^{1+455\pi i} = e^{1+\pi i} = -e$

4.3 Kies een paar punten, alles is goed.

4.4 In de figuur zien we wel dat het klopt, maar gaat het altijd goed? Daarvoor een bewijsje en dat gaat als volgt. Voor willekeurige horizontale lijn op de imaginaire as is er een snijpunt $z = ai$, a een reëel getal. Er geldt $f(z) = e^z = e^{ai} = \cos(a) + i\sin(a)$, dit snijpunt wordt dus in coordinaten $(\cos(a), \sin(a))$ afgebeeld. Voor de overige punten op de horizontale lijn geldt $z = k + ai$, k reëel en $f(z) = e^z = e^k e^{ai} = e^k(\cos(a) + i\sin(a))$, in coordinaten wordt elk punt afgebeeld op $(e^k\cos(\mathrm{a}), e^k\sin(a))$. Laten we k lopen over alle reële getallen dan is dit een rechte lijn door de oorsprong (raakt het net niet, want $\lim_{c\to-\infty} e^c = 0$) in de richting door het punt $(\cos(a), \sin(a))$. Dit is een halfrechte, ofwel radiaal. De helling van deze lijn wordt gegeven door "$\Delta y/\Delta x$"$= \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$, de helling hangt dus af van het snijpunt met de imaginaire as.

4.5 Op dezelfde manier als de vorige opgave, fixeer eerst een punt op de reëele as $z = a$, dan $f(z) = e^a$, dus het punt wordt afgebeeld in coördinaten $(e^a, 0)$. Voor een willekeurig punt op de verticale lijn $z = a + ki$ geldt $f(z) = e^a e^{ki} = e^a(\cos(k) + i\sin(k))$. De coordinaten van de afgebeelde punt is $(e^a\cos(k), e^a\sin(k))$. Laten we k nu over de reële getallen lopen, lopen we in een cirkelbaan met straal e^a, dus ook hier hangt de straal van de cirkel af van het snijpunt met de reële as.

6.1 We gaan alle pijlen af, we beginnen met het punt z in het Drosteplaatje. Deze wordt logaritmisch afgebeeld, dus op $\ln(z)$. Het punt $\ln(z)$ wordt vermenigvuldigd met $a + bi$, dus $(a + bi)\ln(z)$ is het volgende punt. Dit punt wordt nu exponentieel afgebeeld, dus $e^{(a+bi)\ln(z)}$.

$\ln(0)$ is ongedefinieerd, zelfs in de complexe getallen. Er is namelijk geen x met $e^x = 0$.

6.2

a) $f(A) = f(D \cdot r) = e^{(a+bi)\ln(D \cdot r)}$
$f(B) = f(r) = e^{(a+bi)\ln(r)}$

b) Schrijf $f(A)$ uit, gebruik dat $\ln(D \cdot r) = \ln(D) + \ln(r)$ en dat $e^{n+m} = e^n e^m$
$f(A) = e^{(a+bi)\cdot(\ln(D)+\ln(r))} = e^{(a+bi)\ln(D)} e^{(a+bi)\ln(r)} = e^{(a+bi)\ln(D)} f(B)$
Dus $factor = e^{(a+bi)\ln(D)}$

c) Invullen levert $factor = e^{\left(\frac{(2\pi)^2 \ln(256)}{(2\pi)^2+(\ln(256))^2} + i\frac{2\pi \ln(256)^2}{(2\pi)^2+(\ln(256))^2}\right)}$

d) *Factor* is te schrijven in de vorm $e^{c+\theta i} = e^c e^{\theta i} = re^{\theta i}$. Dus

$$r = e^{\frac{(2\pi)^2 \ln(256)}{(2\pi)^2+(\ln(256))^2}} = 22{,}58368453\ldots$$

$$\theta = \frac{2\pi \ln(256)^2}{(2\pi)^2 + (\ln(256))^2} = 2{,}75\ldots rad = 2{,}75\ldots \cdot \frac{180}{\pi}° = 157{,}6244961\ldots °$$

Meer toelichting op enkele wiskunde concepten in dit boek.

***Delen door complexe getal*:**
In hoofdstuk 3 over Complexe getallen is kort één techniek laten zien om twee complexe getallen te delen. We leggen de werking hieronder nog een keer uit, en presenteren een andere techniek wat minder rekenwerk levert, maar buiten het doel van dit boekje ging als we het in de hoofdstuk zelf presenteerden. Centraal staat het voorbeeld $\frac{2+3i}{4-i}$.

Manier 1, met stelsel van vergelijkingen
In het hoofdstuk hebben we uitgewerkt dat voor het reële deel in het imaginaire deel twee stelsels vergelijkingen in twee variabelen a en b naar voren kwam na het uitwerken van $\frac{2+3i}{4-i} = a + bi$.
Dit stelsel is (volgorde enigszins aangepast):

$$I: 4a + b = 2$$
$$II: -a + 4b = 3$$

We kunnen dit met een techniek genaamd *substitutie* oplossen: uit vergelijking *I* volgt dat $b = 2 - 4a$. Deze vullen we direct in de b uit vergelijking *II:* $-a + 4(2 - 4a) = 3$. Dit schrijven we om naar: $-17a + 8 = 3$, ofwel $a = 5/17$. Dit resultaat vul je weer in vergelijking *I:* $b = 2 - 4a = 2 - 4\left(\frac{5}{17}\right) = 14/17$.

Manier 2, met complexe geconjugeerde.
Als $z = a + bi$, dan is de complex geconjugeerde gelijk aan $\bar{z} = a - bi$. Praktisch gezien zet je een minteken voor het imaginaire deel. Meetkundig gezien spiegelen we het punt z in het complexe vlak over de reële as. Het streepje boven de z geeft aan dat we de complex geconjugeerde beschouwen.
Je hebt geleerd dat de *modulus* van een complex getal de afstand is tot het middelpunt: ofwel $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Wat gebeurd er als we een complex getal vermenigvuldigen met zijn complex geconjugeerde? Uitwerken geeft:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Deze vermenigvuldiging is dus gelijk aan de modulus in kwadraat: $r^2 = z \cdot \bar{z}$. Dit is een reëel getal.
Bij het uitwerken van een deling door een complex getal willen we de breuk schrijven in de vorm $a + bi$. Met behulp van de complex geconjugeerde kunnen we dit snel doen. Laat w *en* z twee complexe getallen zijn, dan:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}}$$

De noemer is nu reëel en gelijk aan de modulus van w. Laten we het getallenvoorbeeld uit hoofdstuk 3 nu gebruiken, en we zien dat we op hetzelfde antwoord uitkomen.

$$\frac{2+3i}{4-i} = \frac{(2+3i)\cdot\overline{(4-i)}}{(4-i)\cdot\overline{(4-i)}} = \frac{(2+3i)\cdot(4+i)}{(4-i)\cdot(4+i)} = \frac{8+12i+2i+3i^2}{4^2+1^2} = \frac{5+14i}{17} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$$

OPGAVE
Werk uit in de vorm $a + bi$: $= \frac{2\pi i}{\ln(256)+2\pi i}$

Een resultaat uit goniometrie
Op *bladzijde 12* wordt een uitwerking gegeven voor vermenigvuldigen van twee complexe getallen p en q. Deze uitwerking geven we nu compleet:

$$p \cdot q = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + i\sin(\beta))$$
$$= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i\sin(\alpha)\cos(\beta) + i\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) =$$
$$= \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de volgende rekenregels:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

Differentieerbaarheid van complexe functies

Als je wiskunde A of B op vwo niveau heb gevolgd, weet je wat een afgeleide van een functie in het reële geval betekend. Het complexe geval is vrijwel hetzelfde. Een complexe functie van een open omgeving rond een punt $z = a$ naar de complexe getallen heet *differentieerbaar* in $z = a$ als de volgende limiet bestaat:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Als deze limiet bestaat noemen we de uitkomst ervan de *afgeleide waarde* van *f* in *a*: $f'(a)$.
Let op dat de *h* in deze definitie een *complex getal* is en dus in het complexe vlak naar 0 gaat. Dit hoeft dus niet enkel via de reële as, maar in elke willekeurige richting.

Het nemen van afgeleiden van functies in complexe vlak gaat dus op analoge wijze als in het reële geval.

Voor veel functies is het eenvoudig na te gaan met de bovenstaande limietdefinitie of ze differentieerbaar zijn, maar er is een andere manier.
Stel $f(z) = u(z) + i\,v(z)$, dus de functie *f* is te schrijven als de som van zijn reële deel en imaginaire deel, welke elk een functie zijn van *z*. Als $z = x + iy$, dan zijn *u* en *v* reële functies van *x* en *y* reële getallen, dus $u = u(x,y)$ en $v = v(x,y)$ (lees: *u* is een functie van twee variabelen *x* en *y*). Als *f* differentieerbaar is, dan bestaat de limiet met $h \to 0$. Dit betekend ook dat de *u* en *v* differentieerbaar zijn in zowel *x* en *y*. We schrijven bijvoorbeeld $\frac{\partial u}{\partial x}$ voor de *partiële afgeleide van u naar x* of $\frac{\partial v}{\partial y}$ voor de *partiële afgeleide van v naar y*.
We mogen elke manier gebruiken waarop *h* naar 0 gaat in het complexe vlak. We doen dit op twee manieren, we krijgen dan twee interessante vergelijkingen. Let goed op het verschil tussen de vergelijkingen.

h gaat naar 0 via de x-as:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) + i\,v(x+h,y) - u(x,y) - i\,v(x,y)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) - u(x,y) + i\,v(x+h,y) - i\,v(x,y)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

h gaat naar 0 via de y-as (let op de i h in de breuk, we houden h reëel):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{i\,h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x,y+h) + i\,v(x,y+h) - u(x,y) - i\,v(x,y+h)}{i\,h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-i\,u(x,y+h) + iu(x,y) + v(x,y+h) - v(x,y)}{h} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

In de laatste regel hebben we gebruikt dat $\frac{1}{i} = -i$ (ga na!)

De functie *f* is gegeven differentieerbaar, dus de afgeleide is uniek, dus bovenstaande vergelijkingen zijn gelijk. In het bijzonder zijn de reële en imaginaire delen gelijk, we krijgen de **Cauchy-Riemann vergelijkingen:**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Dus als de functie f differentieerbaar, gelden de Cauchy-Riemann vergelijkingen. Helaas hebben

we meer andere wiskunde nodig om te bewijzen dat óók geldt: als de functie *f = u+iv* voldoet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen en *u* en *v* zijn continu, dan is *f* differentieerbaar.

In hoofdstuk 4 over de exponentiële functie ben je al nagegaan dat de exponentiële functie differentieerbaar is. Hierbij hebben we niet expliciet de Cauchy-Riemann vergelijkingen gebruikt, maar als je goed kijkt hebben we dat eigenlijk wél gedaan.

Als extra opgave kan je nu weer dit bewijs geven: ga na dat $f(a+bi) = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$ differentieerbaar is door na te gaan of de functie aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoet.

Differentieerbaarheid en conforme afbeeldingen
Een conforme afbeelding is een afbeelding waarbij hoeken lokaal bewaard blijven. Anders gezegd: als in het origineel twee lijnen elkaar loodrecht snijden in een punt, dan snijden de twee beeldlijnen ook elkaar loodrecht in het bijhorende beeldpunt.

Er is een makkelijke relatie tussen differentieerbaarheid en conformiteit: als de functie *f* differentieerbaar is in een (open) gebied *U*, dan is de afbeelding van *U* conform. Het bewijs volgt uit de Cauchy-Riemann vergelijkingen, en weer is meer nodig dan standaard-vwo wiskunde om dit te bewijzen (je moet weten wat een matrix is en weten hoe je een matrix vermenigvuldigd met een vector). Heb je deze kennis, dan is het idee als volgt:

- De Jacobiaan matrix is een matrix met afgeleiden (in de rij staat partiële afgeleide *van u* en *v*, en in de kolommen de partiële afgeleide *naar x* en *y)*. Met behulp van de Cauchy Riemann vergelijkingen krijgen we:
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}$$
- Matrices van deze vorm is de matrix representatie van een complex getal (zie onder), en vermenigvuldiging is met een complex getal geeft rotatie en vergroting, deze transformaties behouden beiden altijd hoeken. Dus de afbeelding is conform.

Als $p + iq$ een complex getal, dan is $\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}$ de matrix representatie. Het voldoet aan precies alle eigenschappen voor complexe getallen. Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen geeft dezelfde vorm (ga na!) en de zogeheten determinant is gelijk aan $p^2 + q^2$ dus gelijk aan modulus in kwadraat.

e-macht en logaritme
Dit stuk is bedoeld voor het geval je nog geen kennis heb gemaakt met de e-macht en natuurlijke logaritme op school.

Je kent de zogeheten machtsfuncties, x^a, bijvoorbeeld x^2, x^5 of $\sqrt{x}$. Hierin staat in het 'exponent' een getal *a* boven de *x:* x^a*.* Bij exponentiële functies staat de x in de exponent en het getal *a* is de zogeheten groeifactor: a^x. Bijvoorbeeld 2^x, 5^x of $\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Voor exponentiële functies gelden de volgende rekenregels:
$a^{n+m} = a^n a^m$, $a^{n-m} = a^n / a^m$, $a^{n \cdot m} = (a^n)^m = (a^m)^n$.

Willen we een vergelijking met een exponentiële functie oplossen, zoals $2^x = 4$, zouden we in eerste instantie wat kunnen proberen. Hier lijkt $x = 2$ te werken. Maar hoe zit dat met $2^x = 5$? Proberen: $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, dus x moet ergens dicht bij 2 liggen: $2^{2,1} = 4.287$, $2^{2,2} = 4.594$, $2^{2.3} = 4.925$, $2^{2,4} = 5{,}278$. x moet dus ergens tussen 2,3 en 2,4 zitten, gaan wij deze procedure af dan vinden we bijvoorbeeld voor $x = 2.321928$ dat $2^{2,2321928} = 4.999999671$. Bijna, maar niet

exact. We kunnen dit exact maken door te *definiëren* dat $x = {}^2\log(5)$ de exponent is waarvoor geldt $2^x = 5$. Dit getal noemen we een logaritme met grondtal 2 van 5. In het algemeen $a^x = b$ heeft als oplossing $x = {}^a\log(b)$.

De logaritmische functie $\log(x)$ heeft als grondtal 10, dus eigenlijk ${}^{10}\log(x)$ schrijven, maar voor gemak schrijven we $\log(x)$. Deze functie vind je ook terug op een rekenmachine. Wil je de decimalen van ${}^2\log(5)$ weten, moet je de volgende rekenregel gebruiken:

$$ {}^a\log(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)} $$

In je rekenmachine voer je dus log(5) / log(2)in.

Een speciale exponentiële functie is de e-macht. Als grondtal neem je het Eulergetal $e = 2{,}71828182\ldots$

Dit getal komt op een aantal plaatsen terug, bijvoorbeeld:

$$ e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots $$

of

$$ e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n $$

Een ander bijzonderheid is dat de functie $f(x) = e^x$ zijn eigen afgeleide is: $f'(x) = e^x$. In andere woorden: als je de grafiek van e^x tekent en je bepaalt de helling door elk punt, krijg je als hellingsgetal juist de functiewaarde terug. Dit is een van de redenen waarom de e-macht op veel plaatsen terugkomt, ook in deze scriptie!
De oplossing van een vergelijking $e^x = b$ schrijven we als $x = \ln(b)$. De functie $\ln(x)$ heet ook wel de natuurlijke logaritme. De meeste rekenmachines hebben ook voor de ln een knop.

De complexe e-macht goed gedefinieerd
In dit stukje wordt de e-macht nog verder gedefinieerd dan in het boekje is gedaan.
In het reële geval ken je de volgende eigenschappen van een exponentiële functie:

$$ e^a \cdot e^b = e^{a+b} $$
$$ (e^a)^b = e^{a \cdot b} $$

Een andere kenmerkende eigenschap is dat $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, de afgeleide van de functie is de functie zelf.
We willen dat deze drie eigenschappen ook gelden voor het complexe geval. Stel $z = a + bi$, geeft de e-macht het complexe getal $e^z = e^{a+bi}$.
Omdat we willen dat aan de eerste eigenschap wordt voldaan, weten we al dat $e^z = e^a e^{ib}$, dus de vraag is eigenlijk: is e^{ib} te schrijven als $u(b) + i\ v(b)$? Hierin hebben we u en v functies van b gemaakt.

We kunnen twee eigenschappen gebruiken: we willen namelijk in elk geval dat $e^0 = 1$ en dat $\frac{d}{dx} e^{ix} = i\ e^{ix}$ (ga na dat dit klopt).
We gebruiken dit in onze wens dat $e^{ib} = u(b) + i\ v(b)$
Uit $e^0 = 1$ hebben we, met $b = 0$:

$$ u(0) = 1 $$
$$ v(0) = 0 $$

Uit $\frac{d}{dx} e^{ix} = i\ e^{ix}$ volgt, met $x = b$:

$$ \frac{d}{dx} u(b) = -v(b) $$
$$ \frac{d}{dx} v(b) = u(b) $$

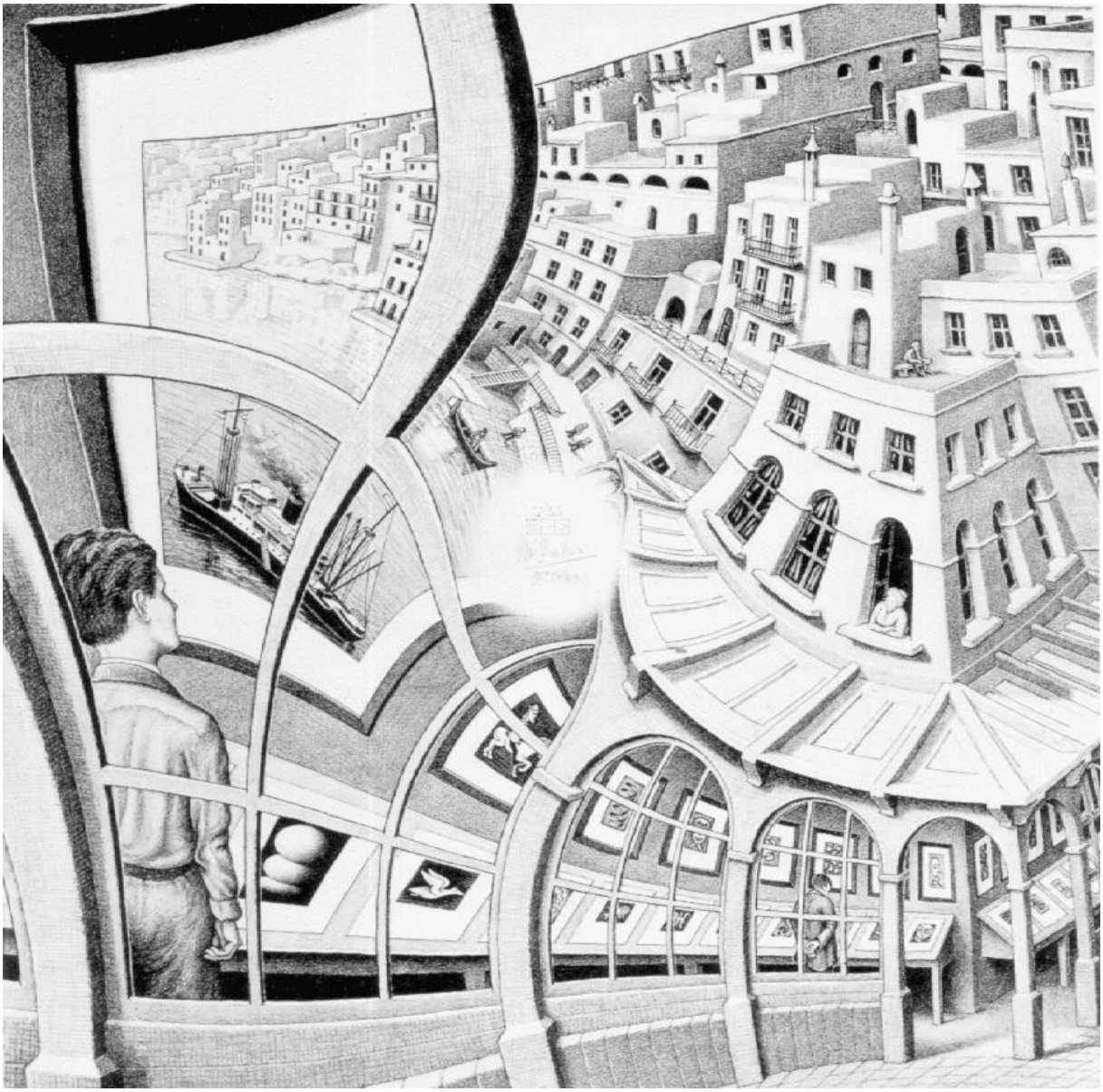
Er zijn niet veel functies die aan deze eigenschappen voldoen. Het blijkt dat de volgende oplossing het beste werkt: $e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b)$

OPGAVE:
Laat zien dat voor $u(b) = \cos(b)$ en $v(b) = \sin(b)$ inderdaad aan de bovenstaande vier vergelijkingen wordt voldaan door het in te vullen.

We hebben de volgende conclusie: voor $z = a + bi$ een complex getal definiëren we voor de exponentiële functie: $e^z = e^{a+bi} = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$.

Appendix Masterscriptie

Een wiskundige verantwoording van het manuscript van R.M.J. Vooys (2013) 'Een kijk achter de wiskundige structuur van De Prententoonstelling van M.C. Escher'



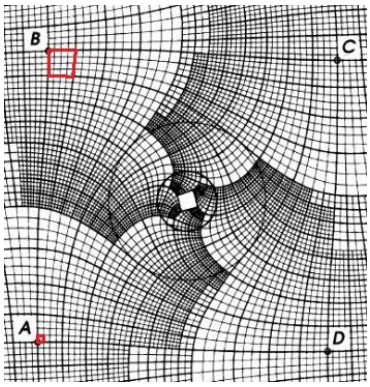
Inleiding

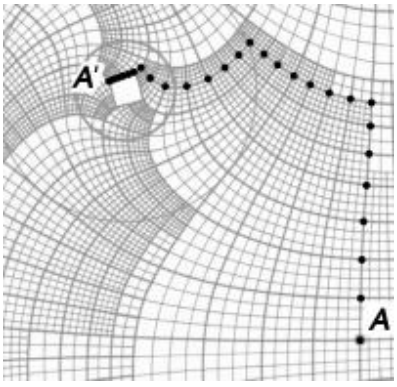
In 2000 beschreven Hendrik Lenstra en Bart de Smit de wiskundige structuur achter de *Prentententoonstelling* vanuit een algebraïsch topologische benadering, zie [Lenstra & Smit]. Ik zal de wiskundige structuur vanuit een complex analytisch perspectief bekijken. Deze benadering heb ik ook vertaald naar een niveau dat voor 4/5 vwo leerlingen te volgen is en vormt de basis van het manuscript. Dit document verantwoort de gebruikte wiskunde in het manuscript. Dit document is zodanig opgezet dat het manuscript niet er bij gepakt hoeft te worden, echter verwijs ik wel soms naar het manuscript als ik dat noodzakelijk vind.
We beginnen eerst met een beschouwing van de *Prentententoonstelling*, om zo tot een lijst met vragen te komen die we gaan beantwoorden vanuit de complexe analyse, waar de rest van dit document aan gewijd zal worden. Hoofdstuk 1 heeft een wat informelere insteek dan hoofdstuk 2, een deel is ook gekopieerd uit het manuscript.

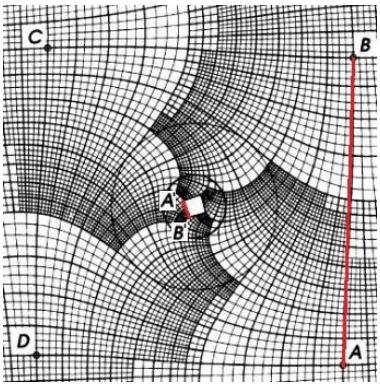
1 *De Prentententoonstelling* informeel bekeken

In de figuur op de voorpagina staat *De Prententoonstelling* afgebeeld. Eén van de voornaamste opvallendheden is het witte gat in het midden, met de handteking van Escher. De vraag die Hendrik Lenstra stelde is of er een wiskundige reden zou kunnen zijn waardoor Escher het gat niet kon opvullen. In 2000 werd deze vraag beantwoord door Hendrik Lenstra, het is inderdaad mogelijk om het gat te dichten. Onder leiding van Bart de Smit werden in de jaren erna gewerkt met een computerprogamma van Joost Batenburg en twee tekenaars Jacqueline Hofstra en Hans Richter om een goede invulling te geven aan de witte vlek van de *Prentententoonstelling,* zie escherdroste.math.leidenuniv.nl.
In *De Toverspiegel van M.C. Escher* schreef Bruno Ernst het volgende: Escher begon met het idee dat het mogelijk moet zijn om een ringvormige uitdijing uit te beelden, een circulaire expansie zonder begin of eind. Escher probeerde aanvankelijk het idee met rechte lijnen te verwezenlijken. Intuïtief kwam hij echter tot de gebogen lijnen. De oorspronkelijke vierkantjes blijven dan ook beter 'vierkant'.
Het rooster dat ten grondslag ligt aan *De Prentententoonstelling,* met de hand gemaakt door Escher, geeft meer inzichten als we wandelingen maken om en buiten het witte gat:

- Een vierkant rondje om het gat geeft vergroting van $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ mee (rondje *ABCDA*, het rode vierkantje bij *A* wordt vier keer groter bij *B*)
- Sommige 'wandelingen' in het rooster buiten het witte gat zijn niet gesloten, en komen dichter bij het midden van de prent terecht (zie punt *A* naar *A'*)
- Er treedt een Droste-effect op: vierkant *ABCD* wordt 22,5 keer verkleind en 157° geroteerd, deze verkleining zal zich achter het door Escher witte gat moeten bevinden.

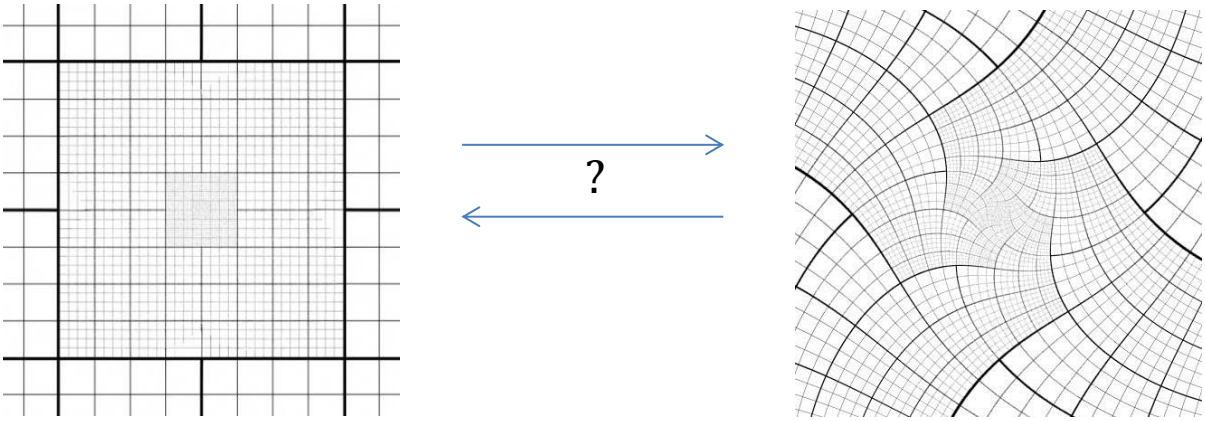






Een iets formelere blik op *De Prentententoonstelling*

We weten dat er een Droste-effect op zal treden, dus we gaan werken met wat we vanaf nu een *Drosterooster* noemen (figuur links). Dit is algebraïsch gezegd $\mathbb{R}^2/<256>$. We identificeren z_1, z_2 in het vlak met elkaar als deze een factor 256 van elkaar verschillen: $z_1 = z_2 \cdot 256^k$ voor zekere gehele k. Het eindresultaat, een vervormde rooster met cyclische expansie zonder begin of eind, zullen we vanaf hier refereren als het *Escherrooster (*figuur rechts).



Drosterooster **Escherrooster**

De centrale vragen zijn: kunnen we een afbeelding *f:* $Drosterooster \rightarrow Escherrooster$ maken dat aan alle eisen voldoet? Wat zijn de minimale eisen waaraan *f* moet voldoen?

Uit vorige hoofdstuk zien we dat de afbeelding moet 'kloppen':

- Kleuren uit het Drosterooster moet afgebeeld worden op dezelfde kleur in het Escherrooster (zwart op zwart, wit op wit). Zo hadden punten A en A' ook dezelfde kleur.
- De afbeelding moet conform zijn.

Conformiteit wordt gegeven uit het citaat van Bruno Ernst: "vierkantjes moeten vierkant blijven". In het volgende hoofdstuk zullen we het begrip conformiteit verder formaliseren vanuit de complexe analyse.

Het volgende hoofdstuk is als volgt opgebouwd:

- Definitie van conformiteit
- "Kloppende afbeelding" verder formaliseren
- Werking van complexe exponentiële functie en complexe logaritme
- Een resultaat over complexe torussen
- Toepassing op het Drosterooster en Escherrooster

2 COMPLEXE ANALYSE

In *De Toverspiegel van M.C. Escher* schreef Bruno Ernst de volgende cruciale zin: "*Escher probeerde aanvankelijk het idee met rechte lijnen te verwezenlijken. Intuïtief kwam hij echter tot de gebogen lijnen. De oorspronkelijke vierkantjes blijven dan ook beter 'vierkant'*." Wiskundig gezien betekent dit dat het plaatje wat Escher aan het constueren was *conform* moet zijn.

2.1 Conforme afbeeldingen

De volgende definities en feiten komen uit [Greene & Krantz]:

> **Definitie**: Een kromme is een functie γ van een gesloten interval $I \subset \mathbb{R}$ naar $\mathbb{C}$. We noteren: $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\,\gamma_2(t)$ met $\gamma_1, \gamma_2 \colon I \to \mathbb{R}$.
>
> **Definitie:** Een kromme $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heet continu in $[a,b]$ als zowel γ_1 als γ_2 continu in $[a,b]$ zijn. De kromme is continu differentieerbaar (of C^1) op $[a,b]$ als γ_1 en γ_2 continu differentieerbaar zijn. We noteren: $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_1}{dt} + i\frac{d\gamma_2}{dt}$.
>
> **Feit 1:** Zij *f* een continue differentieerbare (C^1) functie $f \colon U \to \mathbb{C}$ met $U \subset \mathbb{C}$ open. Schrijf $z = x + iy$ en $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ met u en v reëelwaardige functies. Er geldt: *f* is holomorf (complex differentieerbaar) dan en slechts dan u en v aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen voldoen: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ en $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.
>
> **Feit 2:** Als $f \colon U \to \mathbb{C}$ continu differentieerbaar is en *f* voldoet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen, dan $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$.

Het interval $I \subset \mathbb{R}$ is vanaf nu zodanig dat $0 \in I$. De volgende definitie van conformiteit komt uit [Shurman]. We beschouwen het argument van een complex getal tussen in het interval $[0, 2\pi)$.

> **Definitie:** Zij *f* een C^1-functie $f \colon U \to \mathbb{C}$ met $U \subset \mathbb{C}$ open. Zij $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Dan heet *f* conform in z_0 als er een $r \in \mathbb{R}^+$ en een $\theta \in [0,2\pi)$ bestaan zodat voor iedere continu differentieerbare kromme binnen *U* door z_0, (noteer: $\gamma \colon I \to U, \gamma(0) = (x_0, y_0)$) geldt:
>
> - $|(f \circ \gamma)'(0)| = r \cdot |\gamma'(0)|$
> - $\arg\big((f \circ \gamma)'(0)\big) = \theta + \arg\big(\gamma'(0)\big)$.
>
> Tot slot noemen we *f* conform als *f* conform is in elk punt van *U*.

Een voorstelling van "*f* conform in z_0" is als voor elk paar krommen door z_0 de hoek tussen de twee krommen door z_0 bij de afbeelding behouden blijft. In de definitie hierboven worden raakvectoren door (x_0, y_0) met een factor r uitgerekt en gedraaid onder een hoek θ, en deze waarden van r en θ zijn onafhankelijk van de kromme γ.
De volgende stelling zegt dat conformiteit van een complexe functie *f* hetzelfde is als holomorf zijn. Dit gaan we bewijzen.

> **Stelling 1**: Zij $f \colon U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ open en schrijf $f = u + iv$ met u, v continu differentieerbaar. Zij $z_0 \in U$. Dan is *f* conform in z_0 dan en slechts dan als *f* complex differentieerbaar is in z_0 en $|f'(z_0)| \neq 0$.

Bewijs: ("⟹") Stel $f = u + iv$ is conform in $z_0 = x_0 + iy_0$. We laten zien dat f voldoet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen met behulp van 'Feit 2'.
Zij γ, δ twee krommen zoals in de definitie van conformiteit, met $\gamma(t) = z_0 + t$, en $\delta(t) = z_0 + it$. We hebben dus:

- $(f \circ \gamma)(t) = u(x_0 + t, y_0) + iv(x_0 + t, y_0)$
- $(f \circ \delta)(t) = u(x_0, y_0 + t) + iv(x_0, y_0 + t)$.

Uit de definite van conformiteit volgt dat er een $r \in \mathbb{R}^+$ en $\theta \in [0,2\pi)$ bestaan zodat:

- $|(f \circ \gamma)'(0)| = r \cdot |\gamma'(0)|$, $|(f \circ \delta)'(0)| = r \cdot |\delta'(0)|$
- $\arg\big((f \circ \gamma)'(0)\big) = \theta + \arg\big(\gamma'(0)\big)$. $\arg\big((f \circ \delta)'(0)\big) = \theta + \arg\big(\delta'(0)\big)$.

We rekenen nu eerst $(f \circ \delta)'(0)$ en $(f \circ \gamma)'(0)$ expliciteit uit door middel van de kettingregel ($\kappa(t) = \kappa_1(t) + i\kappa_2(t)$ een willekeurige continu differentieerbare kromme):

$$(f \circ \kappa)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\kappa(t)\big)\kappa_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\kappa(t)\big)\kappa_2'(t).$$

Invullen van $(f \circ \gamma)(t)$ en $(f \circ \delta)(t)$ geeft (2):

- $(f \circ \gamma)'(0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \cdot 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \cdot 0$
  $= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- $(f \circ \delta)'(0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \cdot 0 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \cdot i$
  $= i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$

Er geldt: $\gamma'(0) = 1, \delta'(0) = i$, dus $\gamma'(0) = -i \cdot \delta'(0)$. Met de kettingregel volgt dan:
$(f \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(0)\big)\gamma_1'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(0)\big)\gamma_2'(0)$
$= -i \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\big(\delta(0)\big)\delta_1'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\delta(0)\big)\delta_2'(0)\right)$
$= -i \cdot (f \circ \delta)'(0)$.
We kunnen nu concluderen dat $\frac{\partial f}{\partial x} = -i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$. Aan Feit 2 is nu voldaan, we hebben nu dat f holomorf is.
Verder geeft de definitie van conformteit dat er een $r \in \mathbb{R}^+$ bestaat zodat $|(f \circ \gamma)'(0)| = r \cdot |\gamma'(0)|$. Samen met $\gamma'(0) = 1$ en (1) hebben we dat $f'(z_0) \neq 0$.
("⟸") Zij f complex differentieerbaar in z_0 met $f'(z_0) \neq 0$. Neem $r = |f'(z_0)|$, $\theta = \arg\big(f'(z_0)\big)$. Zij γ een C^1 kromme met $\gamma(0) = z_0$. We hebben via de kettingregel (1) $(f \circ \gamma)'(0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(0)$. Hieruit volgt:

- $|(f \circ \gamma)'(0)| = |f'(z_0)| \cdot |\gamma'(0)| = r \cdot |\gamma'(0)|$
- $\arg((f \circ \gamma)') = \arg(|f'(z_0)| \cdot |\gamma'(0)|)$
  $= \arg(|f'(z_0)|) + \arg\big(\gamma'(0)\big) = \theta + \arg\big(\gamma'(0)\big)$.

Per definitie geldt nu dat f conform is in z_0. □

De stelling geeft ons dat een conforme afbeelding complex differentieerbaar is, maar ook dat de complex differentieerbare functies conform zijn. Voor ons doel is betekent dat als we een 'kloppende afbeelding' willen maken we ons kunnen beperken tot *holomorfe functies*.

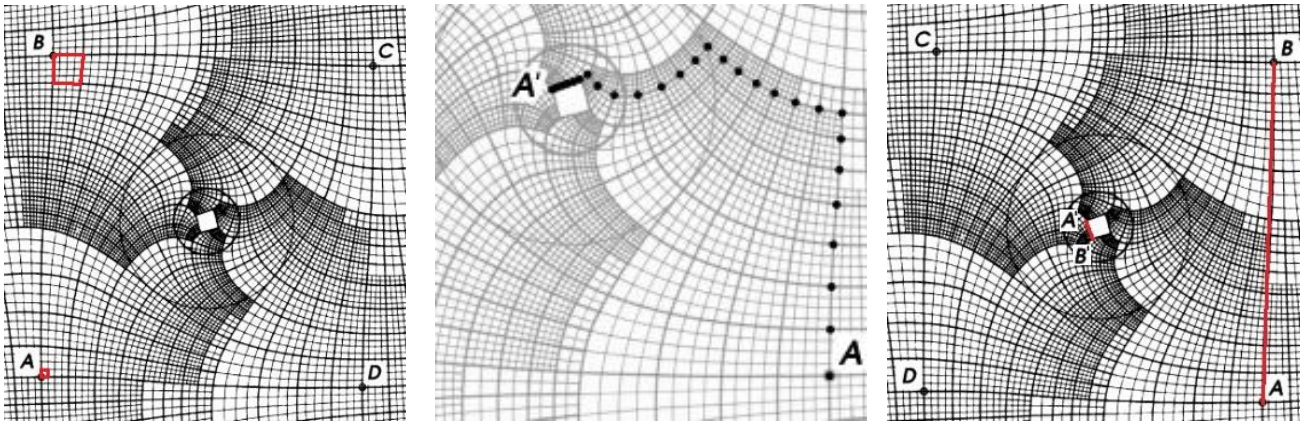
2.2 Wat bedoelen we met een 'kloppende afbeelding'?

We noemden al dat we de afbeelding van een Drosterooster naar een Escherrooster conform willen hebben, en dat kleuren behouden blijven.

We bekijken vanaf nu het Drosterooster en het uiteindelijke Escherrooster in het complexe vlak zonder oorsprong: $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. We zien namelijk in de originele prent een wit gat in het midden, vermoedelijk gaat er iets mis in de oorsprong, dus voorlopig laten we de oorsprong weg. Ook in het Drosterooster 'zoomen we in' naar het midden toe, met het punt 0 gebeurd niets, dus laten we ook buiten beschouwing.

We hebben dus een $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ die holomorf is in heel $\mathbb{C}^*$ en dat voor iedere $z \in \mathbb{C}^*$ geldt $f'(z) \neq 0$, zodat stelling 1 zegt dat f conform is over heel $\mathbb{C}^*$.
Het behouden van kleuren gebeurt op twee manieren in het Drosterooster en in het Escherrooster (zie ook de figuren hieronder):

- Allereerst de observatie dat een rondje om het witte gat in het Escherrooster in werkelijkheid een vergroting van 256 met zich meebrengt (linkerfiguur). We hebben dus $g(z) = g(256z)$ voor alle z in het Drosterooster, met $g: \mathbb{C}^* \to \{zwart, wit\}$ een afbeelding waarin elk punt van $\mathbb{C}^*$ een kleur wordt toegewezen van het Drosteplaatje.
- Ook hadden we geobserveerd in het Escherrooster dat er wandelingen zijn vanuit punten die uitkomen 'binnen' het witte gat. Zo moeten punt A en punt A' in de middelste figuur dezelfde kleur hebben, en dit geldt voor alle punten op de zijde AB in de figuur rechts (aangegeven met de rode lijn). Dit gaf de aanleiding tot het vermoeden van het Droste-effect, met andere worden de inhoud van vierkant $ABCD$ geroteerd en verkleind is binnen het vierkantje $A'B'C'D'$. We definiëren het complexe getal $\xi = |P|/|P'|$ voor P op zijde AB, P' op $A'B'$. Het blijkt door handmatig meten dat ξ nagenoeg constant is, dus we nemen aan dat dit een vast complex getal is en ook geldt voor andere punten binnen $ABCD$. We nemen de functie $h: \mathbb{C}^* \to \{zwart, wit\}$ in het Escherrooster zodanig dat $h(\xi z) = h(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}^*$.



Voor de afbeelding f waar we naar op zoek zijn moet dan gelden dat $h = g \circ f$. De g brengt in rekening de factor 256 als je een wandeling gaat maken om het witte gat, het Drosterooster zal dus moeten voldoen aan een vergrotingsfactor van 256. De h brengt in rekening het feit dat een vierkante wandeling buiten het witte gat (zoals in middelste figuur) in werkelijkheid dezelfde begin en eindpunten hebben. De factor ξ geeft dan aan waar punt P' moet gaan zijn als je de wandeling vanaf punt Pbegint: $P' = P \cdot \xi$.
De vraag is nu: "geef zo'n afbeelding f en een verband tussen ξ en het getal 256". Het zal blijken dat we de pullback afbeelding van de exponentiële afbeelding nodig zullen hebben en een vermenigvuldiging met een complex getal α. Deze twee aspecten bekijken we nu in meer detail.

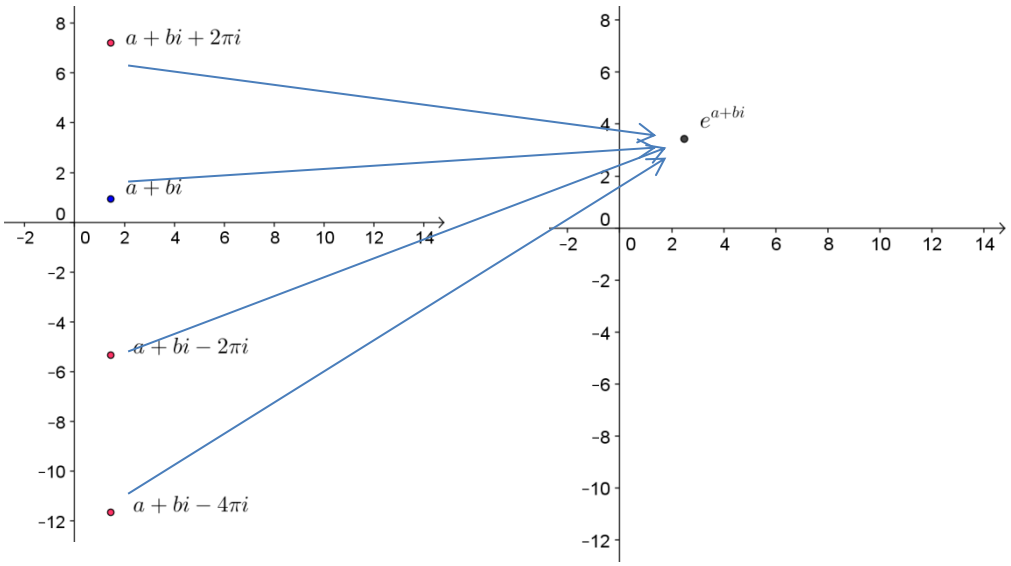
2.3 De complexe exponentiële functie en de complexe logaritme

De complexe functie exp: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ is een holomorfe functie en heeft de eigenschap dat $\frac{d}{dz}e^z = e^z \neq 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. De exponentiële functie is dus een conforme functie over $\mathbb{C}$. De complexe exponentiële functie is periodiek met periode $2\pi i$ vanwege de formule van Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Met andere woorden: $e^z = e^{z+k\cdot 2\pi i}$ voor iedere $k \in \mathbb{Z}$.

De exponentiële functie heeft een inverse, namelijk de logaritme, maar deze is niet eenduidig gedefinieerd vanwege de periodiciteit. Voor $w = re^{i\theta}$ hebben we namelijk:

$$\log(w) = \log\left(r\, e^{i\theta}\right) = \log\left(r\, e^{i\theta + k\cdot 2\pi i}\right) = \log(r) + i(\theta + k \cdot 2\pi).$$

Voor verschillende waarde van $k \in \mathbb{Z}$ hebben we zogeheten 'takken' van de complexe logaritme. Het is belangrijk als je de 'inverse' van een exponentiële afbeelding wilt hebben je duidelijk maakt welke 'tak' je pakt. Om dit probleem meer visueel te maken: in de figuur hieronder is een punt $z = a + bi$ aangegeven en daarboven en onder in de imaginaire richting zijn de punten $z + k \cdot 2\pi i$ aangegeven. De complexe exponentiële functie zal al deze punten afbeelden op $e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$.



Echter willen we de logaritme van het punt rechts nemen, moeten we eerst zeggen welke 'tak' (welke pijl) we pakken.

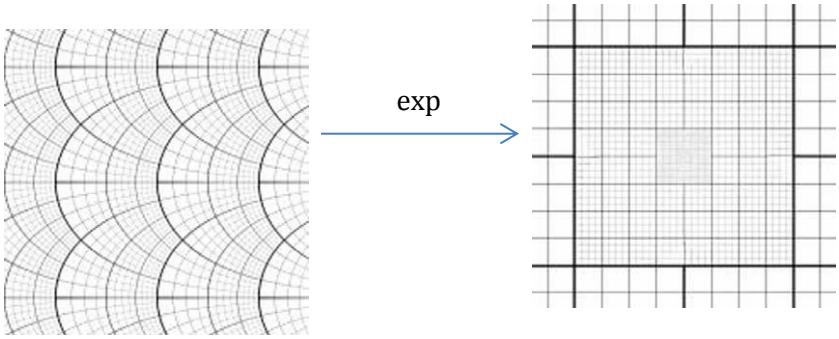
De exponentiële afbeelding heeft de volgende eigenschappen:

- Verticale lijnen in het origineel door het punt $(a, 0)$ worden afgebeeld op cirkels met straal e^a.
- Horizontale lijnen in het orgineel door het punt $(0, b)$ worden afgebeeld naar een halfrechte vanuit de oorsprong, welke door het punt$(\cos(b)\,, \sin(b))$ gaat.

In het manuscript maken we daarbij de volgende voorstelling. Neem een A4 rooster papier met horizontale lijnen rood en verticale lijnen blauw. Rollen we het papier op langs de blauwe lijnen in een koker en kijken we er door heen, zien we dat de blauwe lijnen cirkels zijn geworden en de rode lijnen zijn halfrechten. Stel je je nu voor dat het papier oneindig lang is, dan heb je in principe de complex exponentiële afbeelding. Deze voorstelling gebruiken we later nog een keer.

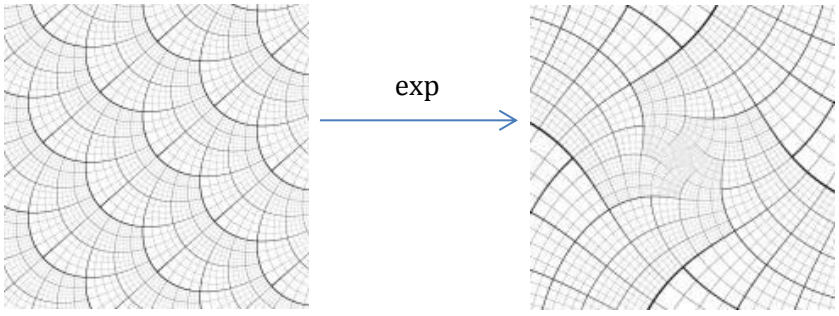
2.4 De exponentiële afbeelding toegepast

We zullen de exponentiële afbeelding gaan gebruiken. We willen beginnen met het Drosterooster en we bekijken eerst een rooster dat, na de exponentiële afbeelding, het Drosterooster geeft. Dat blijkt het volgende te zijn:

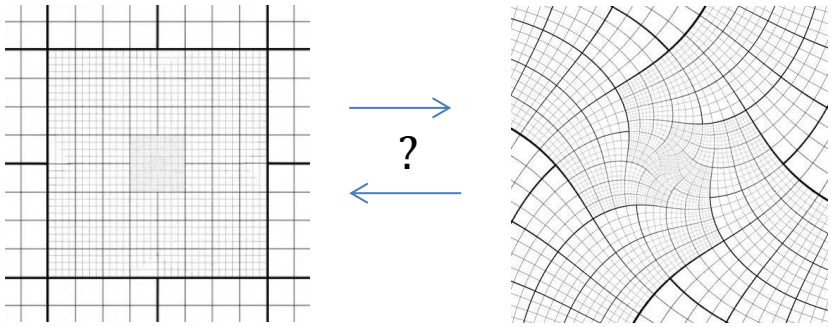


In principe hebben we gewoon een inverse van de exponentiële functie gebruikt en kan je het linkerplaatje gewoon het 'logaritmische rooster' noemen, maar we hebben eerder gesproken over verschillende takken van de complexe logaritme. Als voor z in het Drosterooster geldt $z = \exp(w)$ voor één w in het linkerrooster, dan geldt ook dat $z = \exp(w + k \cdot 2\pi i)$ voor elke geheeltallige k. Je kan dus beter niet spreken van een afbeelding van Drosterooster naar het 'logaritmisch rooster', maar wel kijken hoe het rooster er uit moet zien dat na de exponentiële afbeelding het Drosterooster zal geven. Het probleem is echter opgelost als je het argument van het complexe getal in het Drosterooster beperkt tot $[0,2\pi)$ en dus de principiële tak (k=0) neemt.

Een dergelijke tactiek gebruiken we ook met het Echerrooster: we bekijken voor elk punt z in het Escherrooster welke punten w in een 'logaritmisch rooster' naar z worden afgebeeld met de exponentiële afbeelding. Dat blijkt er als volgt uit te zien:

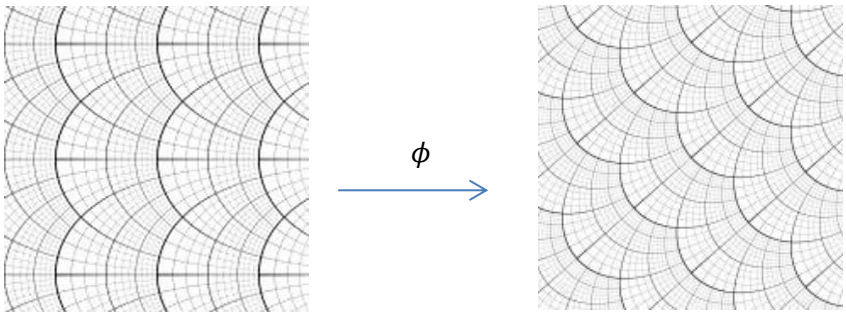


We begonnen met de vraag hoe een afbeelding tussen het Drosterooster en het Escherrooster eruit kan zien:



Drosterooster **Escherrooster**

De inverse van de exponentiële afbeelding geeft twee andere roosters, en de vraag kan nu gewijzigd worden hoe de afbeelding ϕ tussen deze twee logaritmische roosters eruit ziet:



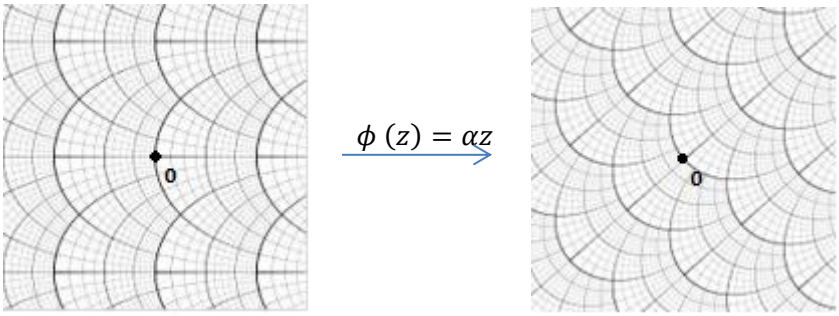
Dit blijkt niet anders te zijn dan vermenigvuldiging met een complex getal α.

2.5 Een resultaat over complexe torussen

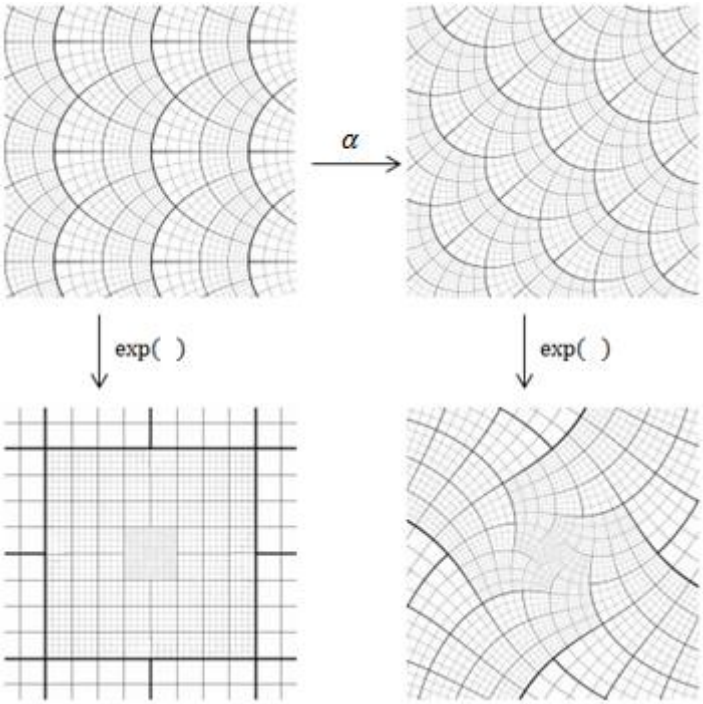
Op het oog lijkt het erop dat het rechter een verkleinde en geroteerde versie is van het linkerplaatje. Rotatie en vergroting van een figuur kan het resultaat zijn van vermenigvuldiging met een complex getal α. Het bewijs dat dit ook daadwerkelijk zo is volgt uit de volgende stelling op complexe torussen, zie voor een bewijs [Silverman, Ch. VI.4, Th. 4.1].

> Zij $\Lambda_1$en $\Lambda_2$twee roosters in $\mathbb{C}$ en zij $\alpha \in \mathbb{C}$ met de eigenschap $\alpha\Lambda_1 \subset \Lambda_2$. Dan induceert scalaire vermenigvuldiging met α een welgedefinieerde holomorf homomorfisme $\phi_\alpha: \mathbb{C}/\Lambda_1 \to \mathbb{C}/\Lambda_2, \phi_\alpha(z) = \alpha z \pmod{\Lambda_2}$.
>
> **Stelling:** De volgende associatie is een bijectie:
>
> $$\{\alpha \in \mathbb{C}: \alpha\Lambda_1 \subset \Lambda_2\} \to \begin{Bmatrix} holomorfe\ afbeeldingen \\ \phi: \mathbb{C}/\Lambda_1 \to \mathbb{C}/\Lambda_2 \\ met\ \phi(0) = 0 \end{Bmatrix}$$
> $$\alpha \to \phi_\alpha.$$

Deze stelling passen we nu toe op de afbeelding ϕ. We wijzen een punt 0 aan in het linkerrooster dat op 0 wordt afgebeeld in het rechterrooster. We willen dat deze afbeelding $holomorf$ is, dan geeft de stelling namelijk dat er een $\alpha \in \mathbb{C}$ bestaat zodat na vermenigvulding met α het linkerrooster bevat is in het rechterrooster. Het bewijs in [Silverman] laat ook zien dat deze α *uniek* is.



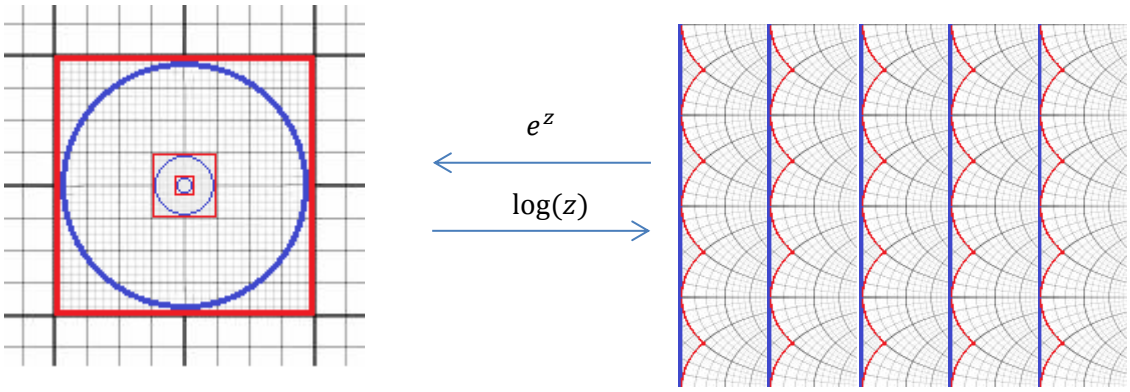
Samengevat lijken we het volgende recept te hebben voor de afbeelding van Droste-rooster naar Escherrooster en andersom. Uit het plaatje lijkt de volgende 'formule' te gelden om van het Drosterooster het Escherrooster te krijgen: $f(z) = e^{\alpha \log(z)}$. Deze formule geldt alleen als we de principïele tak van de logaritme nemen.



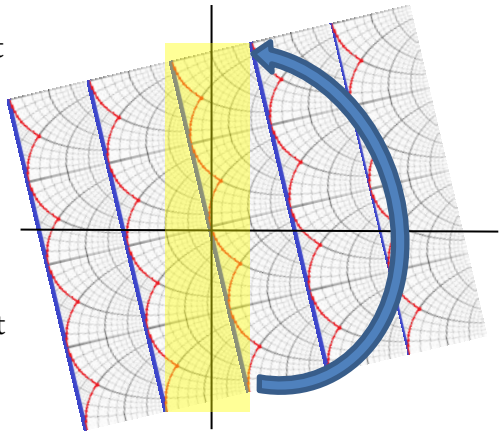
Wat nog rest is een specifieke waarde van het complexe getal α. De laatste paragrafen van dit hoofdstuk is gewijd aan twee manieren voor het vinden van α. De eerste manier wordt gebruikt in het manuscript, de andere manier gebruikt logaritmische spiralen. Deze twee manieren zijn overwogen voor in het manuscript en zijn niet helemaal hetzelfde, al komt natuurlijk wel hetzelfde antwoord uit.

2.6 Complexe getal α: oprollen van het rooster

In een vorige paragraaf is kort een voorstelling gegeven van de complex exponentiële afbeelding: het oprollen van een rooster. We doen dit nu hetzelfde, maar nu met het logaritmische rooster uit het Drosterooster. Zie de volgende figuren, deze staan ook n het manuscript.



De exponentiële functie maakt van verticale lijnen cirkels, dat zien we in de figuur hierboven terug. Rollen we het rechterplaatje op en kijken we er door heen, moeten we de linkerplaatje terugzien. Draaien we het linkerplaatje eerst onder een hoek en rollen het dán recht omhoog op (ofwel: schuin oprollen) kunnen we het Escherrooster terugkrijgen. Het draaien onder een hoek komt overeen met het vermenigvuldigen met α. Het is bij het oprollen belangrijk dat de bovenste uiteinde van een blauwe lijn aansluit aan de onderste uitende van de rechter blauwe lijn.



In de figuren op de volgende pagina wordt stapsgewijs duidelijk gemaakt hoe we aan het complexe getal $\alpha = a + bi = re^{i\theta}$ kunnen komen. Door het goed oprollen en bijhouden van een hoekpunt op de rechthoek komen we uit op de volgende vergelijking.

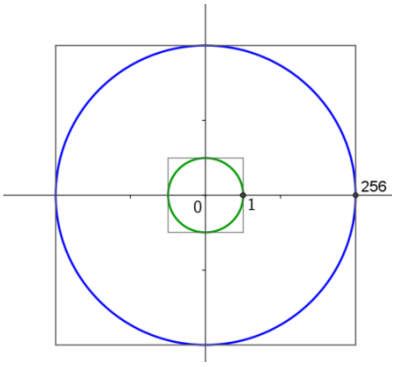
$$2\pi i = re^{i\theta}(2\pi i + \ln(256)).$$

Hieruit volgt:

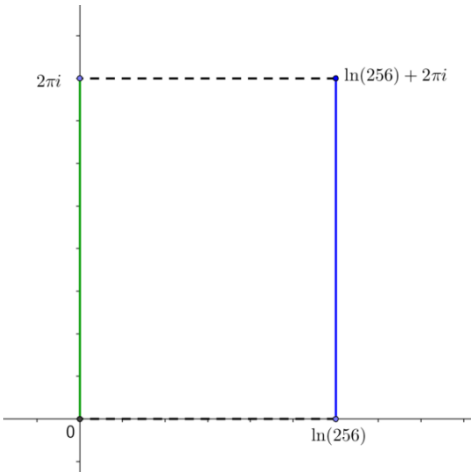
$$\alpha = re^{i\theta} = \frac{2\pi i}{2\pi i + \ln(256)} = \frac{(2\pi)^2}{(2\pi)^2 + (\ln(256))^2} + i\frac{2\pi \ln(256)}{(2\pi)^2 + (\ln(256))^2}.$$

Deze manier van uitwerken is gekozen voor het manuscript, omdat het oprollen van een rooster een betere voorstelling geeft voor een algemeen publiek.

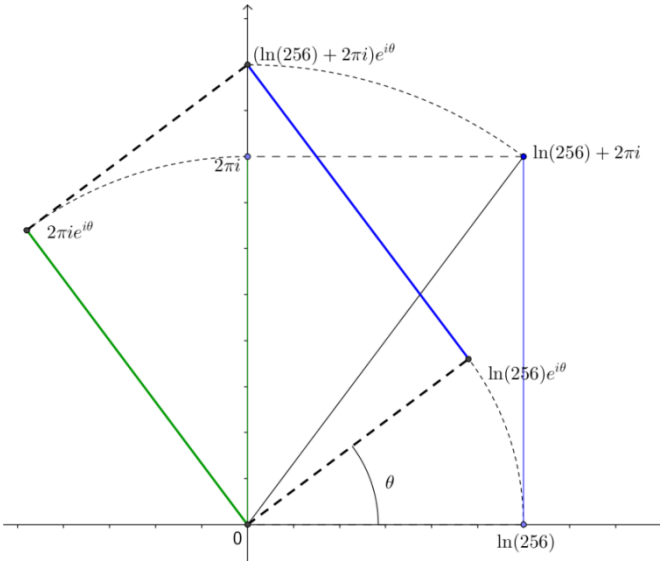
NB: in het manuscript kies ik bewust voor ln(…) in plaats van log(…), immers op de middelbare school leren leerlingen dat log(…) staat voor de 10-log, en de ln(…) voor de e-log.



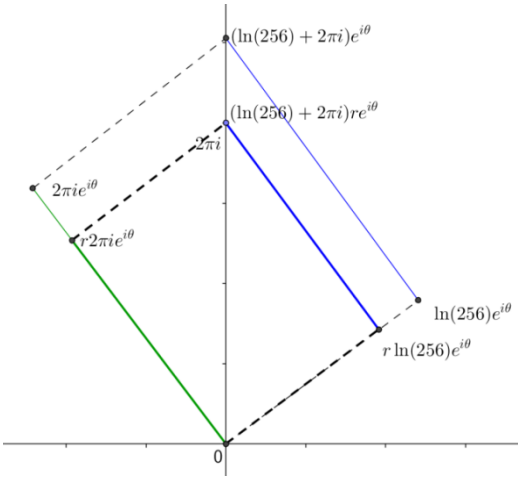
1) Cirkel straal 1 en cirkel straal 256 in Drosterooster (niet op schaal!)



2) Logaritme van figuur 1, cirkels worden verticale lijnen van 0 tot 2π.



3) Vermenigvuldiging met $e^{i\theta}$, de rechthoek wordt onder een hoek θ geroteerd



4) Vermenigvuldiging met r. Het hoekpunt op de imaginaire as moet naar $2\pi i$ gebracht worden.

2.7 Complexe getal α: logaritmische spiralen

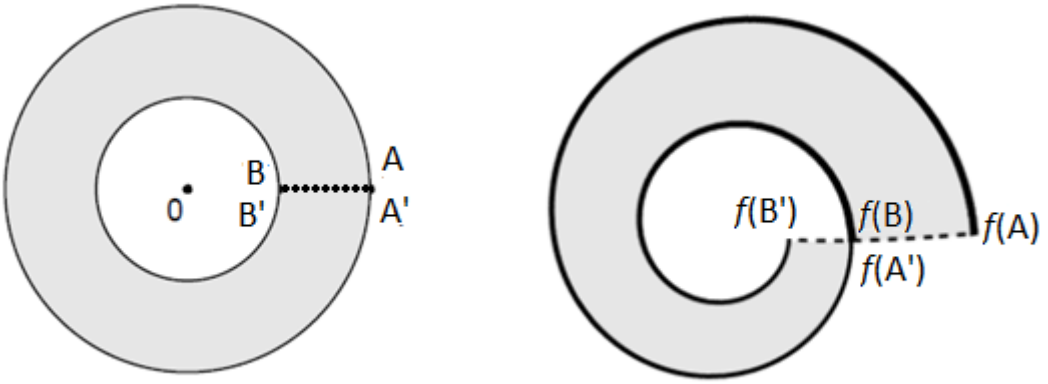
Een andere insteek is het gebruik van logaritmische spiralen. Als je door de koker kijkt van het 'logaritmisch rooster' van de vorige paragraaf worden de blauwe cirkels spiralen in plaats van cirkels. De spiralen moeten goed aansluiten. Hieronder eerst een bewijs dat een schuine lijn inderdaad in de exponentiële afbeelding een logaritmische spiraal wordt.

Een logaritmische spiraal kan in het vlak in poolcoördinaten gedefinieerd worden als een kromme met $r(\theta) = a\, e^{b\theta}$, met $a, b \in \mathbb{R}$.

> **Lemma:** Een lijn niet parallel aan de imaginaire as of reëele as wordt door de complexe exponentiële functie afgebeeld op een logaritmische spiraal.
> *Bewijs:* Stel l is een lijn met richtingscoefficient m en heeft als snijpunt met de imaginaire as $(0, b)$. De lijn kunnen we parametriseren als $z(t) = (1 + i \cdot m)t + b$, met $t \in \mathbb{R}$. De exponentiële functie beeldt deze lijn af naar de kromme in $\mathbb{C}$ geparametriseerd door:
> $$w(t) = e^{z(t)} = e^{(1+im)t+b} = e^{t+b}e^{imt}.$$
> Voor modulus en argument van een punt op deze kromme geldt:
> $$r = e^{t+b}, \theta = mt.$$
> We kunnen voor elk punt op de kromme nu r zien als functie van θ via $t = \theta/m$, er geldt: $r(\theta) = e^{\frac{1}{m}\theta+b} = e^b e^{\frac{1}{m}\theta}$. Dit is een logaritmische spiraal in $\mathbb{R}^2$ in poolcoördinaten. □

We gaan een waarde voor α afleiden met het gegeven dat cirkels in het Drosterooster worden afgebeeld als logaritmische spiralen. Belangrijk is dat we de cirkel in het Drosterooster zien als één omwenteling rond de oorsprong en het beeld van deze cirkel ook één omwenteling om de oorsprong heeft. Om het Droste-effect te gebruiken, nemen we twee cirkels door A en B met straal $256 \cdot r$ resp. r.

We geven dit aan door middel van poolcoördinaten: $A = (256 \cdot r, 0)$, $A'(256 \cdot r, 2\pi)$ en $B = (r, 0)$, $B' = (r, 2\pi)$. A, A' en B, B' liggen dan elk wel op hetzelfde punt in het vlak, maar we zetten het argument van A'en B' toch op 2π om aan te geven dat we A' en B' één omwenteling verder zitten op de cirkel dan A en B.
De afbeelding $f(z) = e^{\alpha \log(z)}$ zal deze cirkels afbeelden op logaritmische spiralen en in het Escherrooster zullen deze elkaar naadloos moeten aansluiten. Dit betekent dat $f(A') = f(B)$. In een schets in de figuur hieronder is dit aangegeven (merk op dat de stippelijn van $f(B')$ naa $f(A)$ in werkelijkheid niet recht is).



$f(A') = f(B)$, dus $\frac{f(A')}{f(B)} = 1$. Uitschrijven geeft:

$$\frac{f(A')}{f(B)} = 1$$
$$\frac{e^{\alpha(\log(256\cdot r)+2\pi i)}}{e^{\alpha\log(r)}} = 1$$
$$e^{\alpha(\log(256)+2\pi i)} = e^{2\pi i}.$$

Hieruit volgt:

$$\alpha = \frac{2\pi i}{\log(256)+2\pi i} = \frac{(2\pi)^2}{(2\pi)^2+\log(256)^2} + i\frac{(2\pi\log(256))}{(2\pi)^2+\log(256)^2}.$$

2.8 de Prentententoonstelling

Eén van de observaties bij de informele behandeling van *de Prentententoonstelling* aan het begin van dit artikel was dat *de Prentententoonstelling* een Droste-effect heeft, een versie van *de Prentententoonstelling* bevat in het midden van het gat, ongeveer 22,5 keer verkleind en geroteerd onder een hoek van ongeveer 157°. Deze getallen kunnen we nu expliciet uitrekenen: We gebruiken dezelfde notatie in de vorige paragraaf. Het beeld van A en beeld van B zijn:

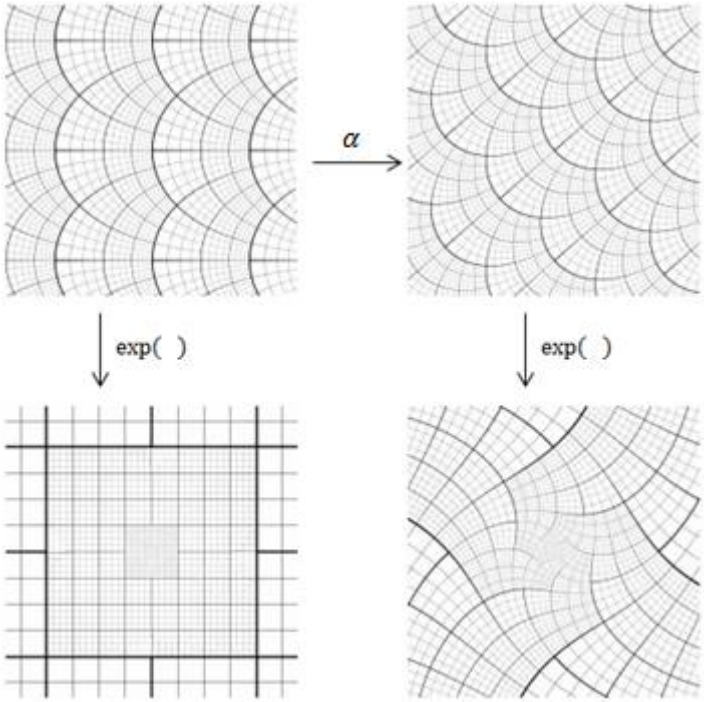
$f(A) = f(256 \cdot r) = e^{\alpha\log(256\cdot r)}$
$f(B) = f(r) = e^{\alpha\log r}$.

We zien meteen dat $f(A) = e^{\alpha\log(D)}f(B)$. Om het beeld van A op het beeld van B te krijgen moeten we dus vermenigvuldigigen met het getal $e^{\alpha\log(256)}$, met $\alpha = \frac{2\pi i}{\log(256)+2\pi i}$. De modulus en argument voor dit complex getal geeft de rotatie van het Drosteeffect binnen de *Prentententoonstelling.* De modulus en argument van $e^{\frac{2\pi i}{\log(256)+2\pi i}\cdot\log(256)}$ zijn:

$$r = e^{\frac{(2\pi)^2\log(256)}{(2\pi)^2+(\log(256))^2}} = 22{,}58368453\ldots$$
$$\theta = \frac{2\pi\log(256)^2}{(2\pi)^2+(\log(256))^2} = 2{,}75\ldots\text{rad} = 157{,}6244961\ldots°.$$

Samenvatting

De 'kloppende afbeelding' bestaat dus uit de volgende samenstelling van afbeeldingen:



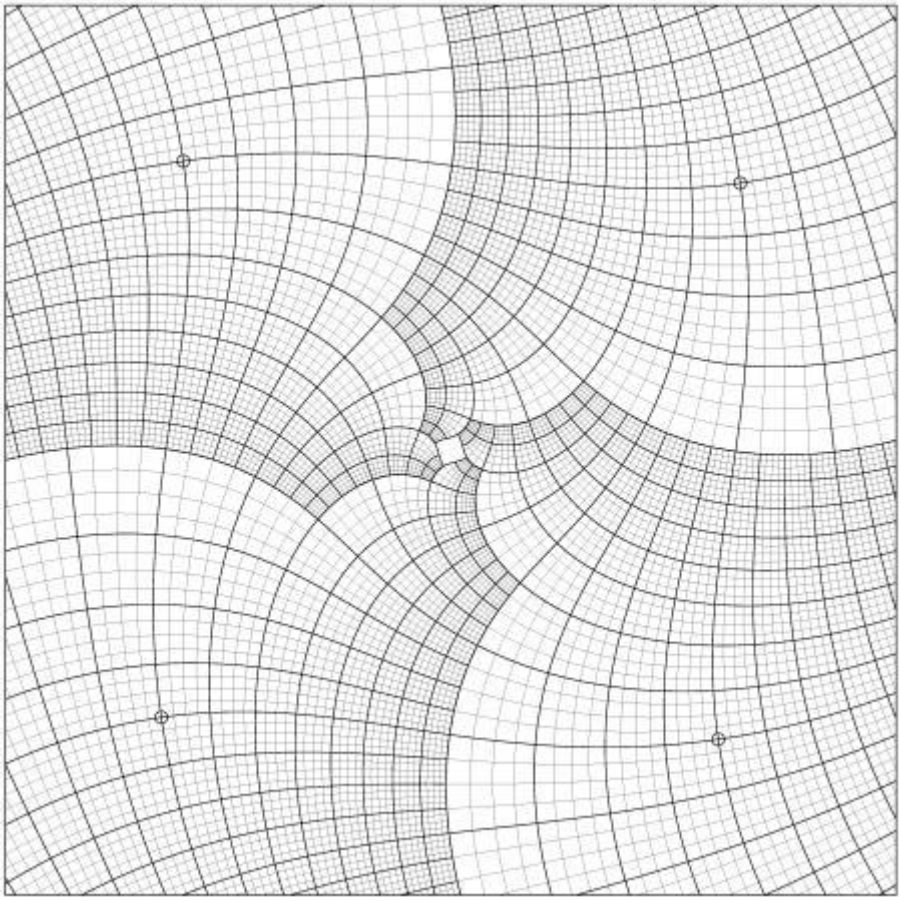
Hierin is $\alpha = \frac{2\pi i}{\log(256)+2\pi i}$.

Dit plaatje laat zich samenvatten in formulevorm als we de route van Drosterooster linksonder naar Escherrooster rechtsonder volgen: $f(z) = e^{\alpha \log(z)}$, wel met de kanttekening dat we een keuze van de principiële tak van logaritme gebruiken.

Deze functie $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ is conform, immers is de exponentiële functie een conforme functie en vermenigvuldiging met een complex getal ook. De 'kleuren zijn behouden' zoals bedoelt in paragraaf 2.2. In het Drosterooster hebben we $g(z) = g(256z)$, in het Escherrooster $h(z) = h(\xi z)$. De conclusie van paragraaf 2.8 liet het verband zien tussen '256' en 'ξ', namelijk $\xi = e^{\alpha \log(256)}$. Hiermee is ook laten zien dat er een Drosteeffect aanwezig is in de *Prentententoonstelling* waarin de volgende kopie ongeveer ongeveer 22,5 maal verkleind en 157° geroteerd is.

Ter afsluiting

Het perfecte conforme rooster ziet er als volgt uit:



Met dit rooster kun je *de Prentententoonstelling* completeren, zoals geanimeerd op escherdroste.math.leidenuniv.nl.

Referenties

[Greene & Krantz] R.E. Greene, S.G. Krantz, *Function Theory of One Complex Variable,* 3rd edition, Graduate Studies in Mathematics, 2006

[Shurman], J. Shurman, course materials for Math 311 complex analysis, Reeds University, http://people.reed.edu/~jerry/311/mats.html, conformal mappings lecture notes

[Lenstra & Smit] B. de Smit, H. Lenstra *Artful Mathematics: The Heritage of M.C. Escher*, Notices of the AMS, 50 (4), apr 2003

[Silverman] J. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Spinger-Verlag, New Yorick, 1986