R.A.C.H. Wols

Eindige topologische ruimten

Bachelorscriptie, 8 juni 2010

Scriptiebegeleider: dr. R.S. de Jong

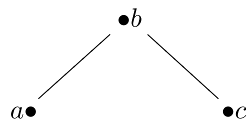
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Als X een eindige T_0-ruimte is, dan kan men X ook wel zien als partieel geordende verzameling. Wat dit precies is wordt uitgelegd in sectie 2. In dat geval kan men ook spreken van X^{op}, waar men alle relaties tussen elementen omdraait. We noemen X^{op} de tegengestelde van X. In het algemeen zijn X en X^{op} niet homeomorf.

Voorbeeld 1.1. Neem $X = \{a, b, c\}$ met basis $\{\{a\}, \{c\}, X\}$. Hieruit volgt dat $a < b$ en $c < b$. We kunnen dit als Hasse diagram tekenen, waarbij de pijlen omhoog de $\leq$ relatie aangeven.



De ordening van X^{op} wordt dus gegeven door $b < a$ en $b < c$. De topologie van X^{op} wordt dus gegeven door de basis $\{\{b, c\}, \{a, b\}, \emptyset\}$. Merk op dat

$$\begin{aligned} \{a\} &= X \setminus \{b, c\} \\ \{c\} &= X \setminus \{a, b\} \\ X &= X \setminus \emptyset \end{aligned}$$

Stel nu dat $f : X \longrightarrow X^{op}$ een homeomorfisme is met inverse g. De enige open singleton in X^{op} is $\{b\}$, dus $g(b)$ moet open zijn. De enige keuzes voor $g(b)$ zijn a of c. Stel zonder verlies van algemeenheid dat $g(b) = a$. Dan moet $g(a) = b$, want $\{a\}$ is gesloten in X^{op} en $\{b\}$ is de enige gesloten singleton in X. Maar nu is $g(c) = (c)$ niet mogelijk, want $\{c\}$ is gesloten in X^{op} en open in X. Precies dezelfde redenering krijgt men door $g(b) = c$ te kiezen.

Het is echter wel altijd zo dat de homotopiegroepen van X en X^{op} isomorf zijn. Dat wil zeggen

Stelling 1.2. *Gegeven een eindige T_0-ruimte X en zijn tegengestelde X^{op}. Dan geldt voor alle $i \in \mathbb{N}$*

$$\pi_i(X) \cong \pi_i(X^{op})$$

Merk op dat $\pi_0(X)$ eigenlijk geen groep is, maar de verzameling van samenhangscomponenten van X. Deze scriptie zal een link leggen tussen zekere compacte Hausdorffse ruimten en eindige ruimten. In het bijzonder zal een isomorfisme worden gebouwd tussen elke homotopiegroep π_i van een trianguleerbare ruimte en een eindige ruimte. Op deze manier zou er een combinatorische weg kunnen worden ingeslagen voor het berekenen van homotopiegroepen, of kan men juist de kennis van al berekende homotopiegroepen toepassen op eindige ruimten. Stelling 1.2 zal bewezen worden in sectie 7.

2 Eindige ruimten

Definitie 2.1. X heet een T_0-ruimte als voor elk tweetal punten $x, y \in X$ met $x \neq y$ er een open $U \subset X$ bestaat zodanig dat $x \in U$ en $y \notin U$ of andersom.

Als twee topologische ruimten X en Y niet homeomorf zijn, kan er altijd nog wel een zwakke homotopie-equivalentie bestaan. Veel topologische eigenschappen van de ruimten komen dan wel overeen, zoals het aantal samenhangscomponenten, de fundamentaalgroepen en alle hogere homotopiegroepen.

Definitie 2.2. Zij $f : X \longrightarrow Y$ een afbeelding tussen topologische ruimten. f heet een zwakke homotopie-equivalentie als alle geïnduceerde afbeeldingen

$$f_* : \pi_i(X, x) \longrightarrow \pi_i(Y, f(x))$$

isomorfismen zijn voor alle $i \in \mathbb{N}$.

3 Isomorfie tussen de categorie van eindige T_0-ruimten en de categorie van eindige partieel geordende verzamelingen

Er bestaat een isomorfisme van categorieën tussen eindige T_0-ruimten en eindige partieel geordende verzamelingen. We maken twee functoren $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$, welke elkaars inversen zullen blijken.

$$\left(\begin{array}{c} \text{eindige } T_0\text{-ruimten} \\ + \\ \text{continue afbeeldingen} \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{P}} \\ \\ \xleftarrow[\mathcal{Q}]{} \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} \text{eindige posets} \\ + \\ \text{ordebewarende afbeeldingen} \end{array}\right)$$

Zij X een eindige ruimte. Definieer voor $M \subset X$ de open hull van M door

$$U(M) = \bigcap \{A \subset X : \ A \text{ is open en } M \subset A\}$$

Voor $x \in X$ noteren we $U_x := U(\{x\})$. Merk op dat $U(M)$ open is, omdat er een eindig aantal doorsnedes wordt genomen van open verzamelingen. Merk verder op dat de collectie

$$\{U_x : x \in X\}$$

een basis is voor de topologie van X, en een verfijning van elke andere basis van X. De punten van X zijn de elementen van $\mathcal{P}(X)$. Definieer nu voor $x, y \in \mathcal{P}(X)$

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \in U_y$$

De vraag is of deze relatie reflexief, anti-symmetrisch en transitief is. Hiervoor werken we een paar lemma's uit.

Lemma 3.1. $x \in U_y \Longleftrightarrow U_x \subset U_y$.

Bewijs. Stel dat $x \in U_y$. Zij nu $z \in U_x$. Dan zit z in alle opens waar x ook in zit. In het bijzonder zit x ook in de open verzameling U_y, dus ook $z \in U_y$. Stel nu dat $U_x \subset U_y$. In het bijzonder zit x in zijn eigen open hull U_x, dus $x \in U_y$. $\square$

Lemma 3.2. *De gegeven relatie $\leq$ is reflexief en transitief.*

Bewijs. Zij $x, y, z \in \mathcal{P}(X)$. Er geldt $U_x \subset U_x$, dus $x \leq x$. Stel nu dat $x \leq y$ en $y \leq z$. De vraag is of $x \leq z$, oftewel of $x \in U_z$. Maar dit is duidelijk, want

$$U_x \subset U_y \subset U_z.$$

□

Lemma 3.3. *De gegeven relatie $\leq$ is anti-symmetrisch $\Longleftrightarrow$ X is T_0.*

Bewijs. Neem aan dat X een eindige T_0-ruimte is, en stel dat $x, y \in \mathcal{P}(X)$ met $x \leq y$ en $y \leq x$. We moeten aantonen dat $x = y$. Er geldt

$$\begin{aligned} x \leq y &\quad\Leftrightarrow\quad x \in U_y \Leftrightarrow U_x \subset U_y \\ y \leq x &\quad\Leftrightarrow\quad y \in U_x \Leftrightarrow U_y \subset U_x \end{aligned}$$

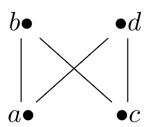
Hieruit volgt dat $U_x = U_y$. Stel dat $x \neq y$. Zonder verlies van algemeenheid is er een open $U \subset X$ zodat $x \in U$ en $y \notin U$. Maar dit is een tegenspraak, want $U_x \subset U$, dus $U_y \subset U$. Omgekeerd, stel dat de relatie anti-symmetrisch is. en stel dat iedere open $U \subset X$ die x bevat ook y bevat. Dan $y \in U_x$, dus $y \leq x$. Stel dat ook iedere open $U \subset X$ die y bevat ook x bevat. Dan $x \in U_y$ en dus $x \leq y$. Hieruit volgt $x = y$. □

Hiermee wordt $\mathcal{P}(X)$ een eindige partieel geordende verzameling. $\mathcal{P}(X)$ heeft in het algemeen niet slechts 1 keten. We spreken af dat de lege verzameling en singletons ook ketens op zich zijn.

Voorbeeld 3.4. Zij $X = \{a, b, c, d\}$ met basis $\{\{a\}, \{c\}, \{a, b, c\}, \{a, d, c\}\}$. We kunnen de open hulls simpelweg berekenen met behulp van de basis.

$$\begin{aligned} U_a &= \{a\} \\ U_b &= \{a, b, c\} \\ U_c &= \{c\} \\ U_d &= \{a, d, c\} \end{aligned}$$

Hieruit volgt $a \leq b,\ a \leq d,\ c \leq b,\ c \leq d$. De elementen b en d zijn niet te vergelijken, dus $\mathcal{P}(X)$ heeft 9 ketens.



Omgekeerd kunnen we ook met een eindige partieel geordende verzameling $(P, \leq)$ beginnen en hiervan een eindige T_0-ruimte maken met de functor $\mathcal{Q}$ als volgt. De punten van $\mathcal{Q}(P)$ zijn de elementen van P. De topologie van $\mathcal{Q}(P)$ wordt gegenereerd door

$$\{V_x : x \in P\}$$

met $V_x := \{y \in P : y \leq x\}$.

Lemma 3.5. *$\{V_x : x \in P\}$ is een basis voor een topologie op $\mathcal{Q}(P)$.*

Bewijs. Het is duidelijk dat $\bigcup_{x\in\mathcal{Q}(P)} V_x = \mathcal{Q}(P)$, want $x \leq x$ voor alle $x \in P$. Zij $V_a, V_b \in \{V_x : x \in P\}$ zodanig dat $V_a \cap V_b \neq \emptyset$, en laat $z \in V_a \cap V_b$. We moeten aantonen dat er een $V_c \in \{V_x : x \in P\}$ bestaat die bevat is in $V_a \cap V_b$ en $z \in V_c$. Neem $V_c = V_z$. Omdat z in zowel V_a als V_b zit, is V_z inderdaad bevat in $V_a \cap V_b$. $\square$

Lemma 3.6. *Als X een eindige T_0-ruimte is, dan geldt $\mathcal{Q}(\mathcal{P}(X)) = X$.*

Bewijs. We tonen aan dat $U_a = V_a$ voor alle $a \in X$. In dat geval hebben $\mathcal{Q}(\mathcal{P}(X))$ en X dezelfde basis, en dus dezelfde topologie. Zij $x \in U_a$. De vraag is of $x \in V_a = \{y \in \mathcal{P}(X) : y \leq a\} = \{y \in X : y \in U_a\}$, maar dat is duidelijk. Stel nu dat $x \in V_a$. Dan weten we dat $x \leq a$, oftewel dat $x \in U_a$. $\square$

Lemma 3.7. *Als $(P, \leq)$ een eindige partieel geordende verzameling is, dan geldt $\mathcal{P}(\mathcal{Q}(P)) = P$.*

Bewijs. We tonen aan dat $\mathcal{P}(\mathcal{Q}(P))$ en P dezelfde ordening hebben. Zij $x, y \in P$ met $x \leq y$. Als we $\mathcal{Q}$ toepassen dan $x \in U_y$. Als we hierop weer $\mathcal{P}$ toepassen dan voldoen x en y ook in de nieuwe relatie aan $x \leq y$. Omgekeerd geldt dat als $x \leq y$ in $\mathcal{P}(\mathcal{Q}(P))$ dan ook $x \leq y$ in P. $\square$

Als $x_1, x_2 \in X$, dan zal vanaf nu blindelings tussen $\mathcal{P}(X)$ en X gewisseld worden in gedachte. Zo kunnen we simpelweg spreken over $x_1 \leq x_2$, danwel over topologische eigenschappen van x_1 en x_2. De werking van de morfismen op de onderliggende verzamelingen laten we onveranderd. Om deze reden laten we het symbool van de functor weg, d.w.z. voor een $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ noteren we f voor $\mathcal{P}f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y))$ en evenzo voor de functor $\mathcal{Q}$. Hierdoor komen we tot het volgende belangrijke lemma.

Lemma 3.8. *Zij $f : X \longrightarrow Y$ een afbeelding tussen eindige T_0-ruimten. Dan*

$$f \text{ is continu} \iff f \text{ is ordebewarend.}$$

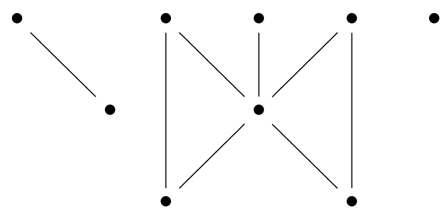
Bewijs. Neem aan dat f continu is. Zij $x_1, x_2 \in X$ met $x_1 \leq x_2$. $U_{f(x_2)}$ is open in Y en $f^{-1}\left(U_{f(x_2)}\right)$ is open in X vanwege continuïteit en omvat x_2. Dus ook geldt $U_{x_2} \subset f^{-1}\left(U_{f(x_2)}\right)$ want U_{x_2} is de kleinste open verzameling die x_2 omvat. Omdat $x_1 \leq x_2$ geldt $x_1 \in U_{x_2}$, dus $x_1 \in f^{-1}\left(U_{f(x_2)}\right)$ oftewel $f(x_1) \in U_{f(x_2)}$ wat equivalent is met $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Neem nu aan dat f ordebewarend is. Zij $A \subset Y$ open en neem $x_1, x_2 \in X$ met $x_1 \leq x_2$. Als $x_2 \in f^{-1}(A)$, dan $f(x_2) \in A$ en dus is de open hull $U_{f(x_2)}$ bevat in A, want A is open. Aangezien f ordebewarend is geldt ook $f(x_1) \in U_{f(x_2)}$, dus $f(x_1) \in A$. Dan ook $x_1 \in f^{-1}(A)$. We hebben nu gezien dat als $x_2 \in f^{-1}(A)$, dan ook $x_1 \in f^{-1}(A)$. De keuze van x_1 was arbitrair, en aangezien $x_1 \in U_{x_2}$, geldt $f^{-1}(A) = \bigcup_{y\in f^{-1}(A)} U_y$. Oftewel $f^{-1}(A)$ is een vereniging van een aantal open hulls, wat weer open is. Dus f is continu. $\square$

4 Simpliciale complexen

4.1 Definities, simpliciale afbeeldingen en operaties

Definitie 4.1. $K = (V, \mathcal{S})$ heet een simpliciaal complex als V een verzameling is en $\mathcal{S}$ een collectie deelverzamelingen van V gesloten onder het nemen van deelverzamelingen. De elementen van V noemen we hoekpunten. De elementen van $\mathcal{S}$ noemen we simplices. Als een simplex $\sigma \in \mathcal{S}$ bestaat uit $n + 1$ hoekpunt(en), dan noemen we σ ook wel een n-simplex, of een simplex van dimensie n.

We kunnen simpliciale complexen eenvoudig schematisch weergeven waarbij we punten als hoekpunten beschouwen en als er een simplex met twee hoekpunten bestaat tekenen we er een lijntje tussen. Hieronder is een voorbeeld getekend: Het is een simpliciaal complex bestaande uit negen 0-simplices, acht 1-simplices en twee 2-simplices.



Men kan spreken over de categorie van simpliciale complexen. De morfismen hierin zijn de afbeeldingen die simplices in simplices voeren. Deze afbeeldingen worden simpliciale afbeeldingen genoemd.

Definitie 4.2. Zij $K = (V, \mathcal{S})$ en $L = (W, \mathcal{T})$ twee simpliciale complexen en zij $s : V \longrightarrow W$ een afbeelding tussen de hoekpunten. s heet een simpliciale afbeelding als s voldoet aan

$$\forall \sigma \in \mathcal{S} : s(\sigma) \in \mathcal{T}$$

Als uit de context duidelijk is wat de hoekpuntsverzameling is, dan noteert men een simpliciale afbeelding ook wel als $s : K \longrightarrow L$.

Een simpliciale afbeelding voert dus simplices over in simplices. Merk op dat s in het bijzonder niet injectief of surjectief hoeft te zijn.

Voorbeeld 4.3. Neem $K = (\{0, 1\}, 2^{\{0,1\}})$ en

$$s : K \longrightarrow K, \; x \mapsto 0.$$

Dan is s niet injectief en ook niet surjectief, maar wel simpliciaal.

Als $K = (V, \mathcal{S})$ een simpliciaal complex is, en $A, B \subset K$ deelcomplexen zijn van K, dat wil zeggen $A = (U \subset V, \mathcal{R} \subset \mathcal{S})$ en $B = (W \subset V, \mathcal{T} \subset \mathcal{S})$, dan kunnen we spreken over een vereniging van complexen $A \cup B = (U \cup W, \mathcal{R} \cup \mathcal{T})$ wat goed gedefinieerd is. We kunnen ook spreken van een disjuncte vereniging.

Definitie 4.4. Als $K = (V, \mathcal{S})$ en $L = (W, \mathcal{T})$ twee simpliciale complexen zijn, dan is hun disjuncte vereniging gelijk aan

$$K \sqcup L = (V \sqcup W, \mathcal{S} \sqcup \mathcal{T})$$

Merk op dat $K \sqcup L$ ook weer een simpliciaal complex is. Het enige wat hiervoor gecontroleerd moet worden is of $\mathcal{S} \sqcup \mathcal{T}$ ook weer gesloten is onder het nemen van deelverzamelingen.

Lemma 4.5. *Zij $K = (V, \mathcal{S})$ en $L = (W, \mathcal{T})$ twee simpliciale complexen en $K \sqcup L$ hun disjuncte vereniging. Zij*

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{i_K} & K \sqcup L \\ L & \xrightarrow{i_L} & K \sqcup L \end{array}$$

de natuurlijke injectieve afbeeldingen. Stel dat er een simpliciaal complex $Z = (X, \mathcal{Y})$ is met simpliciale afbeeldingen

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & Z \\ L & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Dan is er een unieke simpliciale afbeelding $u : K \sqcup L \longrightarrow Z$ zodat f en g factoriseren via u.

Het concept van het bewijs kan gemakkelijk in een plaatje worden gezien.

$$\begin{tikzcd}
& Z & \\
& K \sqcup L \arrow[u, "u"] & \\
K \arrow[ur, "i_K"'] \arrow[uur, bend left, "f"] & & L \arrow[ul, "i_L"] \arrow[uul, bend right, "g"']
\end{tikzcd}$$

Bewijs. Zij $x \in K \sqcup L$. Dan bestaat ofwel $i_K^{-1}(x) \in K$ ofwel $i_L^{-1}(x) \in L$. Zij nu u gegeven door

$$u(x) = \begin{cases} f\left(i_K^{-1}(x)\right) & i_K^{-1}(x) \text{ bestaat,} \\ g\left(i_L^{-1}(x)\right) & i_L^{-1}(x) \text{ bestaat.} \end{cases}$$

Omdat u gegeven wordt precies door de werking van f en g is u uniek, en tevens zien we dat $f = u \circ i_K$ en $g = u \circ i_L$. $\square$

Vervolgens bestaat er ook een unitaire operatie, namelijk het nemen van de barycentrische onderverdeling. In meetkundige zin betekent dit dat men het zwaartepunt neemt van elke simplex in een polyhedron in de Euclidische ruimte, en elk zwaartepunt verbindt met elk ander hoekpunt en zwaartepunt binnen de simplex. Men begint inductief met 0-simplices (waar niks aan onder te verdelen valt), vervolgens gaat men verder met alle 1-simplices (waar men simpelweg het midden van neemt als zwaartepunt), enzovoorts. Voor een abstract simpliciaal complex $K = (V, \mathcal{S})$, neemt men als hoekpunts verzameling $\mathcal{S}$, en als simplex-verzameling neemt men de ketens van $\mathcal{S}$. Men gaat gemakkelijk na dat dit weer een simpliciaal complex is.

Definitie 4.6. De barycentrische onderverdeling van $K = (V, \mathcal{S})$, genoteerd met $\mathcal{B}(K)$, is

$$\mathcal{B}(K) := (\mathcal{S}, \text{ ketens van } \mathcal{S})$$

Het nemen van de barycentrische ondervelding is functorieel:

Lemma 4.7. *De afbeelding*

$$\mathcal{B} : (\textit{simpliciale complexen}) \longrightarrow (\textit{simpliciale complexen})$$

is een covariante functor. $\square$

Vanaf nu spreken we alleen over eindige simpliciale complexen, dat wil zeggen dat het aantal hoekpunten eindig is.

4.2 Meetkundige realisatie van een simpliciaal complex

We maken een functor

$$|\cdot| : (\text{simpliciale complexen}) \longrightarrow (\text{topologische ruimten})$$

die aan elk simpliciaal complex een topologische ruimte toekent. Als K een simpliciaal complex is, dan noemen we $|K|$ de onderliggende polyhedron van K. De benaming hiervoor zal duidelijk worden uit de opbouw van de functor. Definieer allereerst voor $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, \ x_i \geq 0 \right\}$$

Uit de definitie van Δ^n is eenvoudig in te zien dat dit een simplex is van dimensie n volgens de gewoonlijke meetkundige definitie. Verder is Δ^n gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^{n+1}$ en dus compact. Als $K = (V, \mathcal{S})$ nu een eindig simpliciaal complex is, dan heeft $\mathcal{S}$ voor elke keten van simplices een maximaal element. Stel dat $\sigma_1, \ldots \sigma_m$ de maxima zijn van de m ketens van $\mathcal{S}$. Dan is eenvoudig in te zien dat

$$K = (V, \mathcal{S}) = \left(\bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i, \bigcup_{i=1}^{m} 2^{\sigma_i} \right)$$

Het idee is om K 'in stukjes te hakken', en deze met de correcte identificaties weer aan elkaar te plakken. Kies voor elke σ_i een totale ordening. Dan is er een natuurlijke bijectie van σ_i naar de $\#\sigma_i$ eenheidsvectoren $\{e_1, e_2, \ldots, e_{\#\sigma_i - 1}, e_{\#\sigma_i}\}$. Met andere woorden, de hoekpunten van de simplex σ_i worden lineair uitgebreid naar de simplex $\Delta^{\#\sigma_i - 1}$. Als $\sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset$ voor $i \neq j$, dan moeten deze punten geïdentificeerd worden tussen $\Delta^{\#\sigma_i}$ en $\Delta^{\#\sigma_j}$. We maken een functor F van de categorie van simplices van K met de inclusies als morfismen naar de categorie van topologische ruimten als volgt. Voor een $\sigma \in \mathcal{S}$ is $F(\sigma) = \Delta^{\#\sigma - 1}$. Definieer nu

$$|K| = \left(\bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{S}} F(\sigma) \right) / \sim .$$

Als σ, τ twee simplices zijn en $x \in F(\sigma), y \in F(\tau)$, dan $x \sim y$ dan en slechts dan als hun beeld van de simplices samenvallen, d.w.z. $F(\sigma) = F(\tau)$.

5 Correspondentie tussen eindige T_0-ruimten en eindige simpliciale complexen

We maken functoren

$$\begin{pmatrix} \text{eindige } T_0\text{-ruimten} \\ + \\ \text{continue afbeeldingen} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\mathcal{K}} \\ \\ \xleftarrow[\mathcal{X}]{} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} \text{eindige simpliciale complexen} \\ + \\ \text{simpliciale afbeeldingen} \end{pmatrix}$$

Definitie 5.1 ($\mathcal{K}(X)$)**.** Zij X een eindige T_0-ruimte. Het simpliciaal complex $\mathcal{K}(X)$ wordt als volgt gedefinieerd. De hoekpunten van $\mathcal{K}(X)$ zijn de punten van X. De simplices zijn de ketens van X gezien als poset. De gebruikte notatie is

$$\mathcal{K}(X) = (X, \text{ketens in } X \text{ als poset})$$

Definitie 5.2 ($\mathcal{X}(K)$)**.** Zij $K = (V, \mathcal{S})$ een eindig simpliciaal complex. De eindige T_0-ruimte $\mathcal{X}(K)$ wordt als volgt gedefinieerd. De punten van $\mathcal{X}(K)$ zijn de simplices van K. De ordening van $\mathcal{X}(K)$ wordt gegeven door de ketens van simplices van $\mathcal{S}$ met de $\subset$-ordening. De gebruikte notatie is

$$\mathcal{X}(K) = (\mathcal{S}, \subset).$$

Merk op dat, voor $K = (V, \mathcal{S})$ een eindig simpliciaal complex, geldt

$$\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = (\mathcal{X}(K), \text{ketens van } \mathcal{X}(K)) = (\mathcal{S}, \text{ketens van } \mathcal{S}) = \mathcal{B}(K).$$

In woorden gezegd is de barycentrische onderverdeling van K gelijk aan eerst $\mathcal{X}$ toepassen en vervolgens $\mathcal{K}$ toepassen. In het bijzonder is deze correspondentie tussen categorieën dus zeker geen equivalentie.

Definitie 5.3. Als $u \in |\mathcal{K}(X)|$, dan is u bevat in een unieke open simplex $\sigma = \{x_0 < \ldots < x_r\}$. We definiëren

$$f_X : |\mathcal{K}(X)| \longrightarrow X$$

door $f_X(u) = x_0$.

We zullen zien dat deze afbeelding de sleutel is tot succes.

5.1 Zwakke homotopie-equivalentie tussen $|\mathcal{K}(X)|$ en X

Definitie 5.4. Zij X een topologische ruimte. Een collectie open deelverzamelingen $\mathcal{U}$ van X heet basisachtig als

1. $X \subset \bigcup_{A \in \mathcal{U}} A$
2. $\forall\, U, V \in \mathcal{U}\ \forall\, x \in U \cap V\ \exists\, W \in \mathcal{U} : x \in W \subset U \cap V$

Merk op dat elke basis ook basisachtig is, en elke basisachtige collectie is een basis voor een grovere (of kleinere) topologie dan de gegeven.

Voor de bewijzen in deze sectie is het handig om een extra definitie te geven van een speciaal soort deelverzameling van X.

Definitie 5.5. Zij $f : X \longrightarrow Y$ een continue afbeelding tussen topologische ruimten en $U \subset Y$ open. Dan heet U kenmerkend als de afbeelding

$$f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \longrightarrow U$$

een zwakke homotopie-equivalentie is.

Stelling 5.6. *Zij $p : E \longrightarrow B$ een continue afbeelding tussen topologische ruimten en $\mathcal{U}$ een basisachtige collectie deelverzamelingen van B. Als alle $U \in \mathcal{U}$ kenmerkend zijn, dan is p een zwakke homotopie-equivalentie.*

Bewijs. Het volledige bewijs van deze stelling is te vinden in [1] op pagina's 467-468. Het bewijs leunt zwaar op quasivezelingen. Een afbeelding p van E naar B heet een quasivezeling als de geinduceerde afbeeldingen

$$p_* : \pi_i(E, p^{-1}(x), y) \longrightarrow \pi_i(B, x)$$

isomorfismen zijn voor alle $x \in B, y \in p^{-1}(x)$ en alle $i \geq 0$. Nu is het zo dat een surjectieve afbeelding $p : E \to B$ met triviale homotope fibers een quasivezeling is dan en slechts dan als het een zwakke homotopie-equivalentie is. Het bewijs gebruikt vervolgens een lemma wat zegt dat als $p : E \to B$ een afbeelding is en $U \subset B$ kenmerkend is, dan is p een zwakke homotopie-equivalentie dan en slechts dan als de geïnduceerde afbeeldingen

$$p_* : \pi_i(E, p^{-1}(U), y) \longrightarrow \pi_i(B, U, py)$$

isomorfismen zijn voor alle $i \geq 0$ en alle $y \in p^{-1}(U)$. Het bewijs gaat dan verder met de basisachtige collectie $\mathcal{U}$ en past het lemma op elke $U \in \mathcal{U}$ toe. Omdat ook $\mathcal{U}$ heel B overdekt volgt het resultaat. $\square$

Vanaf nu is X altijd een eindige T_0-ruimte.

Stelling 5.7. *Zij $\phi : X \longrightarrow Y$ een continue afbeelding tussen eindige T_0-ruimten en f_X, f_Y de afbeeldingen van definitie* 5.3. *Dan geldt*

1. $f_X : |\mathcal{K}(X)| \longrightarrow X$ *is een zwakke homotopie-equivalentie,*
2. ϕ *induceert op natuurlijke wijze een simpliciale afbeelding* $\phi : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$ *en een continue afbeelding* $|\phi| : |\mathcal{K}(X)| \longrightarrow |\mathcal{K}(Y)|$.
3. $f_X \circ \phi = |\phi| \circ f_Y$

De laatste uitspraak zegt dat het diagram

$$\begin{tikzcd} {|\mathcal{K}(X)|} \arrow[r, "f_X"] \arrow[d, "|\phi|"] & X \arrow[d, "\phi"] \\ {|\mathcal{K}(Y)|} \arrow[r, "f_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

commuteert.

Voor het bewijs moeten we eerst wat lemma's uitwerken.

Lemma 5.8. *Als $Y \subset X$ een deelruimte van X is, dan is $\mathcal{K}(Y)$ een volledig deelcomplex van $\mathcal{K}(X)$.*

Met volledig deelcomplex $\mathcal{K}(Y) = (Y, \text{ketens van } Y) \subset \mathcal{K}(X)$ wordt bedoeld dat de simplexverzameling de grootst mogelijke deelverzameling kan zijn met respect tot zijn gegeven partiële ordening. Zo is $\mathcal{K}$ immers gedefinieerd.

Bewijs. Zij $y \in Y$. Dan is de open hull U_y in Y gelijk aan $U_y \cap Y$ in X. Dus de ordening van de poset $\mathcal{P}(Y)$ is dezelfde als van $\mathcal{P}(X)$ beperkt tot Y. Dus $\mathcal{K}(Y)$ is een simpliciaal complex, en is bevat in $\mathcal{K}(X)$. □

Lemma 5.9. *Als $Y \subset X$ open is, dan is $f_X^{-1}(Y)$ de reguliere omgeving van $\mathcal{K}(Y)$ in $\mathcal{K}(X)$.*

Bewijs. De reguliere omgeving is gedefinieerd als $\bigcup\{\text{star}(y) : y \in Y\}$. Hier is $\text{star}(y)$ de vereniging van alle open simplices die y als hoekpunt hebben. We gaan bewijzen dat

$$f_X^{-1}(Y) = \bigcup\{\text{star}(y) : y \in Y\}.$$

Zij $u \in f_X^{-1}(Y)$. Dan is u bevat in een unieke open simplex $\sigma = \{x_0 < \ldots < x_r\}$. Dus $f_X(u) = x_0$. Dus $\sigma \subset \text{star}(x_0)$. Dus $u \in \bigcup\{\text{star}(y) : y \in Y\}$, immers $x_0 \in Y$.
Stel nu dat $\sigma \subset \text{star}(y)$ met $y \in Y$. Als $\sigma = \{x_0 < \ldots < x_r\}$, dan $y = x_i$ voor een zekere $i \in \{0, 1, \ldots, r\}$. Er geldt $x_0 \leq y$, zodat x_0 in de open hull U_y zit. Y is open, dus $U_y \subset Y$. Dus $f_X(\sigma) = x_0 \in Y$. Dus $\sigma \subset f_X^{-1}(x_0) \subset f_X^{-1}(Y)$. □

Hiermee komen we tot een belangrijk resultaat.

Gevolg 5.10. *f_X is continu.*

Bewijs. De reguliere omgeving is een vereniging van opens. □

Het volgende lemma gaat over samentrekbaarheid van topologische ruimten. Een topologische ruimte heet samentrekbaar als de identeit en een constante afbeelding homotoop zijn.

Lemma 5.11. *Zij Y een topologische ruimte met een punt $\omega \in Y$ zodanig dat de enige open deelverzameling die ω bevat Y zelf is. Dan is Y samentrekbaar.*

Bewijs. We maken een homotopie $F : Y \times [0,1] \longrightarrow Y$ gegeven door

$$F(y,t) = \begin{cases} y & t \in [0,1) \\ \omega & t = 1 \end{cases}$$

en we laten zien dat F continu is. Zij $G \subset Y$ open. Dan zijn er twee gevallen.

- $\omega \in G$. Dan $G = Y$ en $F^{-1}(G) = Y \times [0,1]$. Y is open en $[0,1]$ is open, dus $Y \times [0,1]$ is open.

- $\omega \notin G$. Dan $F^{-1}(G) = G \times [0,1)$. G is open en $[0,1)$ is open, dus $G \times [0,1)$ is open.

Dus F is continu. $\square$

Lemma 5.12. *Als X een eindige T_0-ruimte is, $x \in X$, dan is de open hull U_x samentrekbaar.*

Bewijs. Neem $Y = U_x$ en $\omega = x$ in het vorige lemma. $\square$

Gevolg 5.13. *X heeft een basis van samentrekbare open verzamelingen. In het bijzonder is X lokaal samentrekbaar. Elke eindige T_0-ruimte is dus lokaal wegsamenhangend. Dus is elke eindige T_0-ruimte wegsamenhangend dan en slechts dan als deze samenhangend is.*

Voor het volgende lemma is een definitie nodig.

Definitie 5.14. Zij $K = (V, \mathcal{S})$ een simpliciaal complex, $\omega \notin V$ en $v \leq \omega$ voor alle $v \in \mathcal{X}(K)$. Dan is de (simpliciale) kegel met grondvlak K en top ω gelijk aan

$$\mathrm{cone}(K, \omega) = (V \cup \{\omega\}, \mathcal{S} \cup \{\sigma \cup \{\omega\} : \sigma \in \mathcal{S}\})$$

Het is makkelijk na te gaan dat $\mathrm{cone}(K, \omega)$ weer een simpliciaal complex is. Merk tevens op dat $|\mathrm{cone}(K, \omega)|$ homeomorf is met de kegel op $|K|$, dat wil zeggen

$$\mathrm{cone}(|K|, \omega) \cong |\mathrm{cone}(K, \omega)|$$

Lemma 5.15. *Voor alle $x \in X$ is $f_X^{-1}(U_x)$ een samentrekbare open deelverzameling van $|\mathcal{K}(X)|$.*

Bewijs. $|\mathcal{K}(U_x)|$ is een deformatieretract van $f_X^{-1}(U_x)$ vanwege lemma 5.9. Het is dus voldoende om aan te tonen dat $|\mathcal{K}(U_x)|$ samentrekbaar is. Laat hiertoe $V_x = U_x \setminus \{x\}$. Dan is het voldoende om aan te tonen dat

$$\mathcal{K}(U_x) = \mathrm{cone}(\mathcal{K}(V_x), x)$$

Immers, elke kegel is samentrekbaar tot zijn top. Zij $\sigma = \{x_0 < \ldots < x_r\}$ een simplex van $\mathcal{K}(U_x)$. Dan domineert x alle elementen van σ, oftewel $x_0 < \ldots < x_r \leq x$. Dus σ is een simplex van $\mathrm{cone}(\mathcal{K}(V_x), x)$. Zij nu $\tau = \{y_0 < \ldots < y_s\}$ een simplex van $\mathrm{cone}(\mathcal{K}(V_x), x)$. Dan wederom $y_0 < \ldots < y_s \leq x$. Dan is τ ook een element van $\mathcal{K}(U_x)$. $\square$

Bewijs van stelling 5.7. Voor de eerste uitspraak passen we stelling 5.6 toe met $p = f_X$, $E = |\mathcal{K}(X)|$ en $B = X$. Voor de basisachtige collectie nemen we de open hulls $\{U_x : x \in X\}$, en volgens de voorgaande twee lemma's is elke U_x een kenmerkende deelverzameling van X, want bij de afbeelding

$$f_X|_{f_X^{-1}(U_x)} : f_X^{-1}(U_x) \longrightarrow U_x$$

is $f_X^{-1}(U_x)$ samentrekbaar, evenals U_x. De homotopiegroepen (en π_0) van een samentrekbare ruimte zijn triviaal, dus $f_X|_{f_X^{-1}(U_x)}$ induceert natuurlijke isomorfismen tussen triviale groepen (en verzamelingen). Volgens stelling 5.6 is f_X nu

een zwakke homotopie-equivalentie.
Zij nu $\phi : X \longrightarrow Y$ een continue afbeelding tussen eindige T_0-ruimten. aangezien ϕ ordebewarend is volgens lemma 3.8, stuurt ϕ simplices van $\mathcal{K}(X)$ over in simplices van $\mathcal{K}(Y)$. Dat wil zeggen voor alle $\sigma = \{x_0 < \ldots < x_r\}$ is $\phi(\sigma) = \{\phi(x_0) \leq \ldots \leq \phi(x_r)\}$ een simplex van $\mathcal{K}(Y)$. Hiermee is $\phi : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$ een simpliciale afbeelding.
Voor de laatste uitspraak nemen we een $u \in (x_0, \ldots, x_r) \subset |\mathcal{K}(X)|$, waarbij $x_0 < \ldots < x_r$ een simplex opspannen. Nu zit $|\phi|(u)$ in de simplex $(\phi(x_0), \ldots, \phi(x_r))$, waarbij $\phi(x_0) \leq \ldots \leq \phi(x_r)$. Dan geldt $f_Y(|\phi|(u)) = \phi(x_0)$. Maar ook geldt $\phi(f_X(u)) = \phi(x_0)$. Dus $f_Y \circ |\phi| = \phi \circ f_X$. □

5.2 Zwakke homotopie-equivalentie tussen $|K|$ en $\mathcal{X}(K)$

In deze sectie gebruiken we veel resultaten uit sectie 5.1. De volgende stelling is nu vrij eenvoudig te bewijzen.

Stelling 5.16. *Zij $\phi : K \longrightarrow L$ een simpliciale afbeelding tussen eindige simpliciale complexen, $|\phi|$ de geïnduceerde afbeelding tussen $|K|$ en $|L|$, met $K = (V, \mathcal{S})$ en $L = (W, \mathcal{T})$. Dan geldt*

1. *ϕ induceert een afbeelding $\phi' : \mathcal{X}(K) \longrightarrow \mathcal{X}(L)$,*
2. *er bestaat een natuurlijke zwakke homotopie-equivalentie $f_K : |K| \longrightarrow \mathcal{X}(K)$,*
3. *$\phi' \circ f_K \sim f_L \circ |\phi|$.*

Bewijs. Definieer de afbeelding f_K als

$$f_K := f_{\mathcal{X}(K)}$$

uit definitie 5.3. Dan is volgens stelling 5.7

$$f_{\mathcal{X}(K)} : |\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))| \longrightarrow \mathcal{X}(K)$$

een zwakke homotopie-equivalentie. Maar

$$|\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))| = |\mathcal{B}(K)| = |K|.$$

Dus f_K is inderdaad een afbeelding van $|K|$ naar $\mathcal{X}(K)$. Dit bewijst de tweede uitspraak. We bewijzen nu de eerste uitspraak. Zij

$$\phi' : \mathcal{B}(K) \longrightarrow \mathcal{B}(L),\ \sigma \mapsto \phi(\sigma).$$

Dan is ϕ' simpliciaal omdat ϕ simpliciaal is, en de afbeeldingen

$$|\phi|, |\phi'| : |K| \longrightarrow |L|$$

zijn homotoop. Neem bijvoorbeeld $F : |K| \times [0,1] \to |L|$ gegeven door $F(x,t) = t|\phi'|(x) + (1-t)|\phi|(x)$. Nu stuurt ϕ' de punten van $\mathcal{X}(K)$ naar de punten van $\mathcal{X}(L)$, en ϕ' bewaart de inclusieordening, dus ϕ' is volgens lemma 3.8 continu.
Voor de derde uitspraak gebruiken we de derde uitspraak van stelling 5.7, welke zegt dat $\phi' f_K = f_L|\phi'|$, maar er is ook een homotopie $f_L|\phi'| \sim f_L|\phi|$, dus $\phi' f_K \sim f_L|\phi|$. □

Voorbeeld 5.17. Neem $X = \{a, b, c, d\}$ met basis $\{\{a\}, \{c\}, \{a, b, c\}, \{a, d, c\}\}$. Dan is

$$f_X : |\mathcal{K}(X)| \longrightarrow X$$

een zwakke homotopie-equivalentie, en omdat $|\mathcal{K}(X)| \cong S^1$, heeft S^1 dezelfde homotopiegroepen als X.

6 Minimale modellen voor ruimten

Er bestaat een algemeen geaccepteerde definitie van de suspensie van een topologische ruimte X. We introduceren hier de non-Hausdorff suspensie $\mathbb{S}$. Kies $\omega, \omega' \notin X$. Dan is de non-Hausdorff suspensie van X gelijk aan

$$\mathbb{S}(X) = X \cup \{\omega, \omega'\}$$

waarbij de opens van $\mathbb{S}(X)$ alle opens van X zijn met daaraan toegevoegd $X \cup \{\omega\}$, $X \cup \{\omega'\}$ en $\mathbb{S}(X)$. Als X eindig en T_0 is, dan is dit equivalent met $x \leq \omega, \omega'$ voor alle $x \in X$ en dat ω en ω' niet te vergelijken zijn. Merk op dat de lengte van de grootste keten in X dus wordt verhoogd. Als we $\mathbb{S}$ achter elkaar $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ maal toepassen dan noteren we dit met $\mathbb{S}^n$.

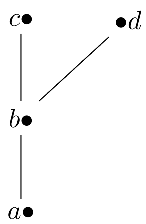
Voorbeeld 6.1. Als $S^0 = \{\pm 1\}$ de 0-dimensionale sfeer is, dan heeft $\mathbb{S}^n(S^0)$ precies $2n+2$ elementen. Voor $n = 1$ krijgen we precies de ruimte uit voorbeeld 3.4.

Definitie 6.2. Zij X een eindige T_0-ruimte en $x \in X$.

1. x heet lineair als $\exists\, y > x : \ \forall z > x \Longrightarrow z \geq y$
2. x heet colineair als $\exists\, y < x : \ \forall z < x \Longrightarrow z \leq y$

Definitie 6.3. Zij X een eindige ruimte. X heet een kern als X hoogstens 1 lineair punt heeft, òf hoogstens 1 colineair punt heeft.

Voorbeeld 6.4. De ruimte uit voorbeeld 3.4 is een kern. Elke triviale ruimte is een kern. De ruimte gegeven door $X = \{a, b, c, d\}$ met relaties $a < b < c$ en $b < d$ is geen kern: a, c en d zijn (co)lineaire punten.



Definitie 6.5. Zij X een eindige ruimte en $X_1 \subset X$ een deelruimte. X_1 heet een kern voor X als X_1 een deformatieretract is van X en X_1 een kern is.

Stelling 6.6. *Elke eindige T_0-ruimte heeft een kern.*

Bewijs. Zie [2] pagina's 329-330. Het bewijs is vrij lang maar Stong geeft wel een algoritme om altijd een kern te vinden. We passen dit algoritme toe op een voorbeeld. $\square$

Voorbeeld 6.7. Zij $X = \{a, b, c, d, e\}$ met $a < b < c < d < e$ en beschouw a als basispunt. Het is makkelijk in te zien dat X de T_0 eigenschap heeft. Zij $\mathcal{U} := \{U_x : x \in X\}$ en voor elke $A \in \mathcal{U}$, zij $x_A \in A$ zodanig dat $U_{x_A} = A$. Zij $X' \subset X$ gegeven door $X' := \{x_A : A \in \mathcal{U}\}$, de deelruimte van alle x_A. Nu is het zo dat X' een deformatieretract is van X door de afbeelding $f : X \to X'$ gegeven door $f(x) = x_{U_x}$. Ook is het zo dat als $x \in X$ een (co)lineair punt is, dat $X \backslash \{x\}$ een deformatieretract is van X. Met deze ingrediënten valt een algoritme te bouwen. Neem $G_1 := X'$ en als G_i geen kern is, neem dan een (co)lineair punt p en definieer $G_{i+1} := G_i \setminus \{p\}$. Elke iteratie is een deformatieretract van de vorige en omdat X eindig is, zal dit proces altijd stoppen. In het geval van X vinden we achtereenvolgens

$$\begin{aligned} G_1 &= \{a, b, c, d\}, \\ G_2 &= \{a, b, c\} \text{ want d is een colineair punt}, \\ G_3 &= \{a, b\} \text{ want c is een colineair punt}, \\ G_4 &= \{a\} \text{ want b is een colineair punt}. \end{aligned}$$

Merk op dat een kern niet uniek is. We hadden ook elk ander punt uit X als basispunt kunnen beschouwen.

Definitie 6.8. Zij X een eindige T_0-ruimte en T een topologische ruimte. X heet een eindig model voor T als er een zwakke homotopie-equivalentie tussen X en T bestaat.

Definitie 6.9. X heet een minimaal eindig model voor T als X een eindig model is van minimale cardinaliteit.

We introduceren de hoogte $h(X)$ van X als de lengte van de langste keten in X.

Stelling 6.10. *Zij X een eindige T_0-kern welke niet samentrekbaar is, en zij $h = h(X)$. Dan heeft X minstens $2h$ elementen, en als X precies $2h$ elementen heeft is X homeomorf met $\mathbb{S}^{h-1}S^0$.*

Bewijs. Zij $x_1 < \ldots < x_h$ een keten in X van lengte h. Aangezien X een kern is, is x_i niet een lineair punt voor alle $1 \leq i < h$. Voor alle $1 \leq i < h$ bestaat er dan een $y_{i+1} \in X$ zodat $y_{i+1} > x_i$ en $y_{i+1} \ngeq x_{i+1}$. Merk op dat alle y_i verschillend zijn voor alle x_j met $1 \leq j \leq h$. Aangezien $y_{i+1} > x_i$ is y_{i+1} niet gelijk aan x_j voor alle $j \leq i$. Maar ook is y_{i+1} niet gelijk aan x_j voor alle $j > i$ want $y_{i+1} \ngeq x_{i+1}$.
Als nu $y_{i+1} = y_{j+1}$ voor een zekere $i < j$, dan $y_{j+1} \geq x_j \geq x_{i+1}$, wat in tegenspraak is met het gegeven dat $y_{i+1} \ngeq x_{i+1}$. We hebben nu $h - 1$ extra punten gevonden als X een keten van lengte h heeft.
Aangezien eindige ruimten met een minimaal of maximaal element samentrekbaar zijn en X niet samentrekbaar is, kan het geen minimum hebben. Dus er bestaat een $y_1 \in X$ zodat $y_1 \ngeq x_1$. Dus y_1 moet verschillend zijn van de andere

$h + h - 1$ punten, en dus heeft X minimaal $2h$ punten.

Neem nu aan dat X precies $2h$ punten heeft:

$$X = \{x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_h\}.$$

Omdat $x_1 < \ldots < x_h$ een grootste keten is, is x_i niet te vergelijken met y_i voor alle $1 \leq i \leq h$. We tonen aan dat $y_i < x_j$ en $y_i < y_j$ voor alle $i < j$ met inductie naar j. Voor $j = 1$ is er niets te bewijzen. Zij nu $1 \leq k < h$ en neem aan dat de bewering waar is voor alle $j \leq k$. Omdat x_{k+1} niet een colineair punt is bestaan er $z \in X$ zodat $z < x_{k+1}$ en $z \nleq x_k$. Aangezien x_{k+1} en y_{k+1} niet te vergelijken zijn geldt $z \neq y_{k+1}$. Per inductie weten we dat elk punt in X groter is dan x_{k+1} of kleiner is dan x_k, met uitzondering van y_k en y_{k+1}. Dan geldt dus $z = y_k$ en dus $y_k < x_{k+1}$.
We hebben nu het volgende aangetoond: $\forall i < j$:

$$\begin{array}{cc} y_i < x_j & y_i < y_j \\ x_i < x_j & x_i < y_j \end{array}$$

en x_i is niet te vergelijken met y_i voor alle i. Het is eenvoudig in te zien dat dit precies de ordening van $\mathbb{S}^{h-1}(S^0)$, welke ook precies $2(h-1) + 2 = 2h$ punten heeft. Met gemak kan er dus een bijectieve ordebewarende afbeelding tussen de twee posets gemaakt worden, en deze afbeelding vertaalt zich naar een homeomorfisme tussen de eindige T_0-ruimten. $\square$

Stelling 6.11. *Elke ruimte met dezelfde homotopiegroepen als S^n heeft minstens $2n+2$ punten, en $\mathbb{S}^n(S^0)$ is de unieke $(2n+2)$-punts ruimte met deze eigenschap.*

Bewijs. Het geval $n = 1$ is triviaal. Zij dus $n > 1$ en neem aan dat X een eindige ruimte is met het kleinst aantal punten zodanig dat de homotopiegroepen $\pi_k(X, x) \cong \pi_k(S^n, s)$ isomorf zijn voor alle $k \geq 0$. Dan is X dus een minimaal model, en X moet dus ook T_0 zijn. Nu zegt de stelling van Hurewicz [4] (p. 366-367) dat

$$H_n(|\mathcal{K}(X)|) \cong \pi_n(|\mathcal{K}(X)|) \cong \pi_n(S^n) \neq 0.$$

Dit betekent dat de dimensie van het simpliciaal complex $\mathcal{K}(X)$ minstens n is. Dus de langste keten in X is minstens $n + 1$. Nu volgt de uitspraak van de stelling direct uit 6.10. $\square$

Met behulp van stellingen 6.10 en 6.11 valt te concluderen dat

Gevolg 6.12. *De n-sfeer S^n heeft een uniek eindig minimaal model welke gelijk is aan $\mathbb{S}^n(S^0)$.*

7 Een aantal toepassingen

Hier tonen we een ander bewijs voor het feit dat S^n dezelfde homotopiegroepen heeft als $\mathbb{S}^n(S^0)$. Het is een andere inslag wat misschien meer inzicht geeft in het onderwerp, maar het uiteindelijke resultaat is wel zwakker. Zo wordt er niet uniciteit bewezen en de minimaliteit wordt ook niet aangetoond. Zij $n \in \mathbb{N}$.

Laten we eerst aantonen dat $|\mathcal{K}(\mathbb{S}^n(S^0))|$ homeomorf is met $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$. We doen dit per inductie naar n. Voor $n = 0$ moeten we aantonen dat S^0 homeomorf is met S^0, wat duidelijk moge zijn. Neem nu aan dat $|\mathcal{K}(\mathbb{S}^n(S^0))|$ homeomorf is met S^n voor alle $0 \leq n \leq N$. Beschouw het geval $n = N + 1$. Voor het bewijs is een lemma en propositie nodig.

Lemma 7.1. *De $(n+1)$-dimensionale sfeer S^{n+1} is homeomorf met $S(S^n)$, de suspensie van de n-dimensionale sfeer voor alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bewijs. Zij $n \in \mathbb{N}$. Dan maken we een afbeelding

$$f : S^n \times [-1, 1] \longrightarrow S^{n+1}$$

gegeven door $(x, t) \mapsto (x \cdot \sqrt{1 - t^2}, t)$. Dan is f goed gedefinieerd, want

$$||(x\sqrt{1 - t^2}, t)||^2 = t^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2(1 - t^2) = t^2 + (1 - t^2) = 1.$$

Verder is f ook injectief op $S^n \times (-1, 1)$. Zij $(x, t), (y, s) \in S^n \times (-1, 1)$ en stel dat $f(x, t) = f(y, s)$. Dan $(x\sqrt{1 - t^2}, t) = (y\sqrt{1 - s^2}, s)$. Dan geldt $s = t$, en hieruit volgt $x = y$ omdat $1 - t^2 \neq 0$. Beschouw nu de natuurlijke quotiëntafbeelding

$$\pi : S^n \times [-1, 1] \to (S^n \times [-1, 1])/(S^n \times \{\pm 1\}) = S(S^n).$$

Dan factoriseert f via π en we zien dat $\bar{f} : S(S^n) \to S^{n+1}, (\bar{x}, \bar{t}) \mapsto f(x, t)$ een bijectie is. Immers, alle equivalentieklassen in het interval $(-1, 1)$ bestaan uit slechts 1 element, en de equivalentieklasse van een $x \in S^n \times \{\pm 1\}$ is heel $S^n \times \{\pm 1\}$. Het is niet moeilijk in te zien dat $S(S^n)$ compact is en dat S^{n+1} Hausdorffs is, dus $\bar{f}$ is een homeomorfisme. □

Voor het bewijs is ook een propositie nodig welke we niet gaan bewijzen.

Propositie 7.2. *Als X een eindige T_0-ruimte is, S de functor voor suspensie en $\mathbb{S}$ de functor voor non-Hausdorffse suspensie, dan geldt*

$$S(|\mathcal{K}((X))|) \cong |\mathcal{K}(\mathbb{S}(X))|$$

In woorden; de suspensie van de polyhedron van $\mathcal{K}(X)$ is homeomorf met de polyhedron van het simpliciaal complex van de non-Hausdorffse suspensie van X. Er geldt nu

$$\begin{aligned} S^{N+1} &\overset{\text{lemma}}{\cong} S(S^N) \\ &\overset{\text{inductiehypothese}}{\cong} S(|\mathcal{K}(\mathbb{S}^N(S^0))|) \\ &\overset{\text{propositie}}{\cong} |\mathcal{K}(\mathbb{S}(\mathbb{S}^N(S^0)))| = |\mathcal{K}(\mathbb{S}^{N+1}(S^0))|. \end{aligned}$$

Nu is volgens stelling 5.7 de afbeelding $f_{\mathbb{S}^n(S^0)} : |\mathcal{K}(\mathbb{S}^n(S^0))| \longrightarrow \mathbb{S}^n(S^0)$ een zwakke homotopie-equivalentie. Volgens het zojuist aangetoonde heeft S^n dus dezelfde homotopiegroepen als de $(2n + 2)$-punts ruimte $\mathbb{S}^n(S^0)$.

Dit resultaat gebruikt alleen stelling 5.7 als hulpmiddel. Met stelling 6.11 is gelijk hetzelfde te concluderen.

Bewijs van stelling 1.2. Wat is de topologie van X^{op}? Deze wordt gegenereerd door de basis

$$\{V_x : x \in X^{op}\}$$

waarbij $V_x := \{y \in X^{op} : y \leq x\}$. Elke V_x is dus ook gelijk aan $\{y \in X : y \geq x\}$. Merk op dat

$$\mathcal{K}(X^{op}) = (X^{op}, \leq) = (X, \geq) = (X, \leq) = \mathcal{K}(X)$$

omdat we de richting van ketens in feite vergeten. Uit stelling 5.7 volgt nu dat

$$\begin{aligned} f_X : |\mathcal{K}(X)| &\longrightarrow X \\ f_{X^{op}} : |\mathcal{K}(X^{op})| &\longrightarrow X^{op} \end{aligned}$$

zwakke homotopie-equivalenties zijn. Omdat ook $|\mathcal{K}(X)| = |\mathcal{K}(X^{op})|$, zien we dat voor alle $x \in |\mathcal{K}(X)|$ en alle $i \in \mathbb{N}$ de homotopiegroepen

$$\pi_i(X, f_X(x)) \cong \pi_i(X^{op}, f_{X^{op}}(x))$$

isomorf zijn. □

Als we met een willekeurige eindige ruimte X beginnen, definieer dan een relatie $\sim$ op X gegeven door

$$x \sim y \Longleftrightarrow U_x = U_y$$

Propositie 7.3. *$X/\sim$ is een T_0-ruimte.*

Bewijs. We definieren een pre-ordening op $X/\sim$ gegeven door

$$[x] \leq [y] \Longleftrightarrow x \leq y$$

voor alle $[x], [y] \in X/\sim$. Deze ordening is goed gedefinieerd: Stel dat $[x] = [x'], [y] = [y']$ voor zekere $x, x', y, y' \in X$. Stel nu dat $y \leq x$. Dan $x' \geq x \geq y \geq y'$. Dus $x' \geq y'$. Reflexiviteit en transitiviteit zijn voor gezorgd door lemma 3.2. Laat nu $[x] \leq [y]$ en $[y] \leq [x]$. De vraag is of $[x] = [y]$. We weten dat $x \leq y$ en $y \leq x$ in X, maar dat betekent dat $x \sim y$. Omdat nevenklassen disjunct zijn volgt $[x] = [y]$. Volgens lemma 3.3 is $X/\sim$ nu T_0. □

Voorbeeld 7.4. Zij $X = \{a, b, c, d, p_1, p_2, p_3\}$ een ruimte met 7 punten met open verzamelingen

$$\emptyset, X, \{a, p_1\}, \{c\}, \{a, c, p_1\}, \{b, p_2\}, \{d, p_3\}, \{a, c, b, p_1, p_2\}, \{a, c, d, p_1, p_3\}.$$

De open hulls van X zijn

$$\begin{aligned} U_a &= \{a, p_1\} = U_{p_1}, \\ U_b &= \{b, p_2\} = U_{p_2}, \\ U_c &= \{c\}, \\ U_d &= \{d, p_3\} = U_{p_3}. \end{aligned}$$

Dan is $X/\sim$ gelijk aan $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}$, en de topologie is dezelfde als van voorbeeld 3.4.

8 Referenties

1. M.C. McCord. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces.* Duke Mathematical Journal 33 (1966), 465-474.

2. R.E. Stong. *Finite topological spaces.* Transactions of the American Mathematical Society 123 (1966), 325-340.

3. J.A. Barmak, E.G. Minian. *Minimal finite models.* http://arxiv.org/abs/math/0611156, 1-7.

4. A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press.