**R.P. Thommassen**

# Whitehead Groepen

**Bachelorscriptie, 10 Augustus 2014**

**Scriptiebegeleider: prof.dr. K.P. Hart**

Universiteit Leiden

**Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden**

# Inhoudsopgave

# 1 Inleiding

Er bestaan uitspraken die onbeslisbaar, oftewel zowel niet te bewijzen als te ontkrachten, zijn op basis van $ZFC$ (de axioma's van Zermelo-Frankel en het keuzeaxioma). Sinds Gödel's onvolledigheidsstelling uit 1931 waren er al onoplosbare uitspraken bekend, een van de bekendste voorbeelden hiervan is de continuümhypothese. Het eerste puur algebraïsche voorbeeld is Whitehead's probleem, dit heeft betrekking op Whitehead groepen. Deze zijn een specifieke soort groepen binnen de groepentheorie vernoemd naar J.H.C. Whitehead, hij formuleerde als eerste het probleem. Whitehead's probleem vraagt of elke Whitehead groep vrij is. Hieronder worden de definities van deze begrippen gegeven, maar eerst worden aan aantal conventies afgesproken. Met $\mathbb{Z}$ duiden we de verzameling der gehele getallen aan, en met $\mathbf{Z}$ duiden we de groep $(\mathbb{Z}, +)$ aan. Laat $1_A$ de identiteitsfunctie op $A$ zijn. Elke groep die ter sprake komt in deze scriptie zal een **abelse** groep zijn, dit zal echter niet meer worden vermeld. Functies op verzamelingen zullen genoteerd worden door Romeinse letters, homomorfismes worden genoteerd door Griekse letters.

**Definitie 1.1.** Een surjectief homomorfisme $\pi : B \to A$ **splijt** als er een homomorfisme $\rho : A \to B$ bestaat zodanig dat $\pi \circ \rho = 1_A$.

Een dergelijke $\rho$ heet een **splijtend homomorfisme** voor $\pi : B \to A$. De conditie $\pi \circ \rho = 1_A$ impliceert dat $\rho$ noodzakelijk injectief is, er geldt immers dat $\rho(a) = 0$ impliceert dat $a = \pi\rho(a) = 0$.

**Definitie 1.2.** Een groep $A$ heet een **W-groep** (Whitehead groep) als elk surjectief homomorfisme $\pi : B \to A$ met $\ker(\pi) \cong \mathbf{Z}$ splijt.

**Definitie 1.3.** Een groep $A$ heet **vrij** als deze een basis heeft, dat wil zeggen een deelverzameling $X$ van $A$ die $A$ voortbrengt en die onafhankelijk is. Dit laatste houdt in dat als $\sum_{x \in X} n_x \cdot x = 0$ met $n_x \in \mathbb{Z}$, dan $n_x = 0$ voor alle $x$.

De hierboven gegeven definitie van W-groepen zorgt voor een groepentheoretische verwoording van het Whitehead probleem. Het probleem kan ook in homologische termen verwoord worden (impliceert $\mathrm{Ext}(A, \mathbf{Z}) = 0$ dat $A$ vrij is?), en er bestaat een verwoording in termen van topologische groepen (is elke compacte wegsamenhangende Hausdorffse topologische groep een product van kopieën van de cirkelgroep?). We beperken ons in deze scriptie tot de groepentheoretische verwoording. Het is makkelijk binnen $ZFC$ te bewijzen dat alle vrije groepen W-groepen zijn. Het omgekeerde bewijzen, namelijk dat alle W-groepen vrij zijn, heeft wiskundigen lang bezig gehouden. Uiteindelijk heeft S. Shelah bewezen dat het probleem onbeslisbaar is binnen $ZFC$. Hij bewees dit door eerst een axioma genaamd het constructibiliteitsaxioma, oftewel $V = L$, toe te voegen aan $ZFC$, en op basis hiervan te bewijzen dat alle W-groepen vrij zijn. Vervolgens voegde hij een ander axioma genaamd

Martin's axioma, oftewel $MA$, samen met de negatie van de continuümhypothese, oftewel $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, toe aan $ZFC$ en bewees op basis daarvan dat er een W-groep is die niet vrij is. Aangezien beide systemen consistent zijn, mits $ZFC$ consistent is (hier gaan we vanuit), moet hieruit wel volgen dat het Whitehead probleem onbeslisbaar is binnen $ZFC$. Consistentie wilt hier zeggen dat er geen goed geformuleerde formule $P$ bestaat zodanig dat zowel $P$ als zijn negatie bewezen kunnen worden uit de axioma's van het systeem. Hieronder volgen de vier belangrijke stellingen waaruit de onbeslisbaarheid volgt.

K. Gödel formuleerde het constructibiliteitsaxioma, en hij bewees bovendien de onderstaande stelling in [1].

**Stelling 1.4.** *(i)* $ZF + (V = L)$ *is consistent.*
*(ii)* $ZF + (V = L)$ *impliceert het keuzeaxioma en de continuümhypothese.*

R. Solovay en S. Tennenbaum bewezen de onderstaande stelling in [2].

**Stelling 1.5.** $ZFC + MA + (2^{\aleph_0} > \aleph_1)$ *is consistent.*

Nu volgt Shelah's stelling, hij bewees deze in [3].

**Stelling 1.6.** *(i)* $ZFC + (V = L)$ *impliceert dat alle W-groepen van kardinaliteit* $\aleph_1$ *vrij zijn.*
*(ii)* $ZFC + MA + (2^{\aleph_0} > \aleph_1)$ *impliceert dat er een W-groep van kardinaliteit* $\aleph_1$ *bestaat die niet vrij is.*

Stelling 1.6 generaliseert als volgt voor W-groepen van alle kardinaliteiten.

**Stelling 1.7.** *(i)* $ZFC + (V = L)$ *impliceert dat W-groepen van alle kardinaliteiten vrij zijn.*
*(ii)* $ZFC + MA + (2^{\aleph_0} > \aleph_1)$ *impliceert dat er voor elk kardinaalgetal groter dan* $\aleph_0$ *een W-groep van die kardinaliteit bestaat die niet vrij is.*

Het bewijs van stelling 1.7.(i) is te vinden in [4], het bewijs van stelling 1.7.(ii) is te vinden in sectie 8 van [5].

**Hoofdresultaat 1.8.** *Het Whitehead probleem is onbeslisbaar.*

*Bewijs.* Stel dat toch binnen $ZFC$ bewezen kan worden dat er een W-groep is die niet vrij is. Dan geldt binnen $ZFC+(V = L)$ dat er zowel bewezen kan worden dat alle W-groepen vrij zijn (vanwege stelling 1.7.(i)), als dat er een W-groep is die niet vrij is. Dit levert een tegenspraak op met stelling 1.4.(i). Hetzelfde geldt analoog voor $ZFC + MA + (2^{\aleph_0} > \aleph_1)$. □

Eerst zullen we bewijzen dat alle vrije groepen W-groepen zijn. Vervolgens zullen we op basis van $ZFC$ bewijzen dat alle W-groepen van kardinaliteit $\aleph_0$, oftewel aftelbare W-groepen, vrij zijn. Dan zullen we, nog steeds binnen $ZFC$, een voldoende en noodzakelijk criterium opstellen voor een groep die aan een bepaalde voorwaarde voldoet om vrij te zijn. Dan voegen we $MA + (2^{\aleph_0} > \aleph_1)$ toe en bewijzen dat er een W-groep is van kardinaliteit $\aleph_1$ die wel aan de voorwaarde maar niet aan het criterium voldoet, en dus niet vrij is. Tenslotte zullen we $V = L$ toevoegen en bewijzen dat alle W-groepen van kardinaliteit $\aleph_1$ zowel aan de voorwaarde als het criterium voldoen, en dus vrij zijn.

# 2 Binnen ZFC

## 2.1 Eigenschappen van vrije groepen

De eerste twee proposities zullen vaak gebruikt worden, meestal zal echter niet expliciet naar ze verwezen worden. Het is cruciaal om op te merken dat we ook hier 'vrije groep' schrijven terwijl we het eigenlijk over 'vrije abelse groep' hebben.

**Propositie 2.1.** *Een ondergroep van een vrije groep is vrij.*

De bovenstaande propositie wordt bewezen op pagina 41 van [6] voor eindig voortgebrachte vrije abelse groepen, en op pagina 880-881 van [6] voor oneindig voortgebrachte vrije abelse groepen. De onderstaande propositie is een gevolg van de hoofdstelling van eindig voortgebrachte abelse groepen.

**Propositie 2.2.** *Een eindig voortgebrachte torsie-vrije groep is vrij.*

**Propositie 2.3.** *Een groep $A$ is vrij d.e.s.d.a. elk surjectief homomorfisme $\pi : B \to A$ splijt.*

*Bewijs.* Stel dat $A$ vrij is, dat $X = \{x_i \mid i \in I\}$ een basis is voor $A$, en dat $\pi : B \to A$ een surjectief homomorfisme is. We gaan bewijzen dat $\pi$ splijt. Kies $b_i \in B$ voor alle $i \in I$ zodanig dat $\pi(b_i) = x_i$. Omdat $X$ een basis is voor $A$, leidt deze keuze tot precies één homomorfisme $\rho : A \to B$ zodanig dat $\rho(x_i) = b_i$ voor alle $i \in I$. Hiermee is $\rho$ een splijtend homomorfisme voor $\pi$, en splijt $\pi$.

Stel nu dat elk surjectief homomorfisme $\pi : B \to A$ splijt. Laat $V$ een vrije groep zijn met basis $X = \{x_a \mid a \in A\}$. Laat $\pi : V \to A$ het unieke surjectieve homomorfisme zijn zodanig dat $\pi(x_a) = a$, voor alle $a \in A$. Omdat elk surjectief homomorfisme $\pi : B \to A$ volgens aanname splijt, bestaat er een splijtend homomorfisme $\rho : A \to V$ voor $\pi$. Omdat $\rho$ injectief is, is $A$ nu isomorf met een ondergroep van $V$. Propositie 2.1 geeft ons nu de conclusie dat $A$ vrij is. $\square$

Propositie 2.3 zegt dat elk surjectief homomorfisme $\pi : B \to A$ splijt voor een vrije groep $A$. In het bijzonder splijt elk surjectief homomorfisme met $\ker(\pi) \cong \mathbf{Z}$. Hiermee komen we tot de onderstaande stelling.

**Stelling 2.4.** *Elke vrije groep is een W-groep.*

De twee onderstaande proposities gaan vaak gebruikt worden bij het bewijzen van het vrij zijn van groepen.

**Propositie 2.5.** *Stel dat $B$ een ondergroep van $A$ is, zodanig dat $B$ en $A/B$ vrij zijn. Dan breidt elke basis voor $B$ uit tot een basis voor $A$, wat $A$ ook vrij maakt.*

*Bewijs.* We definiëren $\pi : A \to A/B$ door $a \mapsto a + B$. Omdat $A/B$ vrij is, en $\pi$ surjectief is, zegt propositie 2.3 ons dat er een splijtend homomorfisme $\rho$ bestaat voor $\pi$. Laat $Y$ een basis zijn voor $A/B$, dan is $\rho(Y)$ een basis voor $\rho(A/B)$, want $\rho$ is injectief en daarom een isomorfisme tussen $A/B$ en $\rho(A/B)$. Voor elke $a \in A$ bestaat er nu een unieke representatie van $a$ als som van elementen van $\rho(A/B)$ en $B$, namelijk $a = \rho\pi(a) + (a - \rho\pi(a))$, met $\rho\pi(a) \in \rho(A/B)$ en $(a - \rho\pi(a)) \in B$. Dus $A \cong \rho(A/B) \oplus B$. Laat $X$ een basis zijn voor $B$, dan is $\rho(Y) \cup X$ nu een basis voor $A$, en is $A$ vrij. □

Voor de volgende propositie, en vele stellingen die nog volgen, maken we gebruik van stijgende ketens van verzamelingen (of groepen). Een stijgende keten van verzamelingen, geïndiceerd door een ordinaalgetal $\alpha$, wordt gerepresenteerd als volgt:

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_v \subseteq \cdots, \qquad v < \alpha$$

- De keten heet **glad** als voor elk limiet-ordinaalgetal $\lambda < \alpha$ geldt $A_\lambda = \bigcup_{v<\lambda} A_v$.
- De keten heet **strikt stijgend** als voor elke $v < \alpha$ geldt $A_v \neq A_{v+1}$.
- De keten heet een **keten van groepen** als voor elke $v < \alpha$ geldt dat $A_v$ een ondergroep is van $A_{v+1}$.

**Propositie 2.6.** *Laat $A$ de vereniging zijn van een gladde keten van groepen $\{A_v \mid v < \alpha\}$, zodanig dat $A_0$ vrij is, en $A_{v+1}/A_v$ vrij is voor elke $v < \alpha$. Dan is $A$ vrij, en voor elke $v < \alpha$ is $A/A_v$ vrij.*

*Bewijs.* We gaan met transfiniete inductie naar $v < \alpha$ bewijzen dat er een gladde keten van verzamelingen

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_v \subseteq \cdots, \qquad v < \alpha$$

bestaat, zodanig dat $X_v$ een basis is voor $A_v$.

- Laat $X_0$ een basis zijn voor $A_0$.

Stel dat we al een keten $\{X_v \mid v < \mu\}$ hebben geconstrueerd voor een $\mu < \alpha$, zodanig dat $X_v$ een basis is voor $A_v$.

- Als $\mu$ een limiet-ordinaalgetal is, laat $X_\mu := \bigcup_{v<\mu} X_v$. Nu is $X_\mu$ een basis voor $A_\mu = \bigcup_{v<\mu} A_v$.
- Als $\mu$ een opvolger-ordinaalgetal is, zeg $\mu = \delta + 1$, dan is $A_\mu/A_\delta$ vrij wegens aanname en propositie 2.5 geeft ons een basis $X_\mu$ voor $A_\mu$, als een uitbreiding van $X_\delta$.

Nu is $X = \bigcup_{v<\alpha} X_v$ een basis voor $A = \bigcup_{v<\alpha} A_v$, en dus is $A$ vrij. Bovendien geldt dat $\{x + A_v \mid x \in X - X_v\}$ een basis is voor $A/A_v$, en dus is $A/A_v$ vrij voor elke $v < \alpha$. □

## 2.2 Aftelbare W-groepen zijn vrij

In deze sectie zal bewezen worden dat aftelbare W-groepen vrij zijn. Na voorbereidend werk zal Pontryagin's criterium worden bewezen, dit geeft een voldoende voorwaarde voor het vrij zijn van een aftelbare torsie-vrije groep. Vervolgens zal een lemma worden bewezen, dit lemma zal daarna in het hoofdbewijs van deze sectie worden ingezet. De onderstaande drie eigenschappen van W-groepen zullen hier niet bewezen worden omdat hun bewijzen van homologische aard zijn, de bewijzen zijn te vinden in sectie 3 van [5].

**Propositie 2.7.** *Als $A$ een W-groep is, en $B \leq A$, dan is $B$ een W-groep.*

**Propositie 2.8.** *W-groepen zijn torsie-vrij.*

**Propositie 2.9.** *Laat $B_0$ en $B_1$ W-groepen zijn zodanig dat $B_0$ een ondergroep van $B_1$ is en het quotiënt $B_1/B_0$ geen W-groep is. Dan bestaat er een homomorfisme $\psi : B_0 \to \boldsymbol{Z}$ dat niet uitbreidt tot een homomorfisme $\phi : B_1 \to \boldsymbol{Z}$.*

Hieronder worden zogeheten pure ondergroepen geïntroduceerd.

**Definitie 2.10.** Een ondergroep $B$ van een groep $A$ heet **puur** in $A$ als voor elke $b \in B$ en $n \in \mathbb{N}_{>0}$ het volgende geldt: als er een $a \in A$ is met $b = na$, dan is er ook een $b' \in B$ zodanig dat $b = nb'$. We zeggen ook wel dat $B$ een pure ondergroep van $A$ is.

Aangezien we alleen naar pure ondergroepen van torsie-vrije groepen $A$ gaan kijken werken we verder met de onderstaande propositie.

**Propositie 2.11.** *Een ondergroep $B$ van een torsie-vrije groep $A$ is een pure ondergroep van $A$ als $A/B$ torsie-vrij is.*

*Bewijs.* Voor een torsie-vrije groep $A$ geldt dat als $b = na$ voor $b \in B$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $a \in A$, en $b = nb'$ met $b' \in B$, dat dan $a = b'$. Daarom is $B$ puur in $A$ als voor elke $b \in B$ geldt dat $\{a \in A \mid na = b\}$ bevat is in $B$, maar dit zijn precies de elementen die tot torsie elementen kunnen leiden binnen $A/B$, en als $A/B$ torsie-vrij is moeten ze wel bevat zijn in $B$. □

**Definitie 2.12.** Als $B$ een ondergroep is van een torsie-vrije groep $A$, dan heet de ondergroep $B' = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}_{>0}$ zodanig dat $na \in B\}$ de **pure afsluiting** van $B$ in $A$.

In de bovenstaande definitie is $B'$ de kleinste pure ondergroep van $A$ waarin $B$ bevat is, want $B'$ bevat alle elementen van $A$ die tot torsie elementen leiden in $A/B$. Het onderstaande lemma zal pas in een later hoofdstuk gebruikt worden.

**Lemma 2.13.** *Laat $A$ een vrije groep zijn, dan is elke eindig voortgebrachte ondergroep $B$ van $A$ bevat in een eindig voortgebrachte pure ondergroep $B'$ van $A$.*

*Bewijs.* Laat $A$ vrij zijn met basis $X$. Laat $B$ eindig voortgebracht worden door $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Voor elke $b_i$ geldt $b_i = \sum_{x \in F_i} n_{i,x} \cdot x$, met $n_{i,x} \in \mathbb{N}_{>0}$ en $F_i$ een eindige deelverzameling van $X$. We nemen $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, en laten $B' := \langle F \rangle$. Dan is $B'$ eindig voortgebracht, en omdat $A/B' = \langle X \backslash F \rangle$ vrij is, is $B'$ bovendien puur in $A$. □

Pontryagin's criterium zegt dat het omgekeerde van het bovenstaande lemma waar is voor aftelbare torsie-vrije groepen. Met $\omega_1$ zal het eerste overaftelbare ordinaalgetal bedoeld worden.

**Pontryagin's criterium 2.14.** *Laat $A$ een aftelbare torsie-vrije groep zijn zodanig dat elke eindig voortgebrachte ondergroep van $A$ bevat is in een eindig voortgebrachte pure ondergroep van $A$. Dan is $A$ vrij.*

*Bewijs.* $A$ is aftelbaar, dus we kunnen de elementen van $A$ als volgt aftellen: $A = \{a_n \mid n < \omega\}$. We gaan nu door middel van inductie naar $n < \omega$ een gladde keten

$$\{B_n \mid n < \omega\}$$

van eindig voortgebrachte pure ondergroepen van $A$ definiëren. Laat $B_0 := 0$. Als $B_n$ gedefinieerd is, laat $B_{n+1}$ een eindig voortgebrachte pure ondergroep van $A$ zijn die $B_n \cup \{a_n\}$ bevat. De groep $B_{n+1}$ bestaat vanwege de aanname van het criterium. Nu geldt dat $\bigcup_{n<\omega} B_n = A$. Voor alle $n < \omega$ geldt, omdat $B_n$ puur is in $A$, dat $A/B_n$ torsie-vrij is, waaruit volgt dat de ondergroep $B_{n+1}/B_n$ torsie-vrij is. Bovendien geldt, omdat $B_{n+1}$ eindig voortgebracht is, dat $B_{n+1}/B_n$ een eindig voortgebrachte torsie-vrije groep is, en uit Propositie 2.2 volgt nu dat $B_{n+1}/B_n$ vrij is. Het toepassen van propositie 2.6 hierop geeft de conclusie dat $A$ vrij is. □

Het voorbeeld van de groep $\mathbb{Q}$ laat zien dat de conditie over pure ondergroepen noodzakelijk is voor Pontryagin's criterium. De groep $\mathbb{Q}$ is namelijk aftelbaar en torsie-vrij, maar niet vrij omdat de ondergroep $\mathbf{Z}$ niet bevat is in een eindig voortgebrachte pure ondergroep van $\mathbb{Q}$. Vanaf nu nemen we de conventie aan dat wanneer $C$ een verzameling, of groep, is van de vorm $B \times \mathbb{Z}$, dat $\pi$ op $C$ de projectie op de eerste factor is. Dit is de functie: $\pi : C \to B, (b, n) \mapsto b$.

**Definitie 2.15.** Voor een groep $B$ is een **(B,$\mathbb{Z}$)-groep** een groep $C$ met als onderliggende verzameling $B \times \mathbb{Z}$, zodanig dat $\pi : C \to B$ een homomorfisme is, en $(0,n) + (0,m) = (0, n+m)$.

Het simpelste voorbeeld van een $(B,\mathbb{Z})$-groep $C$ is de directe som van abelse groepen $C = B \oplus \mathbf{Z}$, hiervan zullen we vaak gebruik maken. Een reden waarom we de $(B,\mathbb{Z})$-groep $C$ hebben gedefinieerd, is dat $\ker(\pi) \cong \mathbf{Z}$, wat betekent dat als $\pi : C \to B$ niet splijt, dat dan $B$ geen W-groep is. Het bestuderen van de $(B,\mathbb{Z})$-groep $C$ is daarom een makkelijke manier om vast te stellen of $B$ geen W-groep is.

**Lemma 2.16.** *Laat $B_0$ en $B_1$ W-groepen zijn zodanig dat $B_0$ een ondergroep van $B_1$ is en het quotiënt $B_1/B_0$ geen W-groep is. Laat $C_0$ een $(B_0,\mathbb{Z})$-groep zijn, en $\rho_0$ een splijtend homomorfisme voor $\pi_0 : C_0 \to B_0$. Dan bestaat er een $(B_1,\mathbb{Z})$-groep $C_1$ , met $C_1 \geq C_0$, zodanig dat $\rho_0$ niet uitbreidt tot een splijtend homomorfisme $\rho_1$ voor $\pi_1 : C_1 \to B_1$.*

*Bewijs.* Aangezien $\rho_0$ een splijtend homomorfisme is, kunnen we een isomorfisme $\epsilon : B_0 \oplus \mathbf{Z} \to C_0$ definiëren door $\epsilon(b,n) = \rho_0(b) + (0,n)$. Voor alle $b \in B_0$ geldt dan $\epsilon(b,0) = \rho_0(b)$. Vanwege dit isomorfisme kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $C_0 = B_0 \oplus \mathbf{Z}$, en dat voor alle $b \in B_0$ geldt $\rho_0(b) = (b,0)$. Laat $\psi : B_0 \to \mathbf{Z}$ het homomorfisme zijn gegeven door propositie 2.9, en laat $C_1' := B_1 \oplus \mathbf{Z}$. Definieer het homomorfisme $\gamma : C_0 \to C_1'$ door $(b,n) \mapsto (b, n + \psi(b))$, en definieer de bijectieve functie op verzamelingen $f : C_1' \to B_1 \times \mathbb{Z}$ door

$$f(b,n) = \begin{cases} (b,n) & \text{als } b \notin B_0 \\ (b, n - \psi(b)) & \text{als } b \in B_0. \end{cases}$$

Nu is $f \circ \gamma : C_0 \to B_1 \times \mathbb{Z}$ de inclusiefunctie. Laat $C_1$ de $(B_1,\mathbb{Z})$-groep zijn met de groepsstructuur die $f$ tot een isomorfisme tussen $C_1'$ en $C_1$ maakt. Definieer hiertoe voor $a, b \in B_1 \times \mathbb{Z}$ hun som als volgt: $a + b := f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b))$. Nu geldt dat $C_1 \geq C_0$. Stel dat er een splijtend homomorfisme $\rho_1$ voor $\pi_1$ bestaat, met $\rho_1$ een uitbreiding van $\rho_0$. Dan geldt $\rho_1|B_0 = \rho_0 = f \circ \gamma \circ \rho_0$. Ook geldt, omdat $C_1$ en $C_1'$ isomorf zijn via $f$, dat $\rho_1 = f \circ \rho_1'$, met $\rho_1'$ een splijtend homomorfisme van $B_1$ naar $C_1'$. Nu geldt $\rho_1|B_0 = f \circ \rho_1'|B_0 = f \circ \gamma \circ \rho_0$. Dus $\rho_1'|B_0 = \gamma \circ \rho_0$. Het onderstaande diagram laat de relaties tussen de homomorfismes zien.

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \arrow[dl, "\rho_1"] \arrow[d, "\rho_1'"] & B_0 \arrow[d, "\rho_0"] \\
C_1 & C_1' \arrow[l, "f"] & C_0 \arrow[l, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

Stel nu dat er een splijtend homomorfisme $\rho_1' : B_1 \to C_1'$ voor $\pi_1' : C_1' \to B_1$ bestaat, zodanig dat $\rho_1'|B_0 = \gamma \circ \rho_0$. Laat $\phi := \tilde{\pi} \circ \rho_1' : B_1 \to \mathbf{Z}$, met $\tilde{\pi}$ de projectie op de tweede factor. Voor alle $b \in B_0$ geldt nu $\phi(b) = \tilde{\pi}\rho_1'(b) = \tilde{\pi}\gamma\rho_0(b) = \tilde{\pi}\gamma(b,0) = \tilde{\pi}(b,\psi(b)) = \psi(b)$. Dit betekent dat $\phi$ een uitbreiding is van $\psi$, wat in tegenspraak is met propositie 2.9.

Dus, $\rho_1'$ kan niet bestaan. Hieruit concluderen we dat $\rho_1$ niet kan bestaan, wat het lemma bewijst. $\square$

**Stelling 2.17.** *Aftelbare W-groepen zijn vrij.*

*Bewijs.* We gaan de stelling bewijzen door te bewijzen dat elke aftelbare W-groep $A$ voldoet aan de voorwaarden van Pontryagin's criterium, waaruit volgt dat $A$ vrij is. Omdat $A$ aftelbaar is, en omdat propositie 2.8 ons zegt dat $A$ torsie-vrij is, is het enige wat nog bewezen moet worden dat elke eindig voortgebrachte ondergroep van $A$ is bevat in een eindig voortgebrachte pure ondergroep van $A$.

Stel dat dit niet zo is, en er een eindig voortgebrachte ondergroep $B_0$ van $A$ bestaat die niet is bevat in een eindig voortgebrachte pure ondergroep van $A$. Laat $B$ de pure afsluiting zijn van $B_0$ in $A$. Vanwege de aanname is $B$, als kleinste pure ondergroep waarin $B_0$ bevat is, niet eindig voortgebracht. Door aan $B_{n+1}$ een voortbrengend element van $B$ toe te voegen die niet bevat is in $B_n$, kunnen we $B$ opvatten als de vereniging van een strikt stijgende keten van eindig voortgebrachte groepen

$$B_0 \subsetneq B_1 \subsetneq \cdots \subsetneq B_n \subsetneq \cdots, \qquad n < \omega.$$

Door inductie naar $n < \omega$ gaan we een strikt stijgende keten

$$C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq \cdots \subsetneq C_n \subsetneq \cdots, \qquad n < \omega$$

construeren zodanig dat $C_n$ een torsie-vrije $(B_n, \mathbb{Z})$-groep is. Dan zal $C := \bigcup_{n<\omega} C_n$ een torsie-vrije $(B, \mathbb{Z})$-groep zijn. We gaan de $C_n$'s zodanig definiëren dat $\pi : C \to B$ niet splijt, dit levert een tegenspraak op met propositie 2.7, en de stelling is daarmee bewezen. Laat $X$ een eindige basis voor $B_0$ zijn, deze bestaat omdat alle $B_n$ eindig voortgebracht zijn, en torsie-vrij zijn als ondergroep van de torsie-vrije groep $A$. Laat $\{g_n \mid n < \omega\}$ een enumeratie zijn van alle functies $g_n : X \to X \times \mathbb{Z}$ zodanig dat $\pi \circ g_n = 1_X$. De enumeratie is van aftelbare lengte, want $\mathbb{Z}$ is aftelbaar en $X$ slechts eindig. Omdat onze $C$ torsie-vrij zal zijn, wordt elk homomorfisme $\rho : B \to C$ volledig bepaald door zijn waardes op $X$. Om dit te zien nemen we een willekeurige $b \in B$. Omdat $B$ de pure afsluiting is van $B_0$, is er een $n \neq 0$ zodanig dat $nb \in B_0$. Dan is $\rho(nb)$ bepaald door de waardes van $\rho$ op $X$, en omdat $C$ torsie-vrij zal zijn, is $\rho(b) = x$ de enige oplossing van $\rho(nb) = nx$ in $C$. Dus, als er een splijtend homomorfisme $\rho : B \to C$ voor $\pi : C \to B$ zou bestaan, dan geldt dat $\rho | X = g_n$ voor een $n < \omega$, en $\rho$ zal volledig bepaald worden door $g_n$. We gaan ervoor zorgen dat een dergelijke $\rho$ niet kan bestaan door de $C_n$'s zodanig te definiëren dat elke $g_n$ die onderliggend zou kunnen zijn aan $\rho$, hiervan wordt weerhouden. De reden dat deze bewijstechniek werkt is dat er net zo veel $C_n$'s als $g_n$'s zijn, namelijk een aftelbaar aantal. Laten we nu deze $C_n$'s definiëren.

- $C_0 := B_0 \oplus \mathbf{Z}$.

Als $C_n$ reeds gedefinieerd is, zijn de volgende twee gevallen te onderscheiden.

- Als $g_n$ uitbreidt tot een splijtend homomorfisme $\rho_n$ voor $\pi_n : C_n \to B_n$, laat $C_{n+1}$ een uitbreiding zijn van $C_n$ zodanig dat $\rho_n$ niet uitbreidt tot een splijtend homomorfisme $\rho_{n+1}$ voor $\pi_{n+1} : C_{n+1} \to B_{n+1}$. De groep $C_{n+1}$ bestaat vanwege lemma 2.16, want $B_n \leq B_{n+1}$, met $B_n$ en $B_{n+1}$ W-groepen, en $B_{n+1}/B_n$ is geen W-groep omdat het een torsie groep is. Dit laatste komt omdat $B_{n+1}/B_n$ een ondergroep is van $B/B_0$, die een torsie groep is vanwege de definitie van pure afsluiting.
- Als $g_n$ niet uitbreidt tot een splijtend homomorfisme voor $\pi_n : C_n \to B_n$, dan is $g_n$ reeds uitgesloten om onderliggend te zijn aan $\rho : B \to C$. In dit (minder belangrijke) geval, laat $\rho_n$ een willekeurig splijtend homomorfisme zijn voor $\pi : C_n \to B_n$, en definieer $C_{n+1}$ als in het eerste geval. $B_n$ is eindig voortgebracht, torsie-vrij, en daarom vrij, en dus zegt propositie 2.3 ons dat er ten minste één zo'n $\rho_n$ bestaat.

Stel dat er een splijtend homomorfisme $\rho : B \to C$ bestaat voor $\pi : C \to B$. Dan geldt dat $\rho|X = g_n$ voor een $n < \omega$. Dan is $\rho|B_n$ een splijtend homomorfisme voor $\pi_n : C_n \to B_n$, die een uitbreiding is van $g_n$. Bovendien breidt $\rho|B_n$ uit tot een een splijtend homomorfisme $\rho|B_{n+1}$ voor $\pi_{n+1} : C_{n+1} \to B_{n+1}$. Echter, omdat $g_n$ uitbreidt tot een splijtend homomorfisme $\rho|B_n$, waren we in het eerste geval bij het definiëren van $C_{n+1}$, en we definieerden deze precies zo dat deze niet toe zou laten dat $\rho|B_n$ uitbreidt tot een splijtend homomorfisme voor $\pi_{n+1} : C_{n+1} \to B_{n+1}$. Vanwege deze tegenspraak kan $\rho$ niet bestaan, en dit bewijst de stelling. □

## 2.3 Chase's voorwaarde

Pontryagin's criterium geeft een voldoende voorwaarde voor een aftelbare torsie-vrije groep om vrij te zijn. Alle aftelbare W-groepen voldoen aan deze voorwaarde. Nu gaan we een generalisatie van dit criterium bestuderen. Deze heet Chase's voorwaarde, en deze verschilt op drie manieren van Pontryagin's criterium. Ten eerste is Chase's voorwaarde niet beperkt tot aftelbare groepen, we zullen hier alleen groepen van kardinaliteit $\aleph_1$ bekijken. Ten tweede geldt dat groepen die aan de voorwaarde voldoen alleen vrij zijn als aan een extra criterium voldaan wordt, dit zal in de laatste propositie van deze sectie uiteengezet worden. Ten derde, waar Pontryagin het heeft over 'torsie-vrij', 'eindig voortgebrachte ondergroepen', en 'puur', heeft Chase's voorwaarde het over '$\aleph_1$-vrij', 'aftelbare ondergroepen', en '$\aleph_1$-puur'. Hieronder volgen hun definities.

**Definitie 2.18.** Een groep heet **$\aleph_1$-vrij** als elke ondergroep van kardinaliteit kleiner dan $\aleph_1$ (oftewel, elke aftelbare ondergroep) vrij is.

Omdat elke aftelbare ondergroep van een W-groep een W-groep is, en daarmee vrij vanwege stelling 2.17, geldt het onderstaande gevolg.

**Gevolg 2.19.** *Elke W-groep is $\aleph_1$-vrij.*

**Definitie 2.20.** Als $A$ een $\aleph_1$-vrije groep is, dan heet een ondergroep $B$ van $A$ een **$\aleph_1$-pure** ondergroep als $A/B$ $\aleph_1$-vrij is.

$\aleph_1$-vrij is een natuurlijke generalisatie van torsie-vrij. Het torsie-vrij zijn van een groep is namelijk equivalent met de eigenschap dat elke eindig voortgebrachte ondergroep vrij is, het $\aleph_1$-vrij zijn van een groep is de eigenschap dat elke aftelbare ondergroep vrij is. Het $\aleph_1$-vrij zijn van een groep impliceert dus torsie-vrij zijn. Net zo is $\aleph_1$-puur een natuurlijke generalisatie van puur.

**Chase's voorwaarde 2.21.** *$A$ is een $\aleph_1$-vrije groep zodanig dat elke aftelbare ondergroep van $A$ bevat is in een aftelbare $\aleph_1$-pure ondergroep van $A$.*

Er volgt nu een lemma waarin het voldoen aan Chase's voorwaarde van een groep $A$ van kardinaliteit $\aleph_1$, oftewel het 'Chase zijn van $A$', wordt gerelateerd aan eigenschappen van een stijgende keten van ondergroepen wiens vereniging gelijk is aan $A$, net zoals in het bewijs van Pontryagin's criterium werd gedaan. Het wezenlijke verschil ertussen is dat hier de keten niet aftelbaar maar overaftelbaar lang is. De gevolgen hiervan, en de reden dat in Chase's voorwaarde over $\aleph_1$-vrij en $\aleph_1$-puur wordt gesproken worden onder dit lemma verklaard.

**Lemma 2.22.** *Laat $A$ een groep van kardinaliteit $\aleph_1$ zijn. Dan is $A$ Chase d.e.s.d.a. $A$ de vereniging is van een gladde keten van aftelbare vrije groepen*

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_v \subseteq \cdots, \qquad v < \omega_1$$

*zodanig dat $A_0 = 0$ en dat $A_{v+1}$ $\aleph_1$-puur is in $A$ voor alle $v < \omega_1$.*

*Bewijs.* Stel dat $A$ Chase is. $A$ heeft kardinaliteit $\aleph_1$, dus het is mogelijk de elementen van $A$ als volgt in een rij $A = \{a_v \mid v < \omega_1\}$ van lengte $\omega_1$ te plaatsen. We gaan nu de $A_v$'s definiëren met transfiniete inductie naar $v < \omega_1$.

- $A_0 := 0$.

Stel dat $A_\mu$ reeds is gedefinieerd voor alle $\mu < v$, we onderscheiden nu twee gevallen:

- Als $v$ een limiet-ordinaalgetal is, laat $A_v := \bigcup_{\mu<v} A_\mu$. $A_v$ is dan aftelbaar want een aftelbare vereniging van aftelbare groepen is aftelbaar.
- Als $v$ een opvolger-ordinaalgetal is, zeg $v = \delta + 1$, laat $A_v$ een aftelbare $\aleph_1$-pure ondergroep van $A$ zijn die $A_\delta \cup \{a_\delta\}$ bevat.

Alle $A_v$'s zijn aftelbaar en daarmee vrij, want $A$ is $\aleph_1$-vrij volgens Chase's voorwaarde. Bovendien is de keten van $A_v$'s glad, is $A_{v+1}$ $\aleph_1$-puur in $A$ voor alle $v < \omega_1$, en geldt er dat $A = \bigcup_{v<\omega_1} A_v$.

Stel nu dat $A$ een vereniging is van de keten zoals beschreven in het lemma. Elke aftelbare ondergroep $B$ van $A$ is dan bevat binnen een aftelbare $\aleph_1$-pure $A_{v+1}$ in de keten voor een $v < \omega_1$. Bovendien geldt voor $B$ dat deze vrij is als ondergroep van de vrije groep $A_{v+1}$, dit maakt $A$ $\aleph_1$-vrij, en daarmee is $A$ Chase. $\square$

De overaftelbare lengte van de keten in het bovenstaande lemma maakt het mogelijk dat er $A_\lambda$'s, met $\lambda$ een limiet-ordinaal, in de keten zitten, waarvoor geldt dat deze niet $\aleph_1$-puur zijn in $A$. Voor deze $\lambda$'s hoeft $A_{\lambda+1}/A_\lambda$ niet vrij te zijn, wat ervoor zorgt dat propositie 2.6 niet gelijk kan worden toegepast zoals in het bewijs van Pontryagin's criterium. De reden dat er bij Chase's voorwaarde over '$\aleph_1$-vrij' en '$\aleph_1$-puur' wordt gesproken, en niet over 'torsie-vrij' en 'puur', is dat wanneer $A_{v+1}/A_v$ torsie-vrij is, dit niet per se betekent dat het ook vrij is, want $A_{v+1}$ hoeft niet eindig voortgebracht te zijn. Wanneer $A_v$ $\aleph_1$-puur is, is $A_{v+1}/A_v$ $\aleph_1$-vrij, en daarmee is deze wel zeker vrij, zodat we (wanneer mogelijk) propositie 2.6 kunnen toepassen om te bewijzen dat $A$ vrij is. In de onderstaande propositie kan aan de hand van deze keten een criterium worden geformuleerd waaraan groepen die Chase zijn aan moeten voldoen om vrij te zijn, ze zijn niet vrij als ze niet aan dit criterium voldoen. Voordat we bij de propositie aankomen verrichten we eerst wat voorbereidend werk.

**Definitie 2.23.** Een functie $f : \omega_1 \to \omega_1$ heet **normaal** als deze zowel strikt stijgend is, oftewel $\delta < \mu \Rightarrow f(\delta) < f(\mu)$, als continu is, oftewel voor elke limiet-ordinaalgetal $\lambda$ geldt $f(\lambda) = \sup\{f(\mu) \mid \mu < \lambda\}$.

Een normale functie $f : \omega_1 \to \omega_1$ is injectief, heeft daarom een overaftelbaar beeld, en dus is het beeld van $f$ onbegrensd in $\omega_1$.

**Definitie 2.24.** Een deelverzameling $S$ van $\omega_1$ heet **stationair** als het beeld van elke normale functie op $\omega_1$ een niet-lege doorsnede heeft met $S$.

De enige twee stationaire deelverzamelingen waar we mee gaan werken zijn $S = \omega_1$ en $S = \{\lambda < \omega_1 \mid \lambda \text{ is een limiet-ordinaalgetal}\}$.

Voor de onderstaande propositie maken we gebruik van de equivalentie van lemma 2.22 en de bovenstaande definities. Wanneer een groep van kardinaliteit $\aleph_1$ Chase is, dan kan door middel van de propositie bepaald worden of deze vrij is of niet.

**Propositie 2.25.** *Zij $A$ een groep van kardinaliteit $\aleph_1$ die Chase is, en zij $\{A_v \mid v < \omega_1\}$ een keten zoals in lemma 2.22. Zij $E$ de verzameling limiet-ordinaalgetallen $\lambda < \omega_1$ waarvoor $A_\lambda$ niet $\aleph_1$-puur is in $A$, dan is $A$ vrij d.e.s.d.a. $E$ geen stationaire deelverzameling is van $\omega_1$.*

*Bewijs.* In dit bewijs maken we ervan gebruik dat als $A$ de vereniging is van een keten zoals beschreven in lemma 2.22, waarin $A_v$'s kunnen zitten die niet $\aleph_1$-puur zijn in $A$, dat er dan zowel in het geval dat $A$ vrij is, als in het geval dat $E$ geen stationaire deelverzameling is van $\omega_1$, er een normale functie $f$ bestaat zodanig dat alle $A_{f(v)}$ zeker $\aleph_1$-puur zijn in $A$.

Stel eerst dat $A$ vrij is. Laat $X$ een basis zijn voor $A$. We gaan een normale functie $f : \omega_1 \to \omega_1$ en gladde keten $\{X_v \mid v < \omega_1\}$ van deelverzamelingen van $X$ construeren zodanig dat $X_v$ een basis is voor $A_{f(v)}$ voor alle $v < \omega_1$. Voor alle $v < \omega_1$ geldt dan dat $A/A_{f(v)}$ isomorf is met $\langle X - X_v \rangle$, waardoor $A/A_{f(v)}$ vrij is, en in het bijzonder $\aleph_1$-vrij, wat betekent dat $A_{f(v)}$ $\aleph_1$-puur is in $A$. Het bestaan van $f$ impliceert dus dat $E$ geen stationaire verzameling is. We gaan nu $X_v$ en $f(v)$ definiëren met transfiniete inductie naar $v < \omega_1$.

- Laat $X_0 := \emptyset$ en $f(0) := 0$.

Stel dat $X_\mu$ en $f(\mu)$ reeds zijn gedefinieerd voor alle $\mu < v$.

- Als $v$ een limiet-ordinaalgetal is, laat $X_v := \bigcup_{\mu < v} X_\mu$ en $f(v) := \sup\{f(\mu) | \mu < v\}$. Dan geldt $A_{f(v)} = \bigcup_{\mu < v} A_{f(\mu)}$, en dus is $X_v$ een basis voor $A_{f(v)}$.
- Als $v$ een opvolger-ordinaalgetal is, zeg $v = \delta + 1$, dan doen we het volgende. Laat $Y_0$ een aftelbare deelverzameling van $X$ zijn die $X_\delta$ strikt bevat. Laat $\sigma_0$ een ordinaalgetal zijn zodanig dat $Y_0 \subseteq A_{\sigma_0}$, en laat $Y_1$ een aftelbare deelverzameling van $X$ zijn zodanig dat $A_{\sigma_0} \subseteq \langle Y_1 \rangle$. Met inductie naar $n < \omega$ verkrijgen we een keten van aftelbare deelverzamelingen van $X$

  $$X_\delta \subsetneq Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \cdots \subseteq Y_n \subseteq \cdots, \qquad n < \omega$$

  en een rij ordinaalgetallen

  $$f(\delta) < \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_n \leq \cdots, \qquad n < \omega$$

  zodanig dat voor elke $n < \omega$ geldt dat $Y_n \subseteq A_{\sigma_n} \subseteq \langle Y_{n+1} \rangle$.

Laat $X_v = \bigcup_{n<\omega} Y_n$ en $f(v) = \sup\{\sigma_n \mid n < \omega\}$, dan is $X_v$ aftelbaar als aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen, en $X_v$ is een basis voor $A_{f(v)}$.

Stel nu dat $E$ geen stationaire deelverzameling is van $\omega_1$. We gaan bewijzen dat $A$ kan worden opgevat als een vereniging van een gladde keten die voldoet aan de voorwaarden van propositie 2.6. Laat $f : \omega_1 \to \omega_1$ een normale functie zijn waarvan het beeld een lege doorsnede heeft met $E$. Vanwege het normaal zijn van $f$, zijn er nu wellicht opeenvolgende $A_{f(v)}$'s met indices die elkaar niet direct opvolgen. Om hieruit weer een stijgende keten te verkrijgen definiëren we $A'_v := A_{f(v)}$ voor alle $v < \omega_1$. Omdat het beeld van $f$ lege doorsnede heeft met $E$, geldt dat $A'_v$ $\aleph_1$-puur is in $A$ voor alle $v < \omega_1$. Daarom is $A'_{v+1}/A'_v$ vrij voor alle $v < \omega_1$, aangezien $A'_{v+1}$ aftelbaar is. Omdat $f$ continu is worden limiet-ordinaalgetallen naar limiet-ordinaalgetallen gestuurd, dan geldt voor elk limiet-ordinaalgetal $\lambda < \omega_1$ dat $A_{f(\lambda)} = \bigcup_{f(v)<f(\lambda)} A_{f(v)} = \bigcup_{v<\lambda} A'_v = A'_\lambda$, dus $\{A'_v \mid v < \omega_1\}$ is een gladde keten. Omdat $f$ onbegrensd is, geldt bovendien $A = \bigcup_{v<\omega_1} A'_v$, en het toepassen van propositie 2.6 geeft ons het vrij zijn van $A$. $\square$

**Stelling 2.26.** *Er bestaat een groep $A$ van kardinaliteit $\aleph_1$ die voldoet aan Chase's voorwaarde, maar niet vrij is.*

*Bewijs.* We gaan met transfiniete inductie naar $v < \omega_1$ een gladde keten $\{A_v \mid v < \omega_1\}$ van aftelbare groepen construeren die de volgende drie eigenschappen heeft:
(1) Voor elke $v < \omega_1$ geldt dat $A_v$ vrij is.
(2) Voor elke $\mu < v < \omega_1$ geldt dat $A_v/A_{\mu+1}$ vrij is.
(3) Voor elk limiet-ordinaalgetal $\lambda < \omega_1$ geldt dat $A_{\lambda+1}/A_\lambda$ niet vrij is.

We laten $A$ de vereniging zijn van de keten, dan heeft $A$ kardinaliteit $\aleph_1$. Er geldt dan voor alle $\delta < \omega_1$ dat $A_{\delta+1}$ $\aleph_1$-puur is in $A$ want elke aftelbare ondergroep van $A/A_{\delta+1}$ is bevat in een vanwege (2) vrije $A_v/A_{\delta+1}$ voor een $v < \omega_1$. $A$ zal dan Chase zijn, vanwege lemma 2.22, (1) en (2). Uit (3) volgt dat $E$, de verzameling limiet-ordinaalgetallen $\lambda$ waarvoor geldt dat $A_\lambda$ niet $\aleph_1$-puur is in $A$, alle limiet-ordinaalgetallen bevat, en daarmee is $E$ stationair. Propositie 2.25 geeft ons nu het niet vrij zijn van $A$. We gaan nu de $A_v$'s definiëren.

- Laat $A_0 := 0$.

Stel dat voor een $v < \omega_1$ reeds een gladde keten $\{A_\mu \mid \mu < v\}$ is geconstrueerd die de drie eigenschappen respecteert. We onderscheiden nu drie gevallen voor het definiëren van $A_v$.

- Stel dat $v = \delta + 1$, met $\delta$ geen limiet-ordinaalgetal. Laat $A_v := A_\delta \oplus \mathbf{Z}$. Voor alle $\mu < \delta$ geldt $A_v/A_\delta \cong (A_v/A_{\mu+1})/(A_\delta/A_{\mu+1})$. Aangezien $A_v/A_\delta$ en $A_\delta/A_{\mu+1}$ vrij zijn geeft propositie 2.5 ons nu eigenschap (2). Ook (1) en (3) gelden.

- Stel dat $v$ een limiet-ordinaalgetal is. Laat $A_v := \bigcup_{\mu<v} A_\mu$. We kiezen een strikt stijgende rij opvolger-ordinaalgetallen $\{\sigma_n \mid n < \omega\}$ met als limiet $v$. Er geldt $A_v = \bigcup_{n<\omega} A_{\sigma_n}$. Uit (2) volgt dat $A_{\sigma_{n+1}}/A_{\sigma_n}$ vrij is voor elke $n < \omega$. Uit propositie 2.6 volgt nu dat $A_v$ vrij is, en dat $A_v/A_{\sigma_n}$ vrij is voor elke $n < \omega$. Voor $\mu < v$, is $A_{\mu+1}$ bevat in $A_{\sigma_n}$ voor een zekere $\sigma_n$. Dan geldt $A_v/A_{\sigma_n} \cong (A_v/A_{\mu+1})/(A_{\sigma_n}/A_{\mu+1})$, en uit propositie 2.5 volgt (2). Ook (1) en (3) gelden.

- Stel dat $v = \lambda + 1$, met $\lambda$ een limiet-ordinaalgetal. We moeten er nu voor zorgen dat $A_v/A_\lambda$ niet vrij gaat zijn. Laat $\{\sigma_n \mid n < \omega\}$ zoals bij het tweede geval, maar nu met $\sigma_0 = 0$. Uit het bewijs van propositie 2.6 volgt dat er een gladde keten van verzamelingen $\{X_n \mid n < \omega\}$ bestaat zodanig dat $X_n$ een basis is voor $A_{\sigma_n}$. Voor iedere $n > 0$ kiezen we $x_n \in X_n - X_{n-1}$. Laat $Y_n = X_n \backslash (X_{n-1} \cup \{x_n\})$ voor alle $n > 0$. Laat $B$ de ondergroep van $A_\lambda$ zijn voortgebracht door $\bigcup_n Y_n$. Laat $Q := \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$, en $P := \prod_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$. Merk op dat $A_\lambda \cong B \oplus Q \subsetneq B \oplus P$. Laat $z_m, 1 \leq m < \omega$ het element zijn van $P$ gerepresenteerd door de formele som $z_m = \sum_{n \geq m} (n!/m!) x_n$. We definiëren $A_{\lambda+1}$ als de ondergroep van $B \oplus P$ voortgebracht door $A_\lambda$ en $\{z_m \mid 1 \leq m < \omega\}$. Nu geldt (1) want $\bigcup_n Y_n \cup \{z_m \mid 1 \leq m < \omega\}$ is een basis voor $A_{\lambda+1}$, het brengt bijvoorbeeld voor alle $n < \omega$ het element $x_n = z_n - (n+1)z_{n+1} \in A_{\lambda+1}$ voort. Voor elke $k < \omega$ is $A_{\lambda+1}/A_{\sigma_k}$ isomorf met de ondergroep van $A_{\lambda+1}$ voortgebracht door $\bigcup_{n>k}(Y_n - Y_k) \cup \{z_m \mid k+1 \leq m < \omega\}$. Daarom is $A_{\lambda+1}/A_{\sigma_k}$ vrij, en net zoals bij het tweede geval volgt door het toepassen van propositie 2.5 dat (2) geldt. Voor elke $m > 0$ geldt $z_1 \equiv m!z_m \mod A_y$, dus in $A_{\lambda+1}/A_\lambda$ geldt $(z_1+A_\lambda)/m = (m-1)z_m+A_\lambda$. Voor alle $m > 0$ bestaat er dus een $x$ zodanig dat $mx = z_1 + A_\lambda$. Daarom is $z_1 + A_\lambda$ een niet nul element van $A_{\lambda+1}/A_\lambda$ dat deelbaar is door $m$ voor elke $m > 0$, dit impliceert dat $A_{\lambda+1}/A_\lambda$ niet vrij is, en dat eigenschap (3) geldt.

□

# 3 Martin's axioma

We hebben binnen $ZFC$ bewezen dat er een groep van kardinaliteit $\aleph_1$ bestaat die wel Chase is, maar niet vrij. Als we Martin's axioma en de negatie van de continuümhypothese toevoegen aan $ZFC$, zal elke groep van kardinaliteit $\aleph_1$ die Chase is, waaronder de niet vrije groep, een W-groep zijn. Dit bewijst stelling 1.6.(ii). Hieronder wordt een speciaal geval van $MA$ weergegeven, dit zal aan de basis staan van het bewijs dat elke groep van kardinaliteit $\aleph_1$ die Chase is een W-groep is.

**Speciaal geval MA 3.1.** *Neem aan $MA$. Laat $A$ en $B$ verzamelingen zijn van kardinaliteit kleiner dan $2^{\aleph_0}$, en laat $P$ een niet lege verzameling functies zijn met de volgende drie eigenschappen:*
*(a) Voor elke $f \in P$ geldt dat $f$ een functie is van een deelverzameling van $A$ naar $B$.*
*(b) Voor elke $a \in A$ en elke $f \in P$, bestaat er een $g \in P$ zodanig dat $f \subseteq g$ en $a$ is bevat in het domein van $g$.*
*(c) Voor elke overaftelbare deelverzameling $P'$ van $P$, bestaan er $f_1, f_2 \in P'$ en $f_3 \in P$ zodanig dat $f_1 \neq f_2$ en $f_3$ breidt zowel $f_1$ als $f_2$ uit.*
*Dan bestaat er een functie $g : A \to B$ zodanig dat voor elke eindige deelverzameling $F$ van $A$ er een $f \in P$ bestaat met $F$ bevat in het domein van $f$ en $g|F = f|F$.*

Om in te zien waarom eigenschap (c) noodzakelijk is, bekijken we het volgende voorbeeld dat wel aan eigenschappen (a) en (b) voldoet, maar niet aan eigenschap (c). Voor het voorbeeld en de onderstaande stelling voegen we de negatie van de continuümhypothese toe om ervoor te zorgen dat groepen van kardinaliteit $\aleph_1$ voldoen aan de voorwaarde van het speciale geval van $MA$. Laat $P = \{f \mid f \text{ is een eindige injectieve functie, } \mathrm{dom}(f) \subseteq \omega_1, \mathrm{ran}(f) \subseteq \omega\}$. Definieer voor $\alpha < \omega_1$, $f_\alpha := \{\langle \alpha, 0 \rangle\}$, en laat $P' = \{f_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$. Voor elke $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2} \in P'$ met $f_{\alpha_1} \neq f_{\alpha_2}$ geldt nu dat een functie die beide uitbreidt niet injectief is, en daarom kan deze niet in $P$ zitten. Het voorbeeld voldoet dus niet aan eigenschap (c). Stel dat er een functie $g$ bestaat zoals beschreven, dan zou deze injectief moeten zijn. Neem immers $F = \{\alpha, \beta\}$ met $\alpha \neq \beta$, dan volgt, aangezien $g|F = f|F$ voor $f \in P$, dat $g(\alpha) \neq g(\beta)$. Er bestaat echter geen injectieve functie van een overaftelbare verzameling naar een aftelbare verzameling, wat bewijst dat $g$ niet kan bestaan, en dit bewijst dat eigenschap (c) noodzakelijk is.

**Stelling 3.2.** *Neem aan $MA + (2^{\aleph_0} > \aleph_1)$. Groepen van kardinaliteit $\aleph_1$ die Chase zijn, zijn W-groepen.*

*Bewijs.* Laat $A$ een groep van kardinaliteit $\aleph_1$ zijn die Chase is, en laat $\pi : B \to A$ een surjectief homomorfisme met $\ker(\pi) \cong \mathbf{Z}$ zijn. We gaan bewijzen dat $\pi$ splijt door stelling 3.1 toe te passen op de verzameling $P$ van alle homomorfismes $\phi : S \to B$ waarvoor geldt dat:

$$\pi \circ \phi = 1_s \text{ en } S \text{ is een eindig voortgebrachte pure ondergroep van } A.$$

Het homomorfisme van het eenheidselement van $A$ naar het eenheidselement van $B$ zit in $P$, dus $P$ is niet leeg. We moeten nu bewijzen dat $P$ voldoet aan de drie eigenschappen (a), (b), en (c). Volgens het speciale geval van $MA$ bestaat er dan een functie $g : A \to B$ die overeenkomt met een element van $P$ op elke eindige deelverzameling van $A$. Hieruit volgt dat $g$ een homomorfisme is, en dat $\pi \circ g = 1_A$, en dus splijt $\pi$ met $g$ als splijtend homomorfisme. Het is duidelijk dat eigenschap (a) geldt, in de onderstaande twee lemma's zal bewezen worden dat ook eigenschappen (b) en (c) gelden. □

**Lemma 3.3.** *Stel dat $V$ een eindige deelverzameling is van $A$ , en $\phi \in P$. Dan bestaat er een $\phi' \in P$ zodanig dat $\phi \subseteq \phi'$ en $V$ is bevat in het domein van $\phi'$.*

*Bewijs.* Laat $S$ het domein van $\phi$ zijn. Laat $X$ een basis zijn voor $S$, deze bestaat omdat $S$ eindig voortgebracht en torsie-vrij is. Omdat $A$ $\aleph_1$-vrij is, volgt uit lemma 2.13 dat er een eindig voortgebrachte pure ondergroep $S'$ van $A$ bestaat die $V \cup S$ bevat. Omdat $S$ puur is in $A$, is $S'/S$ torsie-vrij. Bovendien is het eindig voortgebracht, en dus vrij. Propositie 2.5 zegt ons nu dat $X$ uit is te breiden tot een basis $X \cup Y$ voor $S'$. Voor $x \in X$ definiëren we $\phi'(x) := \phi(x)$, en voor $y \in Y$ definiëren we $\phi'(y) := b_y$ waar $b_y$ een element van $B$ is zodanig dat $\pi(b_y) = y$. Dit breidt uit tot een uniek homomorfisme $\phi' : S' \to B$ met de gevraagde eigenschappen, wat het lemma bewijst. □

In het onderstaande bewijs maken we zes keer gebruik van de techniek om een overaftelbare verzameling uit de dunnen zodanig dat de overgebleven verzameling betere eigenschappen heeft om mee te werken, en deze verzameling nog steeds overaftelbaar is. In het bewijs starten we met een overaftelbare verzameling $P_0$, die we uitdunnen via $P_1$ en $P_2$ tot $P_3$. Dan zullen de $\phi_v$'s uit $P_3$ vervangen worden door andere $\phi_v$'s uit $P$ die in $P_4$ worden gezet, bij deze stap wordt niet uitgedund. Daarna wordt verder uitgedund via $P_5$ en $P_6$ naar $P_7$.

**Lemma 3.4.** *Stel dat $P_0$ een overaftelbare deelverzameling van $P$ is. Dan bestaan er $f_1, f_2 \in P_0$ en $f_3 \in P$ zodanig dat $f_1 \neq f_2$, en $f_3$ breidt zowel $f_1$ als $f_2$ uit.*

*Bewijs.* We plaatsen de elementen van $P_0$ als volgt in een reeks: $P_0 = \{\phi_v \mid v < \omega_1\}$, met $\phi_v : S_v \to B$. Aangezien alle $S_v$'s eindig voortgebracht en torsie-vrij zijn, zijn ze vrij en hebben ze een basis. Als we ze onderverdelen naar kardinaliteit van hun basis, kan het niet zo zijn dat er voor elk kardinaalgetal maar aftelbaar veel $v$'s zijn waarvoor $S_v$ de gegeven kardinaliteit heeft, want een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen is aftelbaar, en er zijn overaftelbaar veel $S_v$'s. Kies een natuurlijk getal $m$ waarvoor er overaftelbaar veel $v$'s zijn waarvoor $S_v$ een basis van kardinaliteit $m$ heeft, en plaats de bijbehorende $\phi_v$'s in een uitgedunde deelverzameling $P_1$ van $P_0$. We gaan nu een overaftelbare deelverzameling

$P_3$ van $P_1$ vinden zodanig dat er een vrije ondergroep $A'$ van $A$ bestaat die puur is in $A$ en waarvoor $\mathrm{dom}(\phi_v) \subseteq A'$ voor elke $\phi_v \in P_3$.

Laat $T$ een pure ondergroep van $A$ zijn die bevat is in $S_v$ voor overaftelbaar veel $v$'s en zo dat er geen strikt grotere pure ondergroep van $A$ in $S_v$ bevat is voor overaftelbaar veel $v$'s ($T$ kan de triviale groep zijn). We nemen nu alleen de $S_v$'s waarin $T$ bevat is, en plaatsen de bijbehorende $\phi_v$'s in een uitgedunde $P_2$. Laat $X$ een basis zijn voor $T$, deze bestaat omdat $T$ eindig voortgebracht en torsie-vrij is. Omdat $T$ puur is in $A$, is $S_v/T$ vrij voor alle $v$, en propositie 2.5 geeft ons nu een basis $X \cup Y_v$ voor $S_v$. We gaan nu een gladde keten $\{A_v \mid v < \omega_1\}$ construeren, waarvan we $A'$ de vereniging laten zijn. We doen dit zodanig dat voor alle $v < \omega_1$, $A_v$ een pure ondergroep van $A$ is, en $A_{v+1}/A_v$ vrij is. Dan zal $A'$ puur zijn in $A$ als vereniging van pure ondergroepen van $A$, en $A'$ zal vrij zijn vanwege propositie 2.6.

Laat $A_0 := T$. Stel dat we reeds een keten $\{A_\mu \mid \mu < v\}$ en een strikt stijgende reeks ordinaalgetallen $\{\sigma_{\mu+1} \mid \mu + 1 < v\}$ hebben gedefinieerd. Als $v$ een limiet-ordinaalgetal is, laat $A_v := \bigcup_{\mu<v} A_v$. Als $v$ een opvolger-ordinaalgetal is, zeg $v = \delta + 1$, laat $C_\delta$ een aftelbare $\aleph_1$-pure ondergroep van $A$ zijn die $A_\delta$ bevat. De ondergroep $C_\delta$ bestaat omdat $A$ Chase is. Er bestaat nu een $\sigma_v > \sigma_{\mu+1}$ voor alle $\mu < \delta$ zodanig dat $\langle Y_{\sigma_v} \rangle \cap C_\delta = 0$. Als dit niet zo zou zijn, dan zou, omdat $C_\delta$ aftelbaar is, een $c \in C_\delta$ bevat moeten zijn in $\langle Y_\nu \rangle$ voor overaftelbaar veel $\nu < \omega_1$, want een aftelbare vereniging (het aantal elementen in $C_\delta$) van aftelbare verzamelingen (de verzameling $\langle Y_\nu \rangle$'s die een bepaald element van $C_\delta$ bevatten) zou slechts aftelbaar zijn, en er zijn overaftelbaar veel $\langle Y_\nu \rangle$'s. Voor deze $c$ geldt dan dat $T$ een strikte ondergroep is van de pure afsluiting van $T + \langle c \rangle$, wat in tegenspraak is met hoe we $T$ gekozen hebben. Hierdoor kan de $c$ niet bestaan, en bestaat de $\sigma_v$ zodanig dat $\langle Y_{\sigma_v} \rangle \cap C_\delta = 0$ wel. Laat $A_v$ de pure afsluiting zijn van $A_\delta + \langle Y_{\sigma_v} \rangle$. Aangezien $\langle Y_{\sigma_v} \rangle \cap C_\delta = 0$, volgt dat $A_v \cap C_\delta = A_\delta$. Daarom is $A_v/A_\delta$ isomorf met een aftelbare ondergroep van $A/C_\delta$, en is dan vrij omdat $C_\delta$ $\aleph_1$-puur is in $A$. Laat $A'$ de vereniging zijn van $\{A_v \mid v < \omega_1\}$. We laten $P_3 = \{\phi_{\sigma_{\mu+1}} \mid \mu < \omega_1\}$.

We hebben nu een overaftelbare deelverzameling $P_3$ van $P_0$ gevonden zodanig dat er een vrije ondergroep $A'$ van $A$ bestaat die puur is in $A$ en waarvoor $\mathrm{dom}(\phi_v) \subseteq A'$ voor elke $\phi_v \in P_3$. Hiermee kunnen we de conclusie van het lemma bewijzen. Kies hiertoe een basis $X = \{x_v \mid v < \omega_1\}$ voor $A'$. Voor elke $\phi_v \in P_3$ geldt dat $S_v$ is voortgebracht door een eindig aantal elementen van $A'$, zeg $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Elke $a_i$ is op zijn beurt een lineaire combinatie van een eindige deelverzameling van $X$. We passen nu lemma 3.3 toe op elke $\phi_v \in P_3$ door voor $V_v$ de elementen van $X$ te nemen die onderliggend zijn aan alle $a_i$. Voor de verkregen $\phi'_v$'s nemen we voor de bijbehorende $S_v$'s hun ondergroepen voortgebracht door $V_v$, deze worden voortgebracht door een eindige deelverzameling van $X$. We plaatsen de bijbehorende $\phi_v$'s in $P_4$.

Aangezien $P_4$ uit nieuwe $\phi_v$'s uit $P$ bestaat, moeten we opnieuw een $n$ kiezen zodanig dat er overaftelbaar veel $\phi_v \in P_4$ zijn waarvoor de basis van de bijbehorende $S_v$ kardinaliteit $n$ heeft. We plaatsen deze $\phi_v$'s in $P_5$. Laat $Y_v \subset X$ een basis zijn voor $S_v$. Aangezien elke $Y_v$ kardinaliteit $n$ heeft, bestaat er een maximale deelverzameling $T'$ van $X$ waarvoor geldt dat $T'$ bevat is in $Y_v$ voor overaftelbaar veel $v$'s ($T'$ kan $\emptyset$ zijn). We plaatsen hun bijbehorende $\phi_v$'s in $P_6$. Aangezien de kern van $\pi$ aftelbaar is, zijn er maar een aftelbaar aantal functies op $T'$ die elementen van $P_6$ zijn. Het moet daarom wel zo zijn dat er voor minstens één zo'n functie overaftelbaar veel uitbreidingen naar $\phi_v$'s zijn, hiervoor geldt dat twee verschillende $\phi_v$'s overeenkomen op $T'$. We plaatsen deze $\phi_v$'s in $P_7$, en hernummeren ze zodanig dat $T' \subseteq Y_0$. Voor elke $y \in Y_0 - T$ zijn er vanwege de maximaliteit van $T'$ slechts aftelbaar veel $v$ zodanig dat $y \in Y_v$. Aangezien er overaftelbaar $v$'s zijn, bestaat er een $v \neq 0$ zodanig dat $Y_0 \cap Y_v = T'$. Omdat $\phi_0$ en $\phi_v$ overeenkomen op $T'$ bestaat er een extensie $\psi : \langle Y_0 \cap Y_v \rangle \to B$. Omdat $\langle Y_0 \cap Y_v \rangle$ voortgebracht wordt door een deelverzameling van een basis voor $A'$, geldt dat $\langle Y_0 \cap Y_v \rangle$ puur is in $A'$. Als $A/B$ en $B$ torsie-vrije groepen zijn, dan is $A$ ook torsie vrij, en daarom volgt uit $(A/\langle Y_0 \cup Y_v \rangle)/(A'/\langle Y_o \cup Y_v \rangle) \cong A/A'$ dat $\langle Y_0 \cap Y_v \rangle$ puur is in $A$. Dan voldoet $\psi$ aan de voorwaarden om een element van $P$ te zijn, wat het lemma bewijst. $\square$

# 4 Diamond principe

Het construeerbare universum, oftewel $L$, is een klasse van verzamelingen. De klasse wordt net als het von Neumann universum, oftewel $V$, opgebouwd aan de hand van een stijgende reeks van alle ordinaalgetallen. De 'lengte' van de opbouw is daarom even lang als bij $V$, maar door beperkingen bij het definiëren van verzamelingen is de opbouw in de 'breedte' beperkter. Het axioma $V = L$ stelt dat de universa toch gelijk zijn, aangezien $L$ minder breed is dan $V$ betekent dit dat veel elementen van $L$ later (hoger) in het constructieproces worden gedefinieerd dan bij $V$. Het diamond principe in zijn gegeneraliseerde vorm, gesymboliseerd door $\diamondsuit_S$, werd geïntroduceerd door R.B. Jensen in [7]. Het diamond principe geldt in $L$, en is daarom een gevolg van $V = L$. Ook het keuzeaxioma en de continuümhypothese gelden in $L$ en worden geïmpliceerd door $V = L$. Aan de hand van $\diamondsuit_S$ gaan we bewijzen dat alle W-groepen van kardinaliteit $\aleph_1$ vrij zijn, wat stelling 1.6.(i) bewijst. In dit hoofdstuk werken we altijd binnen $ZFC + (V = L)$.

**Diamond principe 4.1.** *Voor een gegeven kardinaalgetal $\kappa$ en een stationaire deelverzameling $S \subseteq \kappa$ zegt $\diamondsuit_S$ dat er een reeks $\{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$ bestaat zodanig dat $A_\alpha \subseteq \alpha$ voor alle $\alpha \in S$, en voor elke $A \subseteq \kappa$ is $\{\alpha \in S \mid A \cap \alpha = A_\alpha\}$ stationair in $\kappa$.*

In het onderstaande gevolg wordt $\diamondsuit_S$ omgeschreven in termen waar we verder mee kunnen werken.

**Gevolg 4.2.** *Laat $C$ een verzameling zijn die de vereniging is van een strikt stijgende gladde keten $\{C_v \mid v < \omega_1\}$ van aftelbare verzamelingen, en laat $E$ een stationaire deelverzameling van $\omega_1$ zijn. Dan bestaat er een reeks $\{S_v \mid v \in E\}$ zodanig dat $S_v \subseteq C_v$ voor alle $v \in E$ en voor alle deelverzamelingen $Y$ van $C$ is $\{v \in E \mid Y \cap C_v = S_v\}$ stationair in $\omega_1$.*

*Bewijs.* Voor $\kappa$ nemen we $\omega_1$. Aangezien $C = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$ bestaat er een bijectie $f : \omega_1 \to C$. Voor $\alpha < \omega_1$ geldt dat $f[\alpha]$ een aftelbare deelverzameling van $C$ is. Voor elk element in $f[\alpha]$ nemen we een $C_\gamma$ die dit element bevat, en we laten $C_{\beta_0}$ de vereniging zijn van deze $C_\gamma$'s. Om ervoor te zorgen dat $f[\alpha]$ een strikte deelverzameling is, laten we $C_{\beta_1} := C_{\beta_0+1}$. Dit laat zien dat er een $\beta_1 < \omega_1$ bestaat zodanig dat $f[\alpha] \subset C_{\beta_1}$. Door $\{\alpha \in \omega_1 \mid f(\alpha) \in C_{\beta_1}\}$ te bekijken kunnen we net zo een $\alpha_1 < \omega_1$ vinden zodanig dat $C_{\beta_1} \subseteq f[\alpha_1]$. Door dit proces verder door te voeren verkrijgen we een reeks ordinaalgetallen $\alpha < \beta_1 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \beta_n \leq \alpha_n \leq \cdots, n < \omega$, zodanig dat $C_{\beta_n} \subseteq f[\alpha_n] \subseteq C_{\beta_{n+1}}$. Laat $\beta := \sup\{\alpha_n \mid n < \omega\} = \sup\{\beta_n \mid n < \omega\}$, dan geldt $f[\beta] = C_\beta$. Dit laat zien dat voor elke $\alpha < \omega_1$ een $\beta < \omega_1$ bestaat zodanig dat $\beta > \alpha$ en $f[\beta] = C_\beta$. De verzameling $D = \{\alpha < \omega_1 \mid f[\alpha] = C_\alpha\}$ is daarom onbegrensd. Bovendien is $D$ gesloten, neem namelijk een stijgende rij $\{\delta_i \mid \delta_i \in D, i < \omega\}$, en laat $\delta$ hier het supremum van zijn. Dan geldt $C_\delta = \bigcup_{i<\omega} C_{\delta_i} = \bigcup_{i<\omega} f[\delta_i] = f[\delta]$, en uit $C_\delta = f[\delta]$ volgt dat $\delta \in D$.

Laat $E$ een stationaire deelverzameling van $\omega_1$ zijn, en laat $S := E \cap D$. Dan is $S$ stationair.

Om dit in te zien bewijzen we eerst dat als $D$ en $C$ gesloten en onbegrensde deelverzamelingen van $\omega_1$ zijn, dat dan $D \cap C$ ook gesloten en onbegrensd is. Neem namelijk een $\alpha < \omega_1$, en een $\delta_0 \in D$ met $\alpha < \delta_0$,. Neem nu een $\gamma_0 \in C$ met $\delta_0 < \gamma_0$, en neem dan een $\delta_1 \in D$ met $\delta_1 > \gamma_0$. We voeren dit door, en laten $\beta := \sup\{\delta_n \mid n < \omega\} = \sup\{\gamma_n \mid n < \omega\}$. Dan geldt $\beta \in D \cap C$ vanwege het gesloten zijn van $D$ en $C$, en dus is $D \cap C$ onbegrensd. Ook het gesloten zijn van $D \cap C$ volgt hieruit. Een equivalente definitie van stationair zijn houdt in dat $S$ stationair is als $S$ een niet-lege doorsnede heeft met elke gesloten en onbegrensde deelverzameling van $\omega_1$. Laat $C$ een willekeurige gesloten en onbegrensde deelverzameling zijn van $\omega_1$, dan is $D \cap C$ ook gesloten en onbegrensd, en dus is $E \cap (D \cap C)$ niet leeg, want $E$ is stationair. Dit betekent dat $(E \cap D) \cap C$ niet leeg is, en dit is precies $S \cap C$, wat bewijst dat $S$ stationair is.

Nu zegt $\diamondsuit_S$ dat er een reeks $\{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$ bestaat met de erbij genoemde eigenschappen. Voor $\alpha \in S$ definiëren we $S_\alpha := f[A_\alpha]$, en voor $\alpha \in E \backslash S$ definiëren we $S_\alpha := \emptyset$. We hebben nu een reeks $\{S_v \mid v \in E\}$ gedefinieerd zodanig dat $S_v \subseteq C_v$ voor alle $v \in E$. Voor alle deelverzamelingen $Y$ van $C$ geldt nu vanwege de conclusie van $\diamondsuit_S$ dat $\{\alpha \in S \mid \{\gamma \mid f(\gamma) \in Y\} \cap \alpha = A_\alpha\}$ stationair is in $\omega_1$, en daarmee is vanwege de bijectie $f$, en omdat $f[\alpha] = C_\alpha$ voor $\alpha \in S$, ook $\{v \in E \mid Y \cap C_v = S_v\}$ stationair in $\omega_1$. □

Uit het bovenstaande gevolg volgt nu het onderstaande.

**Gevolg 4.3.** *Laat $B$ een verzameling zijn die de vereniging is van een strikt stijgende gladde keten $\{B_v \mid v < \omega_1\}$ van aftelbare verzamelingen, en laat $Y$ een aftelbare verzameling zijn. Laat $E$ een stationaire deelverzameling van $\omega_1$ zijn. Dan bestaat er een reeks van functies $\{g_v : B_v \to B_v \times Y\}$ zodanig dat voor elke functie $h : B \to B \times Y$ waarvoor geldt $h(B_v) \subseteq B_v \times Y$ voor alle $v$, er een $v \in E$ bestaat zodanig dat $h$ beperkt tot $B_v$ gelijk is aan $g_v$.*

*Bewijs.* We gaan dit bewijzen vanuit gevolg 4.2. Laat hiervoor $C_v = B_v \times (B_v \times Y)$, dan geldt $C = B \times (B \times Y)$. Laat $\{S_v \mid v \in E\}$ de reeks zijn die gegeven wordt in gevolg 4.2. Hiervoor geldt dat $S_v$ een deelverzameling is van $B_v \times (B_v \times Y)$, dan kan $S_v$ wel of geen functie zijn van $B_v$ naar $B_v \times Y$. Als $S_v$ een functie is, laat $g_v := S_v$. In het minder belangrijke geval dat $S_v$ geen functie is, laten we $g_v$ een willekeurige functie zijn van $B_v$ naar $B_v \times Y$. We hebben nu een reeks functies $\{g_v : B_v \to B_v \times Y\}$ gedefinieerd. Laat $h : B \to B \times Y$ een functie zijn zodanig dat voor alle $v$ geldt $h(B_v) \subseteq B_v \times Y$. We kunnen $h$ opvatten als deelverzameling van $B \times (B \times Y)$. Gevolg 4.2 zegt ons nu dat er een $v$ bestaat zodanig dat $h \cap C_v = S_v$. Aangezien voor alle $v$ geldt dat $h(B_v) \subseteq B_v \times Y$, is $S_v$ een functie, en dus geldt $h \cap C_v = g_v$. □

In het onderstaande bewijs gaan we dezelfde techniek toepassen als bij stelling 2.17, waarin we bewezen dat alle aftelbare W-groepen vrij zijn. We bewezen toen dat een bepaalde groep geen W-groep is door alle potentiële splijtende homomorfismes ongedaan te maken. Dit bewijs werkte omdat we genoeg $C_n$'s tot onze beschikking hadden om deze zodanig te definiëren dat alle $g_n$'s die onderliggend waren aan de potentiële splijtende homomorfismes werden uitgesloten. Waar we in dat bewijs een aftelbaar aantal $C_n$'s hadden, zullen we nu $\aleph_1$ aantal $C_v$'s hebben om hetzelfde te doen. Het aantal potentiële splijtende homomorfismes is in dit geval echter nog groter dan het aantal $C_v$'s dat we tot onze beschikking hebben, namelijk $2^{\aleph_1}$. Dit is waarom $\diamondsuit_S$ noodzakelijk is voor het onderstaande bewijs. Deze zal ons namelijk een reeks functies verschaffen op aftelbare $B_v$'s die onderliggend zijn aan alle potentiële splijtende homomorfismes, en deze reeks zal net zoveel elementen bevatten als het aantal $C_v$'s dat we tot onze beschikking hebben.

**Propositie 4.4.** *Laat $B$ de vereniging zijn van een strikt stijgende gladde keten $\{B_v \mid v < \omega_1\}$ van aftelbare vrije groepen zodanig dat $E' = \{v < \omega_1 \mid B_{v+1}/B_v$ is niet vrij$\}$ stationair is in $\omega_1$. Dan is $B$ geen W-groep.*

*Bewijs.* We definiëren met transfiniete inductie naar $v < \omega_1$ een gladde keten van groepen $\{C_v \mid v < \omega_1\}$ zodanig dat $C_v$ een $(B_v, \mathbb{Z})$-groep is, en de vereniging $C$ ervan een $(B, \mathbb{Z})$-groep is zodanig dat $\pi : C \to B$ niet splijt. Gevolg 4.3 geeft ons hiervoor een reeks functies $\{g_v : B_v \to B_v \times \mathbb{Z} \mid v \in E'\}$ zodanig dat voor elke $h : B \to B \times \mathbb{Z}$ met $\pi \circ h = 1_B$ (dit impliceert $h(B_v) \subseteq B_v \times Y$ voor alle $v$) er een $\nu \in E'$ is zodanig dat $h|B_\nu = g_\nu$. Laten we nu de $C_v$'s definiëren.

- Laat $C_0 := B_0 \times \mathbf{Z}$.

Stel dat $C_\mu$ reeds is gedefinieerd voor alle $\mu < v$. We onderscheiden nu twee gevallen.

- Als $v$ een limiet-ordinaalgetal is, laat $C_v := \bigcup_{\mu < v} C_\mu$.
- Als $v$ een opvolger-ordinaalgetal is, zeg $v = \delta + 1$, dan onderscheiden we twee gevallen. Als $\delta \in E'$, en $g_\delta$ dient als een splijtend homomorfisme $\rho_\delta : B_\delta \to C_\delta$ voor $\pi_\delta : C_\delta \to B_\delta$, laat $C_v$ een uitbreiding van $C_\delta$ zijn zodanig dat $\rho_\delta$ niet uitbreidt tot een splijtend homomorfisme voor $\pi_v : C_v \to B_v$. Net zoals bij het aftelbare bewijs bestaat $C_v$ vanwege lemma 2.16, $B_{\delta+1}/B_\delta$ is immers niet vrij vanwege onze doelbewuste keuze voor de verzameling $E'$, en is daarom geen W-groep, aangezien aftelbare W-groepen vrij zijn. In het minder belangrijke geval dat $\delta \notin E'$ of dat $g_\delta$ niet dient als een splijtend homomorfisme voor $\pi_\delta : C_\delta \to B_\delta$, laat $\rho_\delta$ een willekeurig splijtend homomorfisme voor $\pi_\delta : C_\delta \to B_\delta$ zijn, en definieer $C_v$ als in het eerste geval.

Stel dat er een splijtend homomorfisme $\rho : B \to C$ bestaat voor $\pi : C \to B$, dan bestaat er een $v \in E$ zodanig dat $\rho|B_v = \rho_v$. Deze $\rho|B_v$ breidt uit tot een splijtend homomorfisme $\rho|B_{v+1}$ voor $\pi_{v+1} : C_{v+1} \to B_{v+1}$. Bij het definiëren van $C_{v+1}$ waren we in het eerste geval, en we definieerden $C_{v+1}$ precies zo dat $\rho|B_v$ niet uit zou kunnen breiden tot een splijtend homomorfisme voor $\pi_{v+1} : C_{v+1} \to B_{v+1}$. Vanwege deze tegenspraak splijt $\pi$ niet, en is bewezen dat $B$ geen W-groep is. $\square$

**Stelling 4.5.** *Neem aan $ZFC + (V = L)$, dan zijn W-groepen van kardinaliteit $\aleph_1$ vrij.*

*Bewijs.* Laat $A$ een W-groep zijn van kardinaliteit $\aleph_1$. Eerst bewijzen we dat $A$ Chase is (analoog bewezen we eerder dat aftelbare W-groepen aan Pontryagin's criterium voldoen). Stel hiertoe dat $A$ niet Chase is. Gevolg 2.19 zegt dat $A$ $\aleph_1$-vrij is, daarom moet het niet Chase zijn van $A$ wel inhouden dat er een aftelbare ondergroep $B$ is van $A$ zodanig dat voor elke aftelbare ondergroep $B_0$ van $A$ waarin $B$ bevat is, er een aftelbare ondergroep $B_1$ van $A$ moet zijn die $B_0$ bevat zodanig dat $B_1/B_0$ niet vrij is. Voor de groep $B_1$ zal op zijn beurt een aftelbare ondergroep $B_2$ van $A$ bestaan die $B_1$ bevat zodanig dat $B_2/B_1$ niet vrij is. Door dit door te voeren vinden we een strikt stijgende gladde keten $\{B_v \mid v < \omega_1\}$ van aftelbare ondergroepen van $A$ zodanig dat voor alle $v < \omega_1$ geldt dat $B_{v+1}/B_v$ niet vrij is. We laten $B'$ de vereniging zijn van deze keten, dan is $\{v < \omega_1 \mid B_{v+1}/B_v \text{ is niet vrij}\}$ gelijk aan $\omega_1$ en daarmee stationair. Propositie 4.4 zegt ons nu dat $B'$ geen W-groep is. Ondergroepen van W-groepen zijn echter W-groepen, en uit deze tegenspraak volgt dat $A$ wel Chase is, zodat we nu kunnen bewijzen dat $A$ vrij is.

Uit lemma 2.22 volgt dat $A$ de vereniging is van een gladde keten $\{A_v \mid v < \omega_1\}$ zodanig dat $A_{v+1}$ $\aleph_1$-puur is in $A$ voor elke $v < \omega_1$. Laat $E = \{\lambda < \omega_1 \mid A_\lambda \text{ is niet } \aleph_1\text{-puur in } A\}$, en laat $E' = \{\lambda < \omega_1 \mid A_{\lambda+1}/A_\lambda \text{ is niet vrij}\}$. Het is duidelijk dat $E' \subseteq E$. We gaan bewijzen dat $E \subseteq E'$, stel hiertoe dat $\lambda \in E$ en $\lambda \notin E'$. Voor elke $v > \lambda + 1$ geldt $(A_v/A_\lambda)/(A_{\lambda+1}/A_\lambda) \cong A_v/A_{\lambda+1}$, en propositie 2.5 zegt ons nu dat $A_v/A_\lambda$ vrij is voor elke $v > \lambda$. Aangezien elke aftelbare ondergroep van $A/A_\lambda$ bevat is in $A_v/A_\lambda$ voor een $v > \lambda$, en ondergroepen van vrije groepen vrij zijn, is $A/A_\lambda$ is $\aleph_1$-vrij, wat in tegenspraak is met de aanname dat $\lambda \in E$. Dan geldt ook $E \subseteq E'$, en dus $E = E'$. Aangezien $A$ een W-groep is, volgt uit propositie 4.4 dat $E'$ geen stationaire deelverzameling van $\omega_1$ is, en daarmee is ook $E$ niet stationair. Propositie 2.25 geeft ons nu het vrij zijn van $A$. $\square$

## 5 Bibliografie

[1] K. Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis*, Annals of Mathematics Studies, no. 3, (1940).
[2] R.M. Solovay en S. Tennenbaum, *Iterated Cohen extensions and Souslin's problem*, Annals of Mathematics, Vol. 94, (1971), 201-245.
[3] S. Shelah, *Infinite abelian groups - Whitehead problem and some constructions*, Israel Journal of Mathematics, Vol. 18, (1974), 234-256.
[4] S. Shelah, *A compactness theorem for singular cardinals, free algebras, Whitehead problem and transversals*, Israel Journal of Mathematics, Vol. 21, (1975), 319-349.
[5] P.C. Eklof, *Whitehead's Problem is Undecidable*, The American Mathematical Monthly, Vol. 83, No. 10, (1976), 775-799.
[6] S. Lang, *Algebra, revised third edition*, Springer, (2002).
[7] R. B Jensen, *The fine structure of the constructible hierarchy*, Annals of Pure and Applied Logic, Vol. 4, (1972), 229-308.