Y.A. Peeters

De Stelling van Lamperti

Bachelorscriptie, 24 juni 2015

Begeleider: Dr. M.F.E. de Jeu

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Voorwoord

In deze scriptie wordt een stelling behandeld van de wiskundige John W. Lamperti [1]. De stelling laat op een verrassende manier zien hoe isometrieën tussen L^p-ruimten zich laten beschrijven. Hierbij spelen bepaalde afbeeldingen, de reguliere verzamelingsisomorfismen, een belangrijke rol. De stelling zegt dat isometrieën in de zogenaamde Lampertivorm te schrijven zijn als $1 \leq p < \infty$ en $p \neq 2$. Het zal blijken dat voor het geval $p = 2$ isometrieën bestaan die zich niet zo makkelijk laten beschrijven. Dit is intuïtief in te zien door isometrieën op $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_p)$ te beschouwen. Een isometrie moet de eenheidscirkel voor de p-norm op zichzelf afbeelden. Voor $p > 2$ en $1 \leq p < 2$ is de eenheidscirkel vierkantvormig en bestaan beperkte mogelijkheden voor een symmetrie en dus ook voor een isometrie. Als $p = 2$, dan is de verzameling symmetrieën overaftelbaar en zal een isometrie dus niet altijd dezelfde eigenschappen hebben als wanneer $p \neq 2$. Deze scriptie is bedoeld voor wiskundigen die bekend zijn met maattheorie. De bronnen waarop deze scriptie gebaseerd is, zijn voornamelijk [1] en [2]. Bijna alle ideeën zijn afkomstig van deze bronnen, echter niet alle uitwerkingen.

2 Inleiding

De isometrieën, genoteerd met U, die hier besproken zullen worden, zijn lineaire, normbewarende afbeeldingen tussen L_1^p en L_2^p waar geldt

$$L_i^p = L^p(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i), \ \ (i = 1, 2).$$

Hier zijn Ω_i het universum, Σ_i de σ-algebra en μ_i de maat behorend bij de i-de maatruimte. Voor $i = 1, 2$ geldt dan tevens

$$L_i^p = \mathcal{L}_i^p \big/ {}_{=_{\mu_i}},$$

waar '$=_{\mu_i}$' de equivalentierelatie 'μ_i-bijna overal gelijk' is en $\mathcal{L}_i^p$ de verzameling is van p-integreerbare functies, reëel- of complexwaardige, op Ω_i. Als $\mathcal{L}_1^p$ en $\mathcal{L}_2^p$ worden beschouwd als vectorruimten, wordt aangenomen dat ze over hetzelfde lichaam $\mathbb{F}$ zijn. Alle maten die besproken zullen worden, zijn σ-eindig.

2.1 Hoofdstelling

Om te beginnen volgt hier formeel de stelling [1, 2].

Stelling 2.1 (Lamperti, 1958)**.** *Zij U een lineaire isometrie van $L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ naar $L^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ met $1 \leq p < \infty$ en $p \neq 2$. Dan bestaan een regulier verzamelingsisomorfisme T van Σ_1 naar Σ_2 en een functie h gedefinieerd op Ω_2 zodanig dat*

$$Uf = h \cdot T_1 f \tag{1}$$

waar T_1 de lineaire transformatie geïnduceerd door T is en h voldoet aan

$$\int_{T(A)} |h|^p \mathrm{d}\mu_2 = \int_{T(A)} \frac{\mathrm{d}(\mu_1 \circ T^{-1})}{\mathrm{d}\mu_2} \mathrm{d}\mu_2 = \mu_1(A) \tag{2}$$

voor alle $A \in \Sigma_1$. Omgekeerd, als h zoals in (2) is en T een regulier verzamelingsisomorfisme is, dan is U zoals in (1) een lineaire isometrie.

De vorm van U in (1) heet de Lampertivorm. Het zal in het volgende hoofdstuk duidelijk worden wat een regulier verzamelingsisomorfisme precies is. Eerst volgen drie voorbeelden, waarbij in de eerste twee de hoofdstelling wordt toegepast. Het derde is een tegenvoorbeeld voor p=2. In dat laatste voorbeeld wordt een propositie gebruikt die pas verderop bewezen wordt.

2.2 Voorbeelden

Voorbeeld 2.2. De stelling geeft aan dat voor bepaalde lineaire transformaties T_1 een functie h bestaat zodanig dat $Uf = h \cdot T_1 f$ normbewarend is. De lineariteit van U volgt uit de lineariteit van T_1. De transformaties T_1 waarvoor dit geldt, zijn de transformaties die geïnduceerd worden door een regulier verzamelingsisomorfisme. Laat $L_1^p = L_2^p$ met $p \geq 1$. Zij dan $\Omega_i = \mathbb{R}_{>0}$ het universum,

$\Sigma_i = \mathcal{B}(\mathbb{R}_{>0})$ de bijbehorende Borel σ-algebra [3, Definition 6.1] en $\mu_i = \lambda$ de Lebesgue-Borel maat [3, Definition 6.3]. Dan zal blijken dat

$$T_1 f(t) = f(\sqrt{t})$$

een lineaire transformatie van $\mathcal{B}(\mathbb{R}_{>0})$-meetbare functies is die geïnduceerd wordt door een regulier verzamelingsisomorfisme. Er bestaat een functie h zodanig dat $Uf = h \cdot T_1 f$normbewarend is. Daarvoor kan het volgende geprobeerd worden:

$$h(t) = ct^{\alpha}.$$

Aangezien de maattheoretische integraal overeenkomt met de Riemannintegraal [3, Corollary 16.5], moeten α en c zodanig zijn dat geldt

$$\int_0^\infty |ct^\alpha \cdot f(\sqrt{t})|^p \mathrm{d}t = \int_0^\infty |f(t)|^p \mathrm{d}t.$$

Als $s = \sqrt{t}$, dan $\mathrm{d}t = 2s\mathrm{d}s$ en dus volgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |c\,t^\alpha \cdot f(\sqrt{t})|^p \mathrm{d}t &= \int_0^\infty 2s \cdot |c\,s^{2\alpha} \cdot f(s)|^p \mathrm{d}s \\ &= \int_0^\infty 2|c|^p\, s^{2\alpha p+1} \cdot |f(s)|^p \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$c = \pm \frac{1}{\sqrt[p]{2}} \text{ en } \alpha = -\frac{1}{2p}$$

voldoen en dat bijvoorbeeld de functie

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt[2p]{4t}}$$

zodanig is dat U normbewarend is.

Voorbeeld 2.3. Zij wederom $p \geq 1$ en stel dat

$$L_1^p := L^p(N, \mathcal{P}(N), \mu) \text{ en } L_2^p := L^p(M, \mathcal{P}(M), \mu)$$

de maatruimten zijn met μ de telmaat en N en M eindige verzamelingen van n en m elementen, respectievelijk, met $m \geq n$. Dan geldt

$$L_1^p \simeq (\mathbb{F}^n, ||\cdot||_p) \text{ en } L_2^p \simeq (\mathbb{F}^m, ||\cdot||_p)$$

waar $||\cdot||_p$ de eindige p-norm. Dan is een lineaire transformatie T_1 te schrijven als een matrixvermenigvuldiging. Zoals in Voorbeeld 2.2 werd genoemd, moet een regulier verzamelingsisomorfisme T bestaan zodanig dat T_1 geïnduceerd wordt door T. Stel dat $T_1 = (a_{ij})_{i,j}$ zodanig is dat geldt

$$a_{ij} \in \{0,1\},\ \forall j : \sum_{i=1}^m a_{ij} \geq 1 \text{ en } \forall i : \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1.$$

Met andere woorden, T_1 bestaat uit enen en nullen en iedere kolom heeft minstens één niet-nul element en iedere rij hoogstens één. Later zal duidelijk worden dat T_1 een zo transformatie is die geïnduceerd wordt door een regulier verzamelingsisomorfisme. Dan wordt de j-de kolomsom als volgt genoteerd:

$$k(j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

Verder is $l(i)$ de volgende indexfunctie:

$$l(i) = \begin{cases} q & \text{als } a_{iq} = 1, \\ 0 & \text{als } \forall j : a_{ij} = 0. \end{cases}$$

Dan bestaan er precies $k(j)$ i's zodanig dat $l(i) = j > 0$. Met de afspraak dat $x_0 = 0$ geldt,volgt

$$T_1 x = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{l(1)} \\ \vdots \\ x_{l(m)} \end{pmatrix}.$$

De vermenigvuldiging in (1) is in dit geval componentsgewijs. Laat $k(0) = 1$, als dan geldt

$$h = \begin{pmatrix} \pm \left(\frac{1}{k(l(1))} \right)^{1/p} \\ \vdots \\ \pm \left(\frac{1}{k(l(m))} \right)^{1/p} \end{pmatrix},$$

dan blijkt $Ux = h \cdot T_1 x$ normbewarend te zijn vanwege het volgende argument:

$$||h \cdot T_1 x||_p^p = \sum_{i=1}^{m} \frac{|x_{l(i)}|^p}{k(l(i))} = \sum_{j=1}^{n} \frac{k(j)|x_j|^p}{k(j)} = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p = ||x||_p^p.$$

Voorbeeld 2.4. Laat $p = 2$ en

$$L_1^2 = L_2^2 = L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda),$$

met $\mathcal{B}$ en λ zoals in Voorbeeld 2.2. Definieer dan U als volgt:

$$Uf(t) = \begin{cases} \dfrac{f(2t) + f(1-2t)}{\sqrt{2}} & \text{als } 0 \leq t < 1/2, \\ \dfrac{f(2t-1) + f(2-2t)}{\sqrt{2}} & \text{als } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Stel verder dat de spiegeling van f, genoteerd met $f^\dagger$, als volgt is:

$$f^\dagger(t) := f(1-t).$$

Neem $s = 1 - t$, dan $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}t$ en

$$||f^\dagger||_2^2 = \int_0^1 |f(1-t)|^2 \mathrm{d}t = -\int_1^0 |f(s)|^2 \mathrm{d}s = \int_0^1 |f(s)|^2 \mathrm{d}s = ||f||_2^2.$$

Als $p = 2$, dan is L_i^p een Hilbertruimte met inproduct:

$$(f, g) = \int_0^1 f\bar{g}\,\mathrm{d}t.$$

Dit inproduct induceert als volgt de 2-norm:

$$||f||_2 = \sqrt{(f, f)}.$$

Vanwege [4, Theorem 3.15] geldt voor $f, g \in L_i^p$ de Parallellogramwet:

$$(f + g, f + g) + (f - g, f - g) = 2(f, f) + 2(g, g).$$

In het bijzonder geldt dan voor $f \in L_1^p$:

$$||f + f^\dagger||_2^2 + ||f - f^\dagger||_2^2 = 4||f||_2^2.$$

Dit zorgt ervoor dat U daadwerkelijk een isometrie is en dat is als volgt te zien. Neem $s = 2t$ en $r = 2t - 1$, dan geldt $\mathrm{d}t = \mathrm{d}s/2 = \mathrm{d}r/2$ en

$$\begin{aligned}
||Uf||_2^2 &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} |f(2t) + f(1-2t)|^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(2t-1) + f(2-2t)|^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 |f(s) + f(1-s)|^2\,\mathrm{d}s + \frac{1}{4}\int_0^1 |f(r) + f(1-r)|^2\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{4}||f + f^\dagger||_2^2 + \frac{1}{4}||f + f^\dagger||_2^2 \\
&= ||f||_2^2.
\end{aligned}$$

Stel dat U in Lampertivorm te schrijven is en laat $f = \mathbb{1}_A$ met $A = [0, 1/2]$. Dan geldt $f^\dagger =_\lambda \mathbb{1}_{A^c}$ en dus $f \cdot f^\dagger =_\lambda 0$. Wegens Propositie 4.12.ii volgt

$$\begin{aligned}
Uf \cdot Uf^\dagger &= h^2 \cdot T_1 f \cdot T_1 f^\dagger \\
&= h^2 \cdot T_1(f \cdot f^\dagger) \\
&= h^2 \cdot T_1(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dit levert een tegenspraak op, aangezien $Uf(t) =_\lambda Uf^\dagger(t) \neq 0$ voor $t \in A$. Dus is voor $p = 2$, zoals verwacht, de hoofdstelling niet waar.

3 Reguliere verzamelingsisomorfismen

Een belangrijke schakel tussen een isometrie en zijn Lampertivorm zijn de reguliere verzamelingsisomorfismen. Aan de hand van de simpele definitie zullen vele eigenschappen af te leiden zijn.

3.1 Definitie

Zij $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$ de i-de maatruimte.

Definitie 3.1. Een afbeelding T van Σ_1 naar Σ_2 die voldoet aan

(i) $T(\Omega_1 \backslash A) = T(\Omega_1) \backslash T(A)$ voor alle $A \in \Sigma_1$,

(ii) $T\big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(A_n)$ voor alle onderling disjuncte rijen $\{A_n\}_n$ in Σ_1, en

(iii) $\mu_2(T(A)) = 0$ dan en slechts dan als $\mu_1(A) = 0$,

heet een *regulier verzamelingsisomorfisme*. De relaties worden modulo nulverzamelingen beschouwd.

Met 'beschouwd modulo nulverzamelingen' wordt bedoeld dat voor $A, B \in \Sigma_i$ geldt

$$A = B \text{ (modulo nulverzamelingen)} \;\Leftrightarrow\; \mu_i(A \backslash B) = \mu_i(B \backslash A) = 0.$$

Dit zal in het vervolg altijd zo worden beschouwd. Op gelijke wijze zal met '$A \subset B$' impliciet $\mu_i(A \backslash B) = 0$ bedoeld worden, met '$A = \varnothing$' impliciet $\mu_i(A) = 0$, enzovoort.

3.2 Eigenschappen

Uit Definitie 3.1.iii volgt direct dat $T(\varnothing) = \varnothing$. Daardoor volgt dat Definitie 3.1.ii ook geldt voor eindige rijen $\{A_n\}_{n=1}^{N}$, neem namelijk $A_n = \varnothing$ voor alle $n > N$. Verder laat het volgende lemma zien dat T deelverzamelingen behoudt.

Lemma 3.2. *Zij $A, B \in \Sigma_1$. Als $A \subseteq B$, dan $T(A) \subseteq T(B)$.*

Bewijs. Er geldt $B = (B \backslash A) \sqcup A$ en wegens Definitie 3.1 volgt

$$T(B) = T(B \backslash A) \cup T(A),$$

en dus $T(A) \subseteq T(B)$. □

Definitie 3.1.ii geldt ook voor niet-disjuncte verenigingen. Om tot dit resultaat te komen, moet eerst een aantal lemma's worden bewezen.

Lemma 3.3. *Zij $\{A_n\}_{n=1}^{N}$ een eindige rij in Σ_1, dan geldt $T\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{N} T(A_n)$.*

Bewijs. Voor $A, B \in \Sigma_1$ geldt $A, B \subseteq A \cup B$ en wegens Lemma 3.2 geldt ook

$$T(A), T(B) \subseteq T(A \cup B),$$

en volgt daaruit

$$T(A) \cup T(B) \subseteq T(A \cup B).$$

Wegens $B \backslash A \subseteq B$ en wederom Lemma 3.2 geldt $T(B \backslash A) \subset T(B)$ en dus

$$T(A) \cup T(B \backslash A) \subseteq T(A) \cup T(B),$$

waar links vanwege Definitie 3.1 niets anders staat dan $T(A \cup B)$. Dus moet

$$T(A) \cup T(B) = T(A \cup B)$$

gelden als gevolg van de wederzijdse inclusie. Dit argument kan herhaald worden en dat levert het gewenste resultaat. $\square$

Een gelijksoortig resultaat bestaat voor doorsnedes.

Lemma 3.4. *Voor iedere eindige rij* $\{A_n\}_{n=1}^N$ *in* Σ_1 *geldt* $T\left(\bigcap_{n=1}^N A_n\right) = \bigcap_{n=1}^N T(A_n)$.

Bewijs. Laat $A, B \in \Sigma_1$, dan geldt

$$\begin{aligned}
T(A \cap B) &= T(\Omega_1 \backslash (A^c \cup B^c)) \\
&=^{(*)} T(\Omega_1) \backslash T(A^c \cup B^c) \\
&=^{(**)} T(\Omega_1) \Big\backslash \Big(T(A^c) \cup T(B^c)\Big) \\
&=^{(*)} T(\Omega_1) \Bigg\backslash \Bigg(\Big(T(\Omega_1) \backslash T(A)\Big) \cup \Big(T(\Omega_1) \backslash T(B)\Big)\Bigg) \\
&=^{(***)} T(A) \cap T(B),
\end{aligned}$$

waar bij $(*)$ Definitie 3.1.i wordt toegepast, bij $(**)$ Lemma 3.3 en bij $(***)$ $T(A), T(B) \subseteq T(\Omega_1)$ wordt gebruikt, wat volgt vanwege Lemma 3.2. $\square$

Uit voorgaande volgt dat een regulier verzamelingsisomorfisme relatieve complementen ook behoudt.

Lemma 3.5. *Voor alle* $A, B \in \Sigma_1$ *geldt* $T(A \backslash B) = T(A) \backslash T(B)$.

Bewijs. Er geldt

$$\begin{aligned}
T(A \backslash B) &= T(A \cap B^c) \\
&=^{(*)} T(A) \cap T(\Omega_1 \backslash B) \\
&=^{(**)} T(A) \cap \big(T(\Omega_1) \backslash T(B)\big) \\
&=^{(***)} T(A) \backslash T(B).
\end{aligned}$$

Hier wordt bij $(*)$ Lemma 3.4 toegepast, $(**)$ volgt uit Definitie 3.1.i en bij $(***)$ $T(A) \subseteq T(\Omega_1)$ wordt gebruikt, wat volgt vanwege Lemma 3.2. $\square$

Nu is genoeg voorhanden om het analoge van Definitie 3.1.ii voor niet noodzakelijk disjuncte verenigingen aan te tonen.

Propositie 3.6. *Zij* $\{A_n\}_n$ *een willekeurige rij in* Σ_1, *dan geldt* $T\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \bigcup_{n=1}^\infty T(A_n)$.

Bewijs. Definieer de rij $\{B_n\}_n$ als volgt:

$$B_n := A_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}).$$

Dan geldt namelijk

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Daaruit volgt

$$\begin{aligned}
T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= T\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\
&=^{(*)} \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} T\big(A_n \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})\big) \\
&=^{(**)} \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(T(A_n) \backslash \big(T(A_1) \cup \cdots \cup T(A_{n-1})\big)\Big) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} T(A_n),
\end{aligned}$$

waar bij $(*)$ Definitie 3.1.ii wordt toegepast en bij $(**)$ Lemma 3.5 en Lemma 3.3. □

Wederom bestaat een gelijksoortig resultaat voor doorsnedes.

Gevolg 3.7. *Zij $\{A_n\}_n$ een willekeurige rij in Σ_1, dan geldt $T\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} T(A_n)$.*

Bewijs. Zij $\{A_n\}_n$ een rij in Σ_1, dan geldt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$$

en daardoor:

$$\begin{aligned}
T\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= T\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c\right) \\
&=^{(*)} T(\Omega_1) \Big\backslash \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T(A_n^c)\right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(T(\Omega_1) \backslash T(A_n^c)\Big) \\
&=^{(**)} \bigcap_{n=1}^{\infty} T(A_n),
\end{aligned}$$

waar bij $(*)$ Definitie 3.1.i en Propositie 3.6 worden gebruikt en bij $(**)$ nogeens Definitie 3.1.i wordt gebruikt. □

Een ander eigenschap van T is dat T disjuncte verzamelingen afbeeldt op disjuncte verzamelingen. Om dit resultaat te bereiken moet eerst de injectiviteit van T worden aangetoond.

Lemma 3.8. *Ieder regulier verzamelingsisomorfisme T is modulo nulverzamelingen injectief.*

Bewijs. Stel dat $A, B \in \Sigma_1$ met $T(A) = T(B)$. Dan geldt

$$\varnothing = T(A) \backslash T(B) = T(A \backslash B)$$

vanwege Lemma 3.5. Wegens Definitie 3.1.iii volgt dan dat $A \backslash B$ een μ_1-nulverzameling is. Met andere woorden, $A \backslash B = \varnothing$. Op gelijke wijze volgt $B \backslash A = \varnothing$ en is T modulo nulverzamelingen inderdaad injectief. □

Dit wordt vervolgens toegepast in de laatste eigenschap van T die behandeld wordt.

Propositie 3.9. *Zij $A, B \in \Sigma_1$, dan geldt $T(A) \cap T(B) = \varnothing$ dan en slechts dan als $A \cap B = \varnothing$.*

Bewijs. "$\Rightarrow$": Als $T(A) \cap T(B) = \varnothing$, dan geldt vanwege Lemma 3.4

$$\varnothing = T(A) \cap T(B) = T(A \cap B)$$

en als gevolg van de injectiviteit van T geldt $A \cap B = \varnothing$.

"$\Leftarrow$": Dit volgt direct uit het Lemma 3.4 en $T(\varnothing) = \varnothing$. □

3.3 Voorbeelden

Voordat de transformatie wordt besproken die T induceert, wordt eerst een aantal voorbeelden bekeken.

Voorbeeld 3.10. Stel dat de maatruimten zijn zoals in Voorbeeld 2.2. Dan kan een regulier verzamelingsisomorfisme puntsgewijs worden gedefinieerd, bijvoorbeeld als volgt:

$$T(A) = \{t^2 : t \in A\}.$$

Definitie 3.1.i en 3.1.ii volgen vrij direct vanwege de puntsgewijze definitie en het bijectief zijn van $t \mapsto t^2$. Definitie 3.1.iii is af te leiden met behulp van de Radon–Nikodym stelling [3, Theorem 17.10]. De dichtheidsfuncties zijn namelijk

$$\frac{\mathrm{d}(\lambda \circ T^{-1})}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \text{ en } \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}(\lambda \circ T^{-1})} = 2t.$$

De formele formulering van de Radon–Nikodym stelling, Stelling 6.3, zal verderop volgen.

Voorbeeld 3.11. Stel dat de maatruimten zijn zoals in Voorbeeld 3.10. Stel tevens dat Φ een homeomorfisme van $\mathbb{R}_{>0}$ naar zichzelf is zodanig dat Φ en Φ^{-1} differentieerbaar zijn, dan is T van de vorm

$$T(A) = \{\Phi^{-1}(t) : t \in A\}$$

een regulier verzamelingsisomorfisme. Op gelijke wijze als in Voorbeeld 3.10 wordt aan Definitie 3.1 voldaan. Er geldt namelijk dat

$$\frac{\mathrm{d}(\lambda \circ T^{-1})}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \text{ en } \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}(\lambda \circ T^{-1})} = \frac{\mathrm{d}\Phi^{-1}}{\mathrm{d}t}$$

de dichtheidsfuncties zijn.

Voorbeeld 3.12. Laat de maatruimten zijn zoals in Voorbeeld 2.3. Voor de telmaat geldt dat de lege verzameling de enige nulverzameling is. Daarom zijn in dit geval alle eigenschappen van een regulier verzamelingsisomorfisme strikt. Zonder de algemeenheid te schaden, kan worden aangenomen dat $N = \{1, \ldots, n\}$. Vanwege het behoud van verenigingsstructuren van een regulier verzamelingsisomorfisme T, wordt T precies bepaald door zijn werking op de singletons. Dit komt neer op de volgende vorm:

$$T(\{j\}) = B_j \text{ voor } 1 \leq j \leq n.$$

Wegens Propositie 3.9 moet gelden dat de B_j's onderling disjunct zijn. Daarnaast moeten de B_j's niet leeg zijn vanwege Definitie 3.1.iii.

4 Geïnduceerde transformatie

In dit hoofdstuk wordt de transformatie T_1 behandeld die geïnduceerd wordt door een regulier verzamelingsisomorfisme. De transformatie kan niet direct gedefinieerd worden, eerst moet namelijk aangetoond worden dat de uiteindelijke formulering welgedefinieerd is. Deze opbouw doet denken aan de opbouw van maattheoretische integralen [3, Chapter II]. Op soortgelijke wijze wordt T_1 eerst gedefinieerd op een verzameling van elementaire functies. Elementaire functies zijn meetbare functies die slechts eindig veel verschillende, reële waarden aannemen. De verzameling van elementaire functies over de i-de maatruimte wordt genoteerd met E_i, de verzameling van meetbare reële functies met E_i^*. Wegens [3, Theorem 9.8] is iedere $f \in E_i^*$ op te splitsen in twee niet-negatieve, meetbare, unieke functies f^+ en f^- zodanig dat

$$f = f^+ - f^- \text{ en } f^+ \cdot f^- = 0.$$

Verder bestaat vanwege [3, Theorem 11.6] voor iedere niet-negatieve, meetbare functie F een monotoon stijgende rij van niet-negatieve, elementaire functies $\{u_n\}_n$ zodanig dat

$$F = \sup_n u_n.$$

Aangezien L_i^p technisch gezien een verzameling van equivalentieklassen is, wordt met een bewering als '$f = g$' impliciet bedoeld dat $f =_{\mu_i} g$. Verder wordt met $\mathbb{1}_A$ de karakteristieke functie, of indicatorfunctie, van A bedoeld en is T telkens een regulier verzamelingsisomorfisme.

4.1 Voorbereidingen

Iedere $u \in E_1$ heeft een normale representatie van de vorm

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n},$$

met $\alpha \in \mathbb{R}$, $A_n \in \Sigma_1$ voor iedere n, alle α_n onderling ongelijk, alle A_n onderling disjunct en niet-leeg en $\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \Omega_1$. Een normale representatie is modulo nulverzamelingen en op verwisselingen van de sommatievolgorde na uniek en dus kan T_1 als volgt op E_1 worden gedefinieerd.

Definitie 4.1. Zij $u \in E_1$ en $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n}$ de normale representatie van u, dan heet de afbeelding

$$T_1 u := \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{T(A_n)}$$

de *transformatie geïnduceerd door* T.

Het is nuttig op te merken dat direct uit de definitie volgt dat $T_1(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot T_1 f$ geldt voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$ en dat $T_1 u(t) = 0$ geldt als $t \notin T(\Omega_1)$. Stel nu dat

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n} = u,$$

waar $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n}$ niet noodzakelijk de normale representatie is van u. Uit het volgende zal blijken dat $T_1 u$ ook aan de hand van deze som te bepalen is.

Lemma 4.2. *Zij* $u \in E_1$ *en stel dat*

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n} = u.$$

Dan geldt

$$T_1 u = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{T(A_n)}.$$

Bewijs. Stel dat

$$\sum_{m=1}^{M} \beta_m \mathbb{1}_{B_m}$$

de normale representatie is van u. Neem m vast, dan geldt

$$\beta_m \mathbb{1}_{B_m} = u \cdot \mathbb{1}_{B_m} = \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n} \right) \cdot \mathbb{1}_{B_m} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n \cap B_m}. \tag{3}$$

Definieer dan de familie van K klassen als volgt. Iedere klasse is een deelverzameling van $\{1, \ldots, N\}$, waar de k-de klasse gelijk is aan

$$Q_k = \left\{ n_1^k, \ldots, n_{l_k}^k \right\}.$$

Laat

$$C_k := \bigcap_{i \in Q_k} \Big(A_i \cap B_m \Big)$$

dan geldt verder

(i) $C_k \neq \varnothing$ voor $k = 1, \dots, K$,

(ii) $C_k \cap C_{k'} = \varnothing$ als $k \neq k'$,

(iii) $B_m = \bigsqcup_{k=1}^{K} C_k$.

Stel $\beta_m \neq 0$, dan bestaat er vanwege (3) een dusdanige, niet-lege familie van klasse en is deze tevens uniek. Dan geldt, ook vanwege (3), voor iedere k

$$\sum_{i \in Q_k} \alpha_i = \beta_m. \tag{4}$$

Verder geldt vanwege (ii), Definitie 3.1 en Propositie 3.9 ook

$$T(B_m) = \bigsqcup_{k=1}^{K} T(C_k). \tag{5}$$

Voor iedere k geldt

$$A_i \cap C_k = \begin{cases} C_k & \text{als } i \in Q_k, \\ \varnothing & \text{als } i \notin Q_k, \end{cases}$$

en vanwege Lemma 3.4 en $T(\varnothing) = \varnothing$ geldt dan ook voor alle k

$$T(A_i) \cap T(C_k) = \begin{cases} T(C_k) & \text{als } i \in Q_k, \\ \varnothing & \text{als } i \notin Q_k. \end{cases} \tag{6}$$

Het voorgaande combineren, levert het volgende resultaat:

$$\begin{aligned}
\beta_m \mathbb{1}_{T(B_m)} &=^{(*)} \sum_{k=1}^{K} \beta_m \mathbb{1}_{T(C_k)} \\
&=^{(**)} \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i \in Q_k} \alpha_i \right) \mathbb{1}_{T(C_k)} \\
&= \sum_{k=1}^{K} \sum_{i \in Q_k} \alpha_i \mathbb{1}_{T(C_k)} \\
&=^{(***)} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i \in Q_k} \alpha_i \mathbb{1}_{T(A_i) \cap T(C_k)} \\
&=^{(***)} \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{T(A_n) \cap T(C_k)} \\
&=^{(*)} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{T(A_n) \cap T(B_m)},
\end{aligned}$$

waar (5) wordt toegepast bij ($*$), (4) bij ($**$) en (6) bij ($***$). Stel nu dat $\beta_m = 0$. Als er een i bestaat zodanig dat $A_i \cap B_m \neq \varnothing$, dan bestaat er een niet-lege familie die voldoet aan (i), (ii) en (iii) en is het voorgaande argument te herhalen. Als $A_i \cap B_m = \varnothing$ voor iedere i, dan geldt vanwege Propositie 3.9 $T(A_i) \cap T(B_m)$ voor iedere i. Dan volgt

$$\beta_m \mathbb{1}_{T(B_m)} = 0 = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{T(A_n) \cap T(B_m)}.$$

Aangezien $\bigsqcup_{n=1}^{N} T(B_n) = T(\Omega_1)$ geldt vanwege Definitie 3.1 en Propositie 3.9, volgt het gewenste resultaat:

$$\begin{aligned} T_1 u &= \sum_{m=1}^{M} \beta_m \mathbb{1}_{T(B_m)} \\ &= \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{T(A_n) \cap T(B_m)} \\ &= \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{T(A_n)} \right) \mathbb{1}_{T(B_m)} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{T(A_n)} \right) \mathbb{1}_{T(\Omega_1)} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{T(A_n)}. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.3. *Zij $u, v \in E_1$ en zij T_1 geïnduceerd door T, dan*

(i) $T_1(u + v) = T_1 u + T_1 v$,

(ii) $T_1(u \cdot v) = T_1 u \cdot T_1 v$,

(iii) *als* $u \leq v$, *dan* $T_1 u \leq T_1 v$,

(iv) $\{T_1 u > 0\} = T(\{u > 0\})$ *en* $\{T_1 u < 0\} = T(\{u < 0\})$.

Bewijs. (i): Zij $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n}$ en $\sum_{m=1}^{M} \beta_m \mathbb{1}_{B_m}$ de normale representaties van u en v, respectievelijk. Aangezien $u, v \in E_1$, is $u + v$ ook een elementaire functie en geldt

$$u + v = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} (\alpha_n + \beta_m) \mathbb{1}_{A_n \cap B_m}.$$

Dan volgt (i) door het volgende te beschouwen:

$$\begin{aligned}
T_1(u+v) &=^{(*)} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}(\alpha_n+\beta_m)\mathbb{1}_{T(A_n\cap B_m)} \\
&=^{(**)} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}(\alpha_n+\beta_m)\mathbb{1}_{T(A_n)\cap T(B_m)} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\alpha_n\mathbb{1}_{T(A_n)}\cdot\mathbb{1}_{T(B_m)} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\beta_n\mathbb{1}_{T(A_n)}\cdot\mathbb{1}_{T(B_m)} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\mathbb{1}_{T(A_n)}\cdot\mathbb{1}_{T(\Omega_1)} + \sum_{m=1}^{M}\beta_n\mathbb{1}_{T(\Omega_1)}\cdot\mathbb{1}_{T(B_m)} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\mathbb{1}_{T(A_n)} + \sum_{m=1}^{M}\beta_m\mathbb{1}_{T(B_m)} \\
&= T_1u+T_1v,
\end{aligned}$$

waar bij $(*)$ Lemma 4.2 wordt gebruikt en bij $(**)$ Lemma 3.4.
(ii): Het aantonen van (ii) gaat op soortgelijke wijze aangezien geldt

$$u\cdot v=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}(\alpha_n\cdot\beta_m)\mathbb{1}_{A_n\cap B_m}.$$

Wederom met behulp van Lemma 4.2 en 3.4 volgt:

$$\begin{aligned}
T_1(u\cdot v) &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}(\alpha_n\cdot\beta_m)\mathbb{1}_{T(A_n)\cap T(B_m)} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\big(\alpha_n\mathbb{1}_{T(A_n)}\big)\cdot\big(\beta_m\mathbb{1}_{T(B_m)}\big) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\mathbb{1}_{T(A_n)}\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{M}\beta_m\mathbb{1}_{T(B_m)}\right) \\
&= T_1u\cdot T_1v.
\end{aligned}$$

(iii): Als $u\leq v$ geldt, volgt dat $v-u$ een niet-negatieve, elementaire functie is. Stel dat $\sum_{l=1}^{L}\gamma_l\mathbb{1}_{C_l}$ de normale representatie is van $v-u$. Dan zijn alle γ_l's niet-negatief en volgt per definitie dat $T_1(v-u)$ niet-negatief is. Dan volgt uit (i) dat geldt

$$T_1(v-u)=T_1v+T_1(-u)=T_1v-T_1u,$$

en hieruit volgt (iii).
(iv): Eerst wordt het eerste deel van de uitspraak aangetoond. Laat $A=\{u>0\}$, dan geldt

$$u|_A=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\mathbb{1}_{A_n\cap A}$$

en $\alpha_n>0$ als $A_n\cap A\neq\varnothing$. Vanwege de injectiviteit van T en Lemma 3.4 volgt:

$$T(A_n)\cap T(A)\neq T(\varnothing)=\varnothing,\ (\forall n:\alpha_n>0).$$

Dat betekent dat

$$T_1 u = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{T(A_n)}$$

precies niet-negatief is op het domein

$$\bigcup_{n=1}^{N} (T(A_n) \cap T(A)) = T(A).$$

Het tweede deel van (iv) volgt op gelijke wijze. $\square$

Gevolg 4.4. *Als $u \in E_1$, dan $(T_1 u)^+ = T_1(u^+)$ en $(T_1 u)^- = T_1(u^-)$.*

Bewijs. Aangezien $u^+(t)$ en $u^-(t)$ nooit beide strikt positief zijn voor dezelfde t, geldt $u^+ \cdot u^- = 0$ en vanwege Lemma 4.3.ii volgt

$$T_1(u^+) \cdot T_1(u^-) = T_1(u^+ \cdot u^-) = T_1(0) = 0.$$

Vanwege Lemma 4.3.iii, $u^+, u^- \geq 0$ en $T(0) = 0$ zijn $T_1(u^+)$ en $T_1(u^-)$ niet-negatief en het gewenste resultaat volgt dan met behulp van Lemma 4.3.i:

$$(T_1 u)^+ - (T_1 u)^- = T_1 u = T_1(u^+ - u^-) = T_1(u^+) - T_1(u^-).$$

$\square$

4.2 Uitbreiding

Aangezien voor een $f \in L_1^p$ geldt $f(t) \neq \pm\infty$ voor μ_1-bijna alle t [3, Theorem 13.6], zal het geval $f(t) = \pm\infty$ buiten beschouwing worden gelaten. Voordat de definitie van de uitbreiding van T_1 gegeven kan worden, moet worden aangetoond dat de definitie geldig is. Dit wordt gedaan met behulp van de volgende drie lemma's.

Lemma 4.5. *Zij $\{u_n\}_n$ een monotoon stijgende rij elementaire functies en $v \in E_1$. Als $v \leq \sup_n u_n$, dan $T_1 v \leq \sup_n T_1 u_n$.*

Bewijs. Laat $\epsilon > 0$ en

$$D_n = \{v - \epsilon \mathbb{1}_{\Omega_1} > u_n\}, \ (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Dan geldt $D_n \downarrow \varnothing$, of met andere woorden

$$\forall n : D_n \supseteq D_{n+1} \text{ en } \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \varnothing.$$

Vanwege Lemma 3.2 en Gevolg 3.7 volgt hieruit ook

$$\forall n : T(D_n) \supseteq T(D_{n+1}) \text{ en } \bigcap_{n=1}^{\infty} T(D_n) = T(\varnothing) = \varnothing,$$

oftewel $T(D_n) \downarrow \varnothing$. Aangezien $\{u_n\}_n$ monotoon stijgt, geldt wegens Lemma 4.3.iii dat $\{T_1 u_n\}_n$ ook monotoon stijgt. Verder geldt

$$\begin{aligned} T(D_n) &= T(\{v - \epsilon \mathbb{1}_{\Omega_1} - u_n > 0\}) \\ &=^{(*)} \{T_1(v - \epsilon \mathbb{1}_{\Omega_1} - u_n) > 0\} \\ &=^{(**)} \{T_1(v - \epsilon \mathbb{1}_{\Omega_1}) > T_1 u_n\}, \end{aligned}$$

waar bij $(*)$ Lemma 4.3.iv wordt gebruikt en bij $(**)$ Lemma 4.3.i. Dus geldt

$$\{T_1(v - \epsilon \mathbb{1}_{\Omega_1}) > T_1 u_n\}_n \downarrow \varnothing$$

en volgt hieruit met behulp van Lemma 4.3.i de volgende ongelijkheid:

$$T_1(v - \epsilon \mathbb{1}_{\Omega_1}) = T_1 v - \epsilon \mathbb{1}_{T(\Omega)} \leq \sup_n T_1 u_n.$$

Laat nu $\epsilon \downarrow 0$, dan volgt $T_1 v \leq \sup_n T_1 u_n$. □

Lemma 4.6. *Laat $\{u_n\}_n$ en $\{v_n\}_n$ twee monotoon stijgende rijen elementaire functies zijn. Als $\sup_n u_n = \sup_n v_n$, dan $\sup_n T_1 u_n = \sup_n T_1 v_n$.*

Bewijs. Voor iedere i geldt $v_i \leq \sup_n u_n$ en wegens Lemma 4.5 geldt voor iedere i ook $T_1 v_i \leq \sup_n T_1 u_n$ en volgt

$$\sup_n T_1 v_n \leq \sup_n T_1 u_n.$$

Op gelijke wijze volgt de omgekeerde ongelijkheid en dus geldt $\sup_n T_1 u_n = \sup_n T_1 v_n$. □

Lemma 4.7. *Zij $\{u_n\}_n$ een monotoon stijgende rij elementaire functies. Als $\sup u_n \neq \infty$ μ_1-bijna overal, dan $\sup_n T_1 u_n \neq \infty$ μ_2-bijna overal.*

Bewijs. Er geldt

$$\begin{aligned} \left\{t : \sup_n T_1 u_n(t) = \infty\right\} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{t : \sup_n T_1 u_n(t) > k \mathbb{1}_{\Omega_2}\right\} \\ &=^{(*)} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t : T_1 u_n(t) > k \mathbb{1}_{\Omega_2}\} \\ &=^{(**)} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{t : T_1 u_n(t) > k \mathbb{1}_{T(\Omega_1)}\right\} \\ &=^{(***)} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} T(\{t : u_n(t) > k \mathbb{1}_{\Omega_1}\}) \\ &=^{(****)} T\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t : u_n(t) > k \mathbb{1}_{\Omega_1}\}\right) \\ &= T\left(\left\{t : \sup_n u_n(t) = \infty\right\}\right), \end{aligned}$$

waar bij $(*)$ wordt gebruikt dat $\{T_1 u_n\}_n$ ook monotoon stijgt vanwege Lemma 4.3.iii, bij $(**)$ wordt gebruikt dat $T_1 u_n(t) = 0$ als $t \notin T(\Omega_1)$, bij $(***)$ Lemma 4.3.i en 4.3.iv en bij $(****)$ Propositie 3.6 en Gevolg 3.7. Aangezien $\{t : \sup_n u_n(t) = \infty\}$ vanwege de aanname een μ_1-nulverzameling is, volgt het gewenste resultaat met behulp van Definitie 3.1.iii. $\square$

Vervolgens kan T_1 worden uitgebreid naar E_1^*.

Definitie 4.8. Zij $f \in E_1^*$ en T een regulier verzamelingsisomorfisme. Laat verder $\{u_n\}_n$ en $\{v_n\}_n$ twee monotoon stijgende rijen elementaire functies zijn zodanig dat $f^+ = \sup_n u_n$ en $f^- = \sup_n v_n$. Dan heet

$$T_1 f := \sup_n T_1 u_n - \sup_n T_1 v_n$$

de *transformatie geïnduceerd door* T, waar $T_1 u_n$ en $T_1 v_n$ zijn zoals in Definitie 4.1. Vanwege Lemma 4.6 en 4.7 is T_1 welgedefinieerd.

Direct uit de definitie volgt $T_1(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot T_1 f$ voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$ en $f \in E_1^*$. Verder zal uit het Propositie 4.12 volgen dat de uitbreiding van T_1 dezelfde soort eigenschappen heeft als $T_1|_{E_1}$. Om dit aan te kunnen tonen, moeten eerst de eigenschappen van T_1 voor niet-negatieve functies in E_1^* worden bewezen.

Lemma 4.9. *Zij $f, g \in E_1^*$ met $f, g \geq 0$ en zij T_1 geïnduceerd door T, dan*

(i) $T_1(f + g) = T_1 f + T_1 g$,

(ii) $T_1(f \cdot g) = T_1 f \cdot T_1 g$,

(iii) *als $f \leq g$, dan $T_1 f \leq T_1 g$,*

(iv) $\{T_1 f > 0\} = T(\{f > 0\})$.

Bewijs. (i): Stel dat $\{u_n\}_n$ en $\{v_n\}_n$ twee monotoon stijgende rijen zijn zodanig dat ze convergeren naar f en g, respectievelijk. Dan is $\{u_n + v_n\}_n$ een monotoon stijgende rij die convergeert naar $f + g \geq 0$ en volgt met behulp van $T(0) = 0$:

$$\begin{aligned} T_1(f+g) &= \sup_n (T_1(u_n + v_n)) \\ &=^{(*)} \sup_n (T_1 u_n + T_1 v_n) \\ &=^{(**)} \sup_n T_1 u_n + \sup_n T_1 v_n \\ &= T_1 f + T_1 g, \end{aligned}$$

waar bij $(*)$ Lemma 4.3.i wordt toegepast en bij $(**)$ het feit dat de suprema bestaan vanwege Lemma 4.7.
(ii): Uitspraak (ii) volgt op analoge wijze door de monotoon stijgende rij $\{u_n \cdot v_n\}_n$ te beschouwen.
(iii): Als $f \leq g$, dan $u_i \leq g$ voor iedere i en dus

$$T_1 u_i \leq \sup_n T_1 v_n, \quad (\forall i \in \mathbb{N})$$

wegens Lemma 4.5. Dan volgt

$$\sup_n T_1 u_n \leq \sup_n T_1 v_n,$$

oftewel uitspraak (iii).
(iv): Vanwege het monotoon stijgen van $\{u_n\}_n$, geldt

$$\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{u_n > 0\}.$$

Aangezien de rij $\{T_1 u_n\}_n$ ook monotoon stijgt vanwege Lemma 4.3.iii volgt op gelijke wijze

$$\{T_1 f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{T_1 u_n > 0\}.$$

Uitspraak (iv) volgt dan wegens Propositie 3.6 en Lemma 4.3.iv. □

Gevolg 4.10. *Als $f, g_1, g_2 \in E_1$ met $g_1, g_2 \geq 0$ en $f = g_1 - g_2$, dan $T_1 f = T_1 g_1 - T_1 g_2$.*

Bewijs. Neem $A = \{f > 0\}$, dan zijn

$$f^+ + g_2 \cdot \mathbb{1}_A = g_1 \cdot \mathbb{1}_A \text{ en } f^- + g_1 \cdot \mathbb{1}_{A^c} = g_2 \cdot \mathbb{1}_{A^c}$$

niet-negatieve, meetbare functies en geldt

$$\begin{aligned} T_1 g_1 \cdot \mathbb{1}_{T(A)} &=^{(*)} T_1(g_1 \cdot \mathbb{1}_A) \\ &= T_1(f^+ + g_2 \cdot \mathbb{1}_A) \\ &=^{(**)} T_1(f^+) + T_1(g_2 \cdot \mathbb{1}_A) \\ &=^{(*)} T_1(f^+) + T_1 g_2 \cdot \mathbb{1}_{T(A)}, \end{aligned} \tag{7}$$

waar bij $(*)$ Lemma 4.9.ii wordt toegepast en bij $(**)$ Lemma 4.9.i. Op gelijke wijze geldt

$$T_1 g_2 \cdot \mathbb{1}_{T(A^c)} = T_1(f^-) + T_1 g_1 \cdot \mathbb{1}_{T(A^c)},$$

oftewel

$$T_1 g_1 \cdot \mathbb{1}_{T(A^c)} = T_1 g_2 \cdot \mathbb{1}_{T(A^c)} - T_1(f^-). \tag{8}$$

Als vergelijking (7) en (8) bij elkaar worden opgeteld, volgt met behulp van Definitie 3.1:

$$\begin{aligned} T_1 g_1(\mathbb{1}_{T(A)} + \mathbb{1}_{T(A^c)}) &= T_1 g_2(\mathbb{1}_{T(A)} + \mathbb{1}_{T(A^c)}) + T_1(f^+) - T_1(f^-) \\ T_1 g_1 \cdot \mathbb{1}_{T(\Omega_1)} &= T_1 g_2 \cdot \mathbb{1}_{T(\Omega_1)} + T_1 f \\ T_1 g_1 &= T_1 g_2 + T_1 f. \end{aligned}$$

□

Gevolg 4.11. *Als $f \in E_1$, dan $(T_1 f)^+ = T_1(f^+)$ en $(T_1 f)^- = T_1(f^-)$.*

Bewijs. Aangezien $f^+(t)$ en $f^-(t)$ nooit beide strikt positief zijn voor dezelfde t, geldt $f^+ \cdot f^- = 0$ en vanwege Lemma 4.9.ii volgt

$$T_1(f^+) \cdot T_1(f^-) = T_1(f^+ \cdot f^-) = T_1(0) = 0.$$

Vanwege Lemma 4.9.iii, $u^+, u^- \geq 0$ en $T(0) = 0$ zijn $T_1(f^+)$ en $T_1(f^-)$ niet-negatief en het gewenste resultaat volgt:

$$(T_1 f)^+ - (T_1 f)^- = T_1 f = T_1(f^+) - T_1(f^-).$$

□

De eigenschappen van de uitbreiding van T_1 kunnen nu met behulp van de voorgaande gevolgen worden aangetoond.

Propositie 4.12. *Zij f, g twee reële, meetbare functies en zij T_1 geïnduceerd door T. Dan geldt*

(i) $T_1(f + g) = T_1 f + T_1 g$,

(ii) $T_1(f \cdot g) = T_1 f \cdot T_1 g$,

(iii) *als* $f \leq g$, *dan* $T_1 f \leq T_1 g$,

(iv) $\{T_1 f > 0\} = T(\{f > 0\})$ *en* $\{T_1 f < 0\} = T(\{f < 0\})$.

Bewijs. (i): Uitspraak (i) kan als volgt worden aangetoond:

$$\begin{aligned}
T_1(f+g) &= T_1(f^+ - f^- + g^+ - g^-) \\
&= T_1\big(f^+ + g^+ - (f^- + g^-)\big) \\
&=^{(*)} T_1(f^+ + g^+) - T_1(f^- + g^-) \\
&=^{(**)} T_1(f^+) + T_1(g^+) - T_1(f^-) - T_1(g^-) \\
&= T_1 f + T_1 g.
\end{aligned}$$

Hier geldt $(*)$ vanwege Gevolg 4.10 en $(**)$ door Lemma 4.9.i.
(ii): Voor het product van f en g geldt

$$\begin{aligned}
f \cdot g &= (f \cdot g)^+ - (f \cdot g)^- \\
&= f^+ \cdot g^+ + f^- \cdot g^- - f^+ \cdot g^- - f^- \cdot g^+.
\end{aligned}$$

Dit wordt als volgt toegepast:

$$\begin{aligned}
T_1(f \cdot g) &=^{(*)} T_1(f^+ \cdot g^+) + T_1(f^- \cdot g^-) - T_1(f^+ \cdot g^-) - T_1(f^- \cdot g^+) \\
&=^{(**)} T_1(f^+) \cdot T_1(g^+) + T_1(f^-) \cdot T_1(g^-) \\
&\quad - T_1(f^+) \cdot T_1(g^-) - T_1(f^-) \cdot T_1(g^+) \\
&=^{(***)} (T_1 f)^+ \cdot (T_1 g)^+ + (T_1 f)^- \cdot (T_1 g)^- \\
&\quad - (T_1 f)^+ \cdot (T_1 g)^- - (T_1 f)^- \cdot (T_1 g)^+ \\
&= (T_1 f \cdot T_1 g)^+ - (T_1 f \cdot T_1 g)^- \\
&= T_1 f \cdot T_1 g.
\end{aligned}$$

Waar bij $(*)$ uitspraak (i) wordt gebruikt, bij $(**)$ Lemma 4.9.ii en bij $(***)$ Gevolg 4.11.
(iii): Er geldt $f \leq g$ dan en slechts dan als $f^+ \leq g^+$ en $f^- \geq g^-$. Vanwege Lemma 4.9.iii geldt

$$T_1(f^+) \leq T_1(g^+) \text{ en } T_1(f^-) \geq T_1(g^-)$$

en vanwege Gevolg 4.11 geldt ook

$$(T_1 f)^+ \leq (T_1 g)^+ \text{ en } (T_1 f)^- \geq (T_1 g)^-.$$

Hieruit volgt uitspraak (iii).
(iv): Het eerste deel van de uitspraak is als volgt te beargumenteren:

$$\begin{aligned} \{T_1 f > 0\} &= \{(T_1 f)^+ > 0\} \\ &=^{(*)} \{T_1(f^+) > 0\} \\ &=^{(**)} T(\{f^+ > 0\}) \\ &= T(\{f > 0\}). \end{aligned}$$

Hier geldt $(*)$ vanwege Lemma 4.4 en $(**)$ vanwege Lemma 4.3.iv. Het tweede deel van uitspraak (iv) volgt op gelijke wijze. □

Een andere eigenschap van T_1 die later ook gebruikt wordt, is de volgende.

Lemma 4.13. *Zij f een reële, meetbare functie en $q > 0$, dan geldt $T_1(|f|^q) = |T_1 f|^q$.*

Bewijs. Zij $u \in E_1$ met $u \geq 0$ en normale representatie $\sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbb{1}_{A_n}$. Aangezien de A_n's onderling disjunct zijn, zijn de $T(A_n)$'s dat ook vanwege Propositie 3.9 en volgt

$$T_1(u^q) = \sum_{n=1}^N \alpha_n^q \mathbb{1}_{T(A_n)} = (T_1 u)^q.$$

Als $f \in E_1^*$ met $f \geq 0$ en $\{u_n\}_n$ is een monotoon stijgende rij van niet-negatieve, elementaire functies die convergeert naar f, dan is $\{u_n^q\}_n$ een monotoon stijgende rij die convergeert naar f^q en geldt

$$T_1(f^q) = \sup_n T_1(u_n^q) = \sup_n (T_1 u_n)^q = \left(\sup_n T_1 u_n\right)^q = (T_1 f)^q.$$

Als f een reële, meetbare functie is, geldt dat $|f| \in E_1^*$ en dus

$$\begin{aligned} T_1(|f|^q) &= (T_1(|f|))^q \\ &= \big(T_1(f^+ + f^-)\big)^q \\ &=^{(*)} \big(T_1(f^+) + T_1(f^-)\big)^q \\ &=^{(**)} \big((T_1 f)^+ + (T_1 f)^-\big)^q \\ &= |T_1 f|^q, \end{aligned}$$

waar bij $(*)$ Lemma 4.9.iii wordt gebruikt en bij $(**)$ Gevolg 4.11. □

Voor complexe, meetbare functies f dient T_1 nogmaals uitgebreid te worden aan de hand van de definitie

$$T_1 f = T_1(\Re(f)) + i \cdot T_1(\Im(f)).$$

Dan heeft T_1 soortgelijke eigenschappen. De uitwerkingen daarvan zullen verder niet worden behandeld, aangezien die vrij eenvoudig volgen.

4.3 Voorbeelden

Voorbeeld 4.14. Stel dat de maatruimten en T zijn als in Voorbeeld 3.10. Dan is de lineaire transformatie die geïnduceerd wordt door T de T_1 in Voorbeeld 2.2:

$$T_1 f(t) = f(\sqrt{t}).$$

Dit is als volgt in te zien. Laat $A = [a, b]$ met $0 < a < b$, dan geldt $T(A) = [a^2, b^2]$ en

$$T_1 \mathbb{1}_A(t) = \mathbb{1}_{\{t\,:\,a^2 \leq t \leq b^2\}}(t) = \mathbb{1}_{\left\{\sqrt{t}\,:\,a \leq \sqrt{t} \leq b\right\}}(\sqrt{t}) = \mathbb{1}_A(\sqrt{t}).$$

Voorbeeld 4.15. Stel dat de maatruimten zijn zoals in Voorbeeld 4.14. Zoals in Voorbeeld 3.11 is laten zien, geldt dat

$$T(A) = \{\Phi^{-1}(t) : t \in A\}$$

een regulier verzamelingsisomorfisme is als Φ een homeomorfisme is van Ω_2 naar Ω_1 en Φ en Φ^{-1} differentieerbaar zijn. Dan induceert T de volgende lineaire transformatie.

$$T_1 f(t) = f(\Phi(t))$$

Voorbeeld 4.16. Stel dat de maatruimten zijn zoals in Voorbeeld 2.2 en 3.10. Dan komt $\{\mathbb{1}_{\{j\}}\}_{j=1}^n$ overeen met de standaard basis $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ van $\mathbb{F}^n$. Dan geldt voor T_1

$$T_1 \mathbb{1}_{\{j\}} = \mathbb{1}_{B_j}$$

en, als T_1 voorgesteld wordt als een matrix $(a_{ij})_{i,j}$, geldt

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i \in B_j, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Dus volgt dat de transformaties van een vorm zoals in Voorbeeld 2.2, voor deze maatruimten, de enige zijn die geïnduceerd worden door een regulier verzamelingsisomorfisme. In het geval $n = m$, is T_1 een permutatiematrix. Stel dan dat U een isometrie van L_1^p naar zichzelf met $1 \leq p < \infty$ en $p \neq 2$. Dan zegt de hoofdstelling dat U enkel en alleen de vorm kan hebben van een permutatiematrix met de variatie van plus of min voor elk niet-nul element van de matrix.

5 Lamperti–Clarkson lemma

Dit hoofdstuk bestaat uit twee delen die bij elkaar een belangrijk lemma, beschreven in [1, 2], opleveren dat in het uiteindelijke bewijs gebruikt zal worden.

5.1 Eerste deel

Merk op dat een reële functie ψ convex is dan en slechts dan als

$$\psi\left(\frac{t+s}{2}\right) \leq \frac{\psi(t)+\psi(s)}{2}.$$

Lemma 5.1. *Zij φ een continue, strikt stijgende functie gedefinieerd op $[0,\infty)$ met $\varphi(0)=0$. Stel verder dat $\varphi(\sqrt{t})$ convex is. Als $z,w \in \mathbb{C}$, dan geldt*

$$\varphi(|z+w|)+\varphi(|z-w|) \geq 2\varphi(|z|)+2\varphi(|w|). \tag{9}$$

Als $\varphi(\sqrt{t})$ concaaf is, geldt ongelijkheid (9) omgekeerd en als de convexiteit of concaviteit strikt is, geldt gelijkheid in (9) dan en slechts dan als $z \cdot w = 0$.

Bewijs. Zij $\varphi(\sqrt{t})$ convex, dan geldt voor $t,s \geq 0$

$$\varphi\left(\sqrt{\frac{t+s}{2}}\right) \leq \frac{\varphi(\sqrt{t})+\varphi(\sqrt{s})}{2}.$$

Zij $t=|z+w|^2$ en $s=|z-w|^2$, dan geldt

$$\varphi\left(\left(\frac{|z+w|^2+|z-w|^2}{2}\right)^{1/2}\right) \leq \frac{\varphi(|z+w|)+\varphi(|z-w|)}{2}.$$

Aangezien φ strikt stijgend is, is φ injectief en is de functie $\varphi^{-1}:\operatorname{ran}(\varphi)\to\mathbb{R}_{>0}$ goed gedefinieerd en strikt stijgend, wat de volgende implicatie oplevert.

$$x,y \in \operatorname{ran}(\varphi) \wedge x \leq y \;\Rightarrow\; \varphi^{-1}(x) \leq \varphi^{-1}(y)$$

Daarnaast geldt voor $z,w \in \mathbb{C}$ vanwege [4, Theorem 3.15]

$$\frac{|z+w|^2+|z-w|^2}{2} = |z|^2+|w|^2$$

en volgt hieruit

$$\begin{aligned}
\left(|z|^2+|w|^2\right)^{1/2} &= \left(\frac{|z+w|^2+|z-w|^2}{2}\right)^{1/2} \\
&= \varphi^{-1}\left[\varphi\left(\left(\frac{|z+w|^2+|z-w|^2}{2}\right)^{1/2}\right)\right] \qquad (10)\\
&\leq \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(|z+w|)+\varphi(|z-w|)}{2}\right).
\end{aligned}$$

Zij nu $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ een willekeurige, strikt stijgende, convexe functie met $\psi(0)=0$. Dan geldt

$$\frac{\psi(s)-\psi(r)}{s-r} \leq \frac{\psi(t)-\psi(r)}{t-r}$$

als $r<s<t$. Voor $r=0$ leidt dit tot de ongelijkheid

$$\frac{\psi(s)}{s} \leq \frac{\psi(t)}{t}, \;\; (0<s<t). \tag{11}$$

Aangezien ψ strikt stijgend is en $\psi(0) = 0$, geldt $\psi(s) > 0$ voor iedere $s > 0$ en dus is de functie

$$\frac{s}{\psi(s)}$$

met $s > 0$ goed gedefinieerd en dalend in s. Zij nu $\psi(s) = \varphi(\sqrt{s})$ en $s = t^2$, dan volgt dat de functie

$$\frac{t^2}{\varphi(t)}$$

met $t > 0$ dalend is in t, aangezien $t \mapsto t^2$ stijgend is. Als $\varphi(t) = x$ geldt, dan geldt

$$\frac{t^2}{\varphi(t)} = \frac{(\varphi^{-1}(x))^2}{\varphi(\varphi^{-1}(x))} = \frac{(\varphi^{-1}(x))^2}{x}.$$

Verder, als t toeneemt, neemt $\varphi^{-1}(x)$ ook toe, aangezien $\varphi^{-1}(x)$ strikt stijgend is, dus is de functie $(\varphi^{-1}(x))^2/x$ dalend in x. Stel dat $f(x)$ een functie is zodanig dat $f(x)/x$ een dalende functie is, dan geldt met $x, y > 0$

$$\frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(x)}{x}$$

en op gelijke wijze

$$\frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(y)}{y}.$$

Gecombineerd levert dit het volgende op:

$$\begin{aligned} (x+y) \cdot \frac{f(x+y)}{x+y} &\leq x \cdot \frac{f(x)}{x} + y \cdot \frac{f(y)}{y} \\ f(x+y) &\leq f(x) + f(y), \ \ (x, y > 0). \end{aligned} \tag{12}$$

Neem nu $f = (\varphi^{-1})^2$, dan volgt

$$\big(\varphi^{-1}(x+y)\big)^2 \leq \big(\varphi^{-1}(x)\big)^2 + \big(\varphi^{-1}(y)\big)^2, \ \ (0 < x, y \in \operatorname{ran}(\varphi)).$$

Aangezien $\varphi^{-1}(0) = 0$ en φ^{-1} een niet-negatieve functie is, volgt ook

$$\big(\varphi^{-1}(x+y)\big)^2 \leq \big(\varphi^{-1}(x)\big)^2 + \big(\varphi^{-1}(y)\big)^2, \ \ (0 \leq x, y \in \operatorname{ran}(\varphi)).$$

Laat $x = \varphi(|z|)$ en $y = \varphi(|w|)$, dan geldt

$$\begin{aligned} \big(\varphi^{-1}\big(\varphi(|z|) + \varphi(|w|)\big)\big)^2 \quad &\leq \quad \big(\varphi^{-1}(\varphi(|z|))\big)^2 + \big(\varphi^{-1}(\varphi(|w|))\big)^2 \\ &= \quad |z|^2 + |w|^2. \end{aligned}$$

Dit, samen met ongelijkheid (10), resulteert in de volgende ongelijkheid:

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(|z+w|) + \varphi(|z-w|)}{2}\right) \geq \varphi^{-1}(\varphi(|z|) + \varphi(|w|)).$$

Wegens het strikt stijgen van φ volgt ongelijkheid (9) als links en rechts φ nogmaals wordt toegepast. Stel nu dat $\varphi(\sqrt{t})$ strikt convex is. Dan geldt met $\psi(t) = \varphi(\sqrt{t})$ in (11) een strikte ongelijkheid, oftwel:

$$\frac{\varphi(s)}{s^2} < \frac{\varphi(t)}{t^2}, \ \ (0 < s < t).$$

Dit zorgt ervoor dat de functie

$$\frac{(\varphi^{-1}(x))^2}{x}$$

strikt dalend is in x. Verder geldt een strikte ongelijkheid in (12) als $f(x)/x$ strikt dalend is. Stel wederom dat $f(x) = (\varphi^{-1}(x))^2$, dan volgt dat een strikte ongelijkheid in (9) enkel en alleen mogelijk is als

$$x = \varphi(|z|) > 0 \text{ en } y = \varphi(|w|) > 0.$$

Een gelijkheid in (9) kan dus alleen voorkomen als $\varphi(|z|) = 0$ of $\varphi(|w|) = 0$. Vanwege het strikt stijgen van φ, volgt uit $\varphi(t) = 0$, $t = 0$. Dus geldt een gelijkheid in (9) als $z = 0$ of $w = 0$, oftewel $z \cdot w = 0$. Stel nu dat $z = 0$ of $w = 0$, dan volgt met behulp van $\varphi(0) = 0$ direct een gelijkheid in (9). Het bewijs in geval van concaviteit van $\varphi(\sqrt{t})$ gaat op gelijke wijze met de ongelijkheden omgekeerd. □

De functies φ die gebruikt worden voor het bewijs van de hoofdstelling, zijn de functies $\varphi(t) = t^p$. Merk op dat $t^{p/2}$ strikt convex is voor $p > 2$ en strikt concaaf is als $1 \leq p < 2$ geldt. In het geval $p = 2$ is $t^{p/2}$ zowel convex als concaaf, en is (9) altijd een gelijkheid.

5.2 Tweede deel

In dit tweede deel worden meetbare functies beschouwd over de maatruimte (Ω, Σ, μ). Zij $I : L^\varphi \to \mathbb{R}^+$ zodanig dat

$$I(f) = \int \varphi(|f|)\mathrm{d}\mu$$

met L^φ de verzameling van alle meetbaar functies f waarvoor bovenstaande integraal eindig is.

Lemma 5.2 (Lamperti, Clarkson)**.** *Zij φ een continue, strikt stijgende functie gedefinieerd op $[0, \infty)$ met $\varphi(0) = 0$ en $\varphi(\sqrt{t})$ convex. Als $f + g, f - g \in L^\varphi$, dan*

$$I(f + g) + I(f - g) \geq 2I(f) + 2I(g). \tag{13}$$

Als $\varphi(\sqrt{t})$ concaaf is, geldt ongelijkheid (13) *omgekeerd. Als de convexiteit of concaviteit van $\varphi(\sqrt{t})$ strikt is, geldt gelijkheid in* (13) *dan en slechts dan als $f \cdot g =_\mu 0$.*

Bewijs. Stel dat $\varphi(\sqrt{t})$ convex is en M een functie is als volgt:

$$M = \varphi(|f + g|) + \varphi(|f - g|) - 2\varphi(|f|) - 2\varphi(|g|).$$

Deze functie is wegens Lemma 5.1 overal positief en dus geldt

$$\int M\mathrm{d}\mu \geq 0,$$

waar, vanwege de lineariteit van integralen, (13) uit volgt. Stel nu dat de convexiteit van $\varphi(\sqrt{t})$ strikt is en (13) een gelijkheid is. Wegens de lineariteit van integralen geldt dan

$$\int M \mathrm{d}\mu = 0.$$

Wegens $M \geq 0$ en [3, Theorem 13.2] geldt dan $M =_\mu 0$ en volgt dus

$$\varphi(|f+g|) + \varphi(|f-g|) =_\mu 2\varphi(|f|) + 2\varphi(|g|).$$

Hieruit volgt wegens Lemma 5.1 dat voor μ-bijna alle t geldt $f(t) \cdot g(t) = 0$. Stel nu dat $f \cdot g =_\mu 0$, dan is

$$N := \{f \cdot g \neq 0\}$$

een nulverzameling. Verder geldt

$$\begin{aligned} N^c &= \{f = 0\} \cup \{g = 0\} \\ &= \Big(\{f = 0\} \cap \{g \neq 0\}\Big) \sqcup \Big(\{f \neq 0\} \cap \{g = 0\}\Big) \\ &\quad \sqcup \Big(\{f = 0\} \cap \{g = 0\}\Big). \end{aligned} \tag{14}$$

Definieer N_1, N_2 en N_3 zodanig dat $N = N_1 \sqcup N_2 \sqcup N_3$ in dezelfde volgorde als in (14). Dan geldt het volgende:

$$\begin{aligned} \int M \mathrm{d}\mu &= \int_N M \mathrm{d}\mu + \int_{N_1} M \mathrm{d}\mu + \int_{N_2} M \mathrm{d}\mu + \int_{N_3} M \mathrm{d}\mu \\ &= 0 + \int_{N_1} M \mathrm{d}\mu + \int_{N_2} M \mathrm{d}\mu + \int_{N_3} 0 \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{N_1} \big[2\varphi(|g|) - 2\varphi(|g|)\big] \mathrm{d}\mu + \int_{N_2} \big[2\varphi(|f|) - 2\varphi(|f|)\big] \mathrm{d}\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wederom wegens de lineariteit van integralen volgt een gelijkheid in (13). Het bewijs in het geval van concaviteit van $\varphi(\sqrt{t})$ gaat op gelijke wijze. □

6 Bewijs stelling

Eerst bewijzen we de omgekeerde kant op, aangezien die sneller volgt.

6.1 Radon–Nikodym stelling

Hierin wordt de Radon–Nikodym stelling [3, Theorem 17.10] gebruikt. Deze stelling zal gegeven worden zonder bewijs, aangezien dit een welbekend resultaat is binnen de maattheorie. In de stelling wordt een tweetal begrippen gebruikt, die hieronder gegeven worden ter herhaling.

Definitie 6.1. Laat μ en ν twee maten op dezelfde σ-algebra zijn. De maat ν heet *μ-continu*, als iedere μ-nulverzameling ook een ν-nulverzameling is.

Definitie 6.2. Laat μ een maat op Σ en f een reële, meetbare, niet-negatieve functie zijn. Dan heet

$$\nu(A) := \int_A f \mathrm{d}\mu$$

de maat *met dichtheid f ten opzichte van μ*. Aangezien f μ-bijna overal uniek bepaald is vanwege [3, Theorem 17.5], heet f de *dichtheidsfunctie* en wordt genoteerd met $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

Stelling 6.3 (Radon, Nikodym)**.** *Laat μ, ν twee maten zijn op Σ. Als μ en ν σ-eindig zijn, dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.*

(i) *ν heeft een dichtheid ten opzichte van μ.*

(ii) *ν is μ-continu.*

Zij T een regulier verzamelingsisomorfisme, dan is $T[\Sigma]$ vanwege de eigenschappen van T een σ-algebra in $T(\Omega_1)$. Twee maten waarvoor de stelling zal worden toegepast, zijn dan μ_2 en $\mu_1 \circ T^{-1}$ op $T[\Sigma_1]$. Nu is genoeg voorhanden om het bewijs te geven van de hoofdstelling. Eerst volgt nogmaals de hoofdstelling.

Stelling 6.4 (Lamperti, 1958)**.** *Zij U een lineaire isometrie van $L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ naar $L^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ met $1 \leq p < \infty$ en $p \neq 2$. Dan bestaan een regulier verzamelingsisomorfisme T van Σ_1 naar Σ_2 en een functie h gedefinieerd op Ω_2 zodanig dat*

$$Uf = h \cdot T_1 f \tag{15}$$

waar T_1 de lineaire transformatie geïnduceerd door T is en h voldoet aan

$$\int_{T(A)} |h|^p \mathrm{d}\mu_2 = \int_{T(A)} \frac{\mathrm{d}(\mu_1 \circ T^{-1})}{\mathrm{d}\mu_2} \mathrm{d}\mu_2 = \mu_1(A) \tag{16}$$

voor alle $A \in \Sigma_1$. Omgekeerd, als h zoals in (16) *is en T een regulier verzamelingsisomorfisme is, dan is U zoals in* (15) *een lineaire isometrie.*

6.2 Van rechts naar links

Bewijs. "$\Leftarrow$": Vanwege Definitie 3.1.iii is $\mu_1 \circ T^{-1}$ μ_2-continu. Dan geldt met behulp van Stelling 6.3

$$\mu_1(T^{-1}(B)) = \int_B \frac{\mathrm{d}(\mu_1 \circ T^{-1})}{\mathrm{d}\mu_2} \mathrm{d}\mu_2,$$

voor alle $B \in T[\Sigma_1]$, oftewel

$$\mu_1(A) = \int_{T(A)} \frac{\mathrm{d}(\mu_1 \circ T^{-1})}{\mathrm{d}\mu_2} \mathrm{d}\mu_2$$

geldt voor alle $A \in \Sigma_1$. Stel dat g als volgt is:

$$g(t) := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(\mu_1 \circ T^{-1})}{\mathrm{d}\mu_2}(t) & \text{als } t \in T(\Omega_1), \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Dan is g ook Σ_2 meetbaar en geldt voor alle $A \in \Sigma_1$

$$\int_{T(A)} |h|^p \mathrm{d}\mu_2 = \int_{T(A)} g \, \mathrm{d}\mu_2.$$

Voor ieder $F \in E_2^*$ met $F \geq 0$ geldt dan ook

$$\int_{T(A)} F \cdot |h|^p \mathrm{d}\mu_2 = \int_{T(A)} F \cdot g \, \mathrm{d}\mu_2.$$

In het bijzonder, als $F = |T_1 f|^p$, geldt dan

$$\int_{T(A)} |h \cdot T_1 f|^p \mathrm{d}\mu_2 = \int_{T(A)} |T_1 f|^p \cdot g \, \mathrm{d}\mu_2.$$

Zij U zoals in (15). Om te bewijzen dat U een isometrie is, hoeft alleen worden aangetoond dat U normbewarend is. De lineariteit van U volgt namelijk uit die van T_1. Er geldt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} |Uf|^p \mathrm{d}\mu_2 &= \int_{\Omega_2} |T_1 f|^p \cdot g \, \mathrm{d}\mu_2 \\ &=^{(*)} \int_{\Omega_2} |T_1 f|^p \mathrm{d}(\mu_1 \circ T^{-1}) \\ &=^{(**)} \int_{\Omega_2} T_1(|f|^p) \mathrm{d}(\mu_1 \circ T^{-1}), \end{aligned}$$

waar bij $(*)$ [3, Theorem 17.3] wordt gebruikt en bij $(**)$ Lemma 4.13. Als nu aangetoond kan worden dat

$$\int_{\Omega_2} T_1 G \, \mathrm{d}(\mu_1 \circ T^{-1}) = \int_{\Omega_1} G \, \mathrm{d}\mu_1$$

geldt voor alle $G \in E_1^*$ met $G \geq 0$, dan volgt het gewenste resultaat aangezien $|f|^p \in E_1^*$. Stel dat u een niet-negatieve, elementaire functie is met normale representatie $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n}$. Dan geldt

$$\int_{\Omega_2} T_1 u \, \mathrm{d}(\mu_1 \circ T^{-1}) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mu_1(T^{-1}(T(A_n))) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mu_1(A_n) = \int_{\Omega_1} u \, \mathrm{d}\mu_1$$

en kan dit worden uitgebreid naar G. Stel namelijk dat $\{u_n\}_n$ een monotoon stijgende rij niet-negatieve, elementaire functies is die convergeert naar G, dan geldt

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} T_1 G \, \mathrm{d}(\mu_1 \circ T^{-1}) &= \int_{\Omega_2} \left(\sup_n T_1 u_n \right) \mathrm{d}(\mu_1 \circ T^{-1}) \\
&=^{(*)} \sup_n \int_{\Omega_2} T_1 u_n \, \mathrm{d}(\mu_1 \circ T^{-1}) \\
&= \sup_n \int_{\Omega_1} u_n \, \mathrm{d}\mu_1 \\
&=^{(*)} \int_{\Omega_1} \left(\sup_n u_n \right) \mathrm{d}\mu_1 \\
&= \int_{\Omega_1} G \, \mathrm{d}\mu_1,
\end{aligned}$$

waar bij $(*)$ de eigenschap wordt toegepast dat supremum en integratie kunnen worden omgewisseld, [3, Theorem 11.4]. □

6.3 Van links naar rechts

Bewijs. "$\Rightarrow$": Stel dat μ_1 eindig is. Het zal blijken dat

$$T(A) := \mathrm{supp}(U\mathbb{1}_A) = \{U\mathbb{1}_A \neq 0\}$$

een regulier verzamelingsisomorfisme is. Hierna zal worden aangetoond dat U in Lampertivorm te schrijven is en dat

$$h(t) := U\mathbb{1}_{\Omega_1}(t)$$

voldoet aan (16). Vanwege de eindigheid van μ_1 geldt $\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B \in L_1^p$ voor iedere $A, B \in \Sigma_1$. Neem nu $A, B \in \Sigma_1$ met $A \cap B = \varnothing$, dan geldt $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = 0$ en met behulp van Lemma 5.2:

$$||\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B||_p^p + ||\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B||_p^p = 2||\mathbb{1}_A||_p^p + 2||\mathbb{1}_B||_p^p$$

en aangezien U normbewarend en lineair is, geldt ook

$$||U\mathbb{1}_A + U\mathbb{1}_B||_p^p + ||U\mathbb{1}_A - U\mathbb{1}_B||_p^p = 2||U\mathbb{1}_A||_p^p + 2||U\mathbb{1}_B||_p^p.$$

Wederom vanwege Lemma 5.2 geldt tevens $U\mathbb{1}_A \cdot U\mathbb{1}_B = 0$. Hier wordt met '$=$' nog steeds impliciet '$=_{\mu_i}$' bedoeld. Zij $f, g \in L_i^p$, dan geldt

$$\mathrm{supp}(f+g) = \mathrm{supp}(f) \sqcup \mathrm{supp}(g).$$

dan en slechts dan als $f \cdot g = 0$. Hieruit en uit het voorgaande volgt dan dat $T(A) \cap T(B) = \varnothing$. Dan volgt ook

$$\begin{aligned}
T(A \sqcup B) &= \mathrm{supp}(U\mathbb{1}_{A \sqcup B}) \\
&= \mathrm{supp}(U(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B)) \\
&= \mathrm{supp}(U\mathbb{1}_A + U\mathbb{1}_B) \\
&= \mathrm{supp}(U\mathbb{1}_A) \sqcup \mathrm{supp}(U\mathbb{1}_B) \\
&= T(A) \sqcup T(B).
\end{aligned}$$

Stel nu dat $B = \Omega_1 \backslash A$, dan geldt

$$T(\Omega_1) = T(A) \sqcup T(\Omega_1 \backslash A),$$

oftewel Definitie 3.1.i. Zij $\{A_n\}_n$ een onderling disjuncte rij in Σ_1. Aangezien U een isometrie is, is U continu [4, Lemma 4.1] en volgt

$$U \mathbb{1}_{\bigsqcup_n A_n} = U \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} U \mathbb{1}_{A_n}.$$

Dan volgt Definitie 3.1.ii door het support van bovenstaande te beschouwen. Om Definitie 3.1.iii aan te tonen, kunnen de volgende relaties worden beschouwd:

$$\mu_1(A) = 0 \Leftrightarrow ||\mathbb{1}_A||_p = 0 \Leftrightarrow ||U\mathbb{1}_A||_p = 0 \Leftrightarrow \mu_2(\{U\mathbb{1}_A \neq 0\}) = \mu_2(T(A)) = 0.$$

Dit zorgt ervoor dat T een regulier verzamelingsisomorfisme is en dus de bekende lineaire transformatie T_1 induceert. Om door te gaan wordt de functie h beschouwd. Voor iedere $A \in \Sigma_1$ geldt namelijk

$$h(t) = U\mathbb{1}_A(t) + U\mathbb{1}_{A^c}(t).$$

Aangezien A en A^c disjunct zijn, volgt net als voorheen dat de functies $U\mathbb{1}_A$ en $U\mathbb{1}_{A^c}$ μ_2-bijna nergens beide ongelijk aan nul zijn. Dus geldt voor μ_2-bijna alle t dat als $U\mathbb{1}_A(t) \neq 0$ geldt, dan geldt $h(t) = U\mathbb{1}_A(t)$. Dit is hetzelfde als te stellen dat geldt

$$U\mathbb{1}_A(t) = h(t) \cdot \mathbb{1}_{\{U\mathbb{1}_A \neq 0\}}(t) = h(t) \cdot \mathbb{1}_{T(A)}(t) = h(t) \cdot T_1 \mathbb{1}_A(t).$$

Vanwege de lineariteit van U en die van T_1, volgt dat U beperkt tot de elementaire functies in Lampertivorm te schrijven is. Laat $f \in E_1^*$ met $f \geq 0$, en stel dat $\{u_n\}$ een monotoon stijgende rij elementaire functies die convergeert naar f. Dan volgt vanwege de continuïteit van U

$$\begin{aligned} Uf &= U\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} Uu_n \\ &= \lim_{n\to\infty} (h \cdot T_1 u_n) \\ &= h \cdot \lim_{n\to\infty} T_1 u_n \\ &= h \cdot T_1 f \end{aligned} .$$

Stel nu dat $f \in L_1^p$, dan volgt vanwege de lineariteit van U

$$\begin{aligned} Uf &= U(f^+) - U(f^-) \\ &= h \cdot T_1(f^+) - h \cdot T_1(f^-) \\ &= h \cdot \Big(T_1(f^+) - T_1(f^-)\Big) \\ &= h \cdot T_1 f \end{aligned}$$

Dat h voldoet aan (16) geldt vanwege het volgende. Voor ieder $A \in \Sigma_1$ geldt

$$\begin{aligned}
\int_{T(A)} |h|^p \mathrm{d}\mu_2 &= \int_{\Omega_2} |h|^p \cdot \mathbb{1}_{T(A)} \, \mathrm{d}\mu_2 \\
&= \int_{\Omega_2} |h \cdot \mathbb{1}_{T(A)}|^p \mathrm{d}\mu_2 \\
&= \int_{\Omega_2} |U \mathbb{1}_A|^p \mathrm{d}\mu_2 \\
&= \int_{\Omega_2} |\mathbb{1}_A|^p \mathrm{d}\mu_2 \\
&= \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu_2 \\
&= \mu_1(A) \\
&=^{(*)} \int_{T(A)} \frac{\mathrm{d}(\mu_1 \circ T^{-1})}{\mathrm{d}\mu_2} \mathrm{d}\mu_2,
\end{aligned}$$

waar bij $(*)$ Stelling 6.3 is toegepast. Dit bewijst het geval dat μ_1 eindig is. Stel nu dat μ_1 σ-eindig is. Dan bestaat er per definitie een rij $\{\Omega'_n\}_n$ zodanig dat $\Omega'_n \uparrow \Omega_1$ en $\mu_1(\Omega'_n) < \infty$. Definieer dan het volgende:

$$\begin{aligned}
f_n &:= f|_{\Omega'_n}, \;\; (\forall f \in L_1^p), \\
U_n f_n &:= U f_n, \\
h_n &:= U \mathbb{1}_{\Omega'_n}, \\
T_n(A) &:= \mathrm{supp}(U_n \mathbb{1}_A), \text{ en} \\
T'_n &\text{ is de transformatie geinduceerd door } T_n.
\end{aligned}$$

Dan geldt voor de eindige gevallen:

$$U_n f_n = h_n \cdot T'_n f_n, \; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Neem $T(A) := \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(A \cap \Omega'_n)$, dan zal blijken dat T een regulier verzamelingsisomorfisme is. Voor T volgt Definitie 3.1.i, omdat die eigenschap voor alle T_n geldt:

$$\begin{aligned}
T(\Omega_1 \backslash A) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\big((\Omega_1 \backslash A) \cap \Omega'_n\big) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(\Omega'_n \backslash A) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(\Omega'_n) \backslash T_n(A \cap \Omega'_n) \\
&= T(\Omega_1) \backslash T(A).
\end{aligned}$$

Zij $\{A_k\}_k$ een onderling disjuncte rij in Σ_1, dan is $\{A_k \cap \Omega'_n\}_k$ een onderling disjuncte rij in $\Sigma'_n = \Omega'_n \cap \Sigma_1$. Omdat Definitie 3.1.ii voor iedere n geldt voor

T_n, geldt

$$\begin{aligned} T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\cap\Omega'_n\right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\cap\Omega'_n\right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} T_n\left(A_k\cap\Omega'_n\right) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} T\left(A_k\right), \end{aligned}$$

oftewel Definitie 3.1.ii voor T. Vanwege de continuïteit van maten, [3, Theorem 3.2, Definition 3.3], en vanwege $\mu_1(C) \leq \mu_1(D)$ als $C \subseteq D$, volgt aangezien $A \cap \Omega'_n \uparrow A$:

$$\mu_1(A) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall n : \mu_1(A\cap\Omega'_n) = 0,\; (A \in \Sigma_1). \tag{17}$$

Omdat alle T_n reguliere verzamelingsisomorfismen zijn, geldt voor iedere n en $A \in \Sigma_1$

$$\mu_1(A\cap\Omega'_n) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mu_2(T_n(A\cap\Omega'_n)) = 0. \tag{18}$$

Verder geldt dat $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ met $B_n \in \Sigma_2$ een μ_2-nulverzameling is dan en slechts dan als B_n voor iedere n een μ_2-nulverzameling is, oftewel

$$\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall n : \mu_2(B_n) = 0. \tag{19}$$

Definitie 3.1.iii voor T volgt door (17), (18) en (19) samen te voegen. Uit de definitie van T volgt voor ieder $f \in L_1^p$

$$T_1 f = \lim_{n\to\infty} T'_n f_n,$$

waar T_1 geïnduceerd wordt door T. Neem verder $h(t) = h_n(t)$ als $t \in T(\Omega'_n)$ en $h(t) = 0$ als $t \notin T(\Omega_1)$, dan geldt

$$h = \lim_{n\to\infty} h_n$$

en ook

$$\begin{aligned} Uf &= U\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \\ &=^{(*)} \lim_{n\to\infty} U f_n \\ &= \lim_{n\to\infty} U_n f_n \\ &= \lim_{n\to\infty} h_n \cdot T'_n f_n \\ &= h \cdot T_1 f, \end{aligned}$$

waar bij $(*)$ nogeens de continuïteit van U wordt gebruikt. Dan moet alleen nog worden aangetoond dat h voldoet aan (16). Bekend is dat voor iedere n en $A \in \Sigma$ geldt

$$\int_{T_n(A\cap\Omega_n')} |h_n|^p \mathrm{d}\mu_2 = \mu_1(A \cap \Omega_n').$$

Aangezien $h_n(t) = 0$ geldt voor $t \notin T_n(\Omega_n')$, geldt voor iedere $A \in \Sigma_1$ ook

$$\int_{T(A)} |h_n|^p \mathrm{d}\mu_2 = \mu_1(A \cap \Omega_n').$$

Uit de definitie van h volgt

$$|h|^p = \sup_n |h_n|^p$$

en levert dit als volgt (16) op:

$$\begin{aligned}
\int_{T(A)} |h|^p \mathrm{d}\mu_2 &= \int_{T(A)} \left(\sup_n |h_n|^p\right) \mathrm{d}\mu_2 \\
&=^{(*)} \sup_n \int_{T(A)} |h_n|^p \mathrm{d}\mu_2 \\
&= \sup_n \mu_1(A \cap \Omega_n') \\
&=^{(**)} \mu_1(A) \\
&=^{(***)} \int_{T(A)} \frac{\mathrm{d}(\mu_1 \circ T^{-1})}{\mathrm{d}\mu_2} \mathrm{d}\mu_2,
\end{aligned}$$

waar bij $(*)$ de eigenschap wordt toegepast dat supremum en integratie kunnen worden omgewisseld [3, Theorem 11.4], bij $(**)$ het feit dat $A \cap \Omega_n' \uparrow A$ geldt en de continuïteit van maten [3, Theorem 3.2, Definition 3.3] en bij $(***)$ Stelling 6.3. □

7 Bibliografie

[1] Lamperti J.W., *On the isometries of certain function-spaces*, Pacific J. of Math. **8** (1958), 459-466.

[2] Fleming R.J. en Jamison J.E., *Isometries on Banach spaces*, Chapman & Hall/CRC, Londen, 2003.

[3] Bauer H., *Measure and integration theory*, Walter de Gruyter, New York, 2001.

[4] Rynne B.P. en Youngson M.A., *Linear functional analysis*, Springer, Londen, 2008.