H. Younesian

Exponentiële groei met stochastische verstoringen.

Bachelorscriptie, 28 september 2009

Scriptiebegeleider: Dr.ir. O.W. van Gaans

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Introductie

In dit project gaan we modellen voor exponentiële groei met stochastische verstoring bekijken. Een model in continue tijd voor exponentiële groei is natuurlijk het bekende $b(t) = e^{\alpha t} b_0$. Dit model kan worden gebruikt om rente op rente groei te beschrijven, zonder enige verstoring. Hier is α de rente en b_0 het begin bedrag. Een discreet voorbeeld van pure rente-op-rente groei is het model $a_{n+1} = (1+\alpha)a_n$ met $n \in \mathbb{N}$. Op de financiële markt, kan men een aandelenpakket op vergelijkbare wijze beschrijven. Het grote verschil is natuurlijk dat de groei niet puur is, maar wordt verstoord door invloeden van buitenaf. De wijziging die wij in het model brengen om de groei van een aandelenpakket te beschrijven, is het vervangen van de rente α door $\alpha + Z_n$, om aan te geven dat het wordt verstoord op moment n. Z_n is een kleine (min of meer) rond nul gecentreerde stochast. Bekijk nu de volgende twee modellen:

$$A_{n+1} = (1 + \alpha + U_n)A_n, \;\; n = 0, 1, ...,$$
$$B_{n+1} = e^{\alpha + V_n} B_n$$

waar $\alpha \in (-1, 1)$ en (U_n) en (V_n) beide rijen van identiek verdeelde onafhankelijke toevalsvariabelen zijn. Voor de verdelingen kan men bijvoorbeeld aannemen dat $U_n = \sigma$ of $-\sigma$ beide met kans 0.5 of dat U_n Normaal verdeeld is met gemiddelde nul en variantie σ. We willen weten hoe de stochastische verstoring doorwerkt op de verwachte waarden $E(A_n)$ en $E(B_n)$. Het continue model wat wij in beschouwen nemen is het Beroemde Black Scholes model. We gaan proberen om dit continue model discreet op te stellen, zodat het beter voldoet aan de eisen van de financiele markt (waar het model op wordt toegepast). Verder gaan we allerlei wiskundige eigenschappen van modellen voor exponentiele groei met stochastische verstoring onderzoeken in verschillende hoofdstukken.

Een korte beschrijving van het onderzoek wat is gedaan in dit bachelor project en de onderwerpen die in dit verslag worden besproken is als volgt:

Hoofdstuk 1: We beginnen in dit hoofdstuk met het introduceren van het continue (black-scholes) model, met de bijbehorende stochastische verstoring. Verder gaan we op zoek naar een discreet model waarmee wij het gedrag van het continue model kunnen benaderen en geven natuurlijk de motivatie hiervoor. Er komen verschillende modellen aan het licht en we zullen kijken waarom deze wel of niet geschikt zijn.

Hoofdstuk 2: In dit hoofdstuk gaan we kijken of het discreet model wat wij hebben opgesteld in verdeling convergeert naar een continue model. Karakteristieke functies spelen hier een belangrijke rol. We zullen beginnen met een stukje theorie over karakteristieke functies en het opstellen van stelling 2.2, die iets zegt over de samenhang van convergentie van kansverdelingen en convergentie van karakteristieke functies. We be wijzen stelling 2.2 met behulp van andere stellingen die geformuleerd, maar niet bewezen zullen worden. Vervolgens laten we met behulp van stelling 2.2 zien dat het betreffende discrete model in verdeling convergeert (naar een continu model) als de tijdstop naar nul gaat.

Hoofdstuk 3: Wederom gaan we kijken naar convergentie van verdeling van een discreet model dat wij hebben opgesteld. Vanwege aanpassingen aan ons model, gemotiveerd uit de praktijk, gaan we kijken of ons model in verdeling convergeert naar een α-stabiele-verdeling. We zullen deze stap gedetaileerder motiveren in het hoofdstuk zelf. Wederom beginnen we met een stuk theorie(over α-stabiele verdelingen in dit geval). Met behulp van stelling 3.2 zullen we de vorm van deze verdeling concreter uitwerken. Verder zullen we het discrete model, dat wij willen beschouwen, concreet opstellen. Onze bedoeling was om in het tweede deel (op soortgelijke wijze als in hoofdstuk 2) de gewenste verdelingsconvergentie aan te tonen. Dit is ons echter niet gelukt. We zullen wel laten zien waar het mis is gegaan, zodat de lezer er misschien zelf verder aan kan puzzelen.

Inhoudsopgave

HOOFDSTUK 1

Het Model

In dit hoofdstuk doen we een poging tot het construeren van een discreet model om het continue model mee te benaderen. We stellen verschillende discrete modellen op en vergelijken verschillende eigenschappen van de discrete modellen met het continue model. Op deze manier kunnen we bepalen of deze geschikt zijn om het continue model te vervangen of te benaderen. De verdeling die we kiezen voor de stochasten van de discrete modellen komt overeen met die van het continue model. We beginnen met het kijken naar de verwachtingswaarden, wanneer deze overeen komen met het continue model kunnen we andere eigenschappen van het discrete model met het continue vergelijken.

We beschouwen als eerst het continue Black-Scholes model:

1. Model 1: Het Continue model

Het continue model dat wij in beschouwing nemen is van de volgende vorm:

$$X(t) = e^{\alpha t+\sigma B(t)} \tag{1}$$

$X(t)$ geeft het bedrag op tijdstip t weer, we nemen aan dat ons begin bedrag X_0 (waarmee we de e-macht in (1) zouden moeten vermenigvuldigen) gelijk aan 1 is, zodat we deze niet hoeven op te schrijven (merk op dat dit geen beperking is voor de beschouwing van het model, we zullen dit in het vervolg ook aanhouden). Verder geeft α de rente weer en σ de volatiliteit. Uit de praktijk blijkt dat de variantie t altijd van dezelfde orde is als de rente α (dus geldt dit ook voor ons model). B(t) geeft de random verstoring weer in dit continue model, namelijk de brownse beweging. Deze is normaal verdeeld met gemiddelde nul en variantie σ^2. Ook kunnen we zonder verlies van algemeenheid het gemiddelde gelijk aan nul nemen, want het model is altijd zodanig te schalen dat het gemiddelde inderdaad gelijk aan nul is.

Voor de verwachting van het continue model geldt:

$$E(X(t)) = e^{(\alpha t+\frac{1}{2}\sigma^2 t)} \tag{2}$$

met als voorheen de rente α en σ^2 de standaard afwijking van de Brownse beweging.

Merk op dat volgens de verwachting van dit model geldt dat hoe groter wij ons risico nemen (namelijk de standaard afwijking, ofwel (het kwadraat van) de volatiliteit) des te groter onze verwachting wordt en dus verwachten we een hoger eindbedrag. Iedereen kan natuurlijk uit eigen ervaring en intuïtie oordelen dat dit (vaak) niet overeenkomt met de werkelijkheid. De uitdrukking van de verwachtingswaarden volgt uit het feit dat het continue model de Brownse verdeling volgt. Ons doel is dan ook om het probleem zodanig te modelleren dat wij in staat zijn de verdeling aan de omstandigheden aan te passen. Eerst gaan wij het huidige continue model benaderen met een discreet model (met dezelfde verdeling) van de bekende vorm voor rente groei met stochastische verstoring.
In het vervolg schrijven we σ_{bs} in plaats van σ voor de volatiliteit van het continue Black-Scholes model. We zullen σ reserveren om de volatiliteit in het discrete model aan te geven.

2. Model 2: Discreet model 1

Het discrete model, dat wij als benadering voor het continue model gaan gebruiken, is van de volgende vorm:

$$
\begin{aligned}
&\text{Kies } Z_i \sim N(0,\sigma^2) \text{ met } i = 1,2,... \text{ en } n = 1,2,... \text{ zdd:}\\
&\quad X_0 = 1 (\text{het beginbedrag nemen we wederom gelijk aan } 1)\\
&\quad X_1 = (1+r+Z_1)X_0\\
&\quad X_2 = (1+r+Z_2)X_1\\
&\quad X_3 = (1+r+Z_3)X_2\\
&\qquad .\\
&\qquad .\\
&\qquad .\\
&\quad X_n = (1+r+Z_n)X_{n-1}
\end{aligned}
$$

We hebben dus discrete tijdstappen i, waarbij we na elke stap een nieuwe normaal verdeelde stochastische variabele Z_i trekken. De rente r blijft bij elke stap natuurlijk hetzelfde. In deze fase kunnen de tijdstappen nog van alles voorstellen(seconde, minuten, uren, dagen, etc) en is er ook geen sprake van enige continuïteit.

We komen echter in de problemen wanneer we naar de verwachtingswaarden van dit model gaan kijken. Hiervoor geldt namelijk:

$$
\begin{aligned}
E(X_n) &= E((1+r+Z_n)X_{n-1})\\
&= E(\prod_{i=0}^{n}(1+r+Z_i))\\
&= \prod_{i=0}^{n} E(1+r+Z_i)\\
&= \prod_{i=0}^{n}(1+r+E(Z_i)) \text{ (merk op dat voor alle i=1,2,..n geldt } E(Z_i)=0)\\
&= \prod_{i=0}^{n}(1+r) = (1+r)^n
\end{aligned}
$$

Dus de verwachtingswaarden (op discrete tijdstippen $i = 1,2,...$) van dit model zijn onafhankelijk van de variantie (dus de genomen risico bij een investering). Merk hierbij op dat dit natuurlijk een cruciale eigenschap is van hetgeen dat wij willen beschrijven, wat het betreffende discrete model ongeschikt maakt als benadering van het continue model. Een andere voordehandliggende mogelijkheid voor een discreet model is om de Z_i's niet om elk (discrete) tijdstap, maar om elke twee tijdstappen te trekken.

Dit brengt ons bij het volgende model:

3. Model 3: Discreet model 2

Neem wederom $Z_i \sim N(0, \sigma^2)$ met $i = 1, 2, ...$ zdd:

$$\begin{aligned}
X_0 &= 1 \\
X_1 &= (1 + r + Z_1)X_0 \\
X_2 &= (1 + r + Z_1)X_1 \\
X_3 &= (1 + r + Z_2)X_2 \\
X_4 &= (1 + r + Z_2)X_3 = (1 + r + Z_2)^2 X_2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
X_{2n} &= (1 + r + Z_n)X_{2n-1} \\
&= (1 + r + Z_n)^2 X_n \\
&= \prod_{i=1}^{n}(1 + r + Z_i)^2
\end{aligned}$$

Voor de verwachtingswaarden van dit model komen we dus uit op:

$$\begin{aligned}
E(X_{2n}) &= E(\prod_{i=1}^{n}(1 + r + Z_i)^2) \\
&= \prod_{i=1}^{n} E(s^2 + 2sZ_i + Z_i^2) \text{ met } s = 1 + r \\
&= \prod_{i=1}^{n}(s^2 + 0 + E(Z_i^2)) \qquad (3)
\end{aligned}$$

We merken nu op dat voor de verwachtingswaarden van $Z_i \sim N(0, \sigma^2)$ geldt

$$E(Z_i^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k} \text{ met } k = 0, 1, 2, 3.. \qquad (4)$$

Uit (3) en (4) krijgen we vervolgens $E(X_{2n}) = s^2 + \sigma^2 = (1 + r)^2 + \sigma^2$ met $n = 1, 2, ...$ de discrete tijdstappen. Dus voor de verwachtingswaarden van dit model zien wij afhankelijkheid van de genomen risico σ. Dit maakt het mogelijk een geschikt model om het continue geval te benaderen.

Wanneer wij de lijn doortrekken en dit model wat algemener gaan opschrijven, komen we uit bij het geval dat we niet om de 2 stappen een trekking doen, maar om elke $k \in \mathbb{N}$ stappen.

Hiermee komen we aan bij het derde discrete model:

4. Model 4: Discreet model 3

Zij $Z_i \sim N(0, \sigma^2)$ met $i = 1, 2, ...$ zdd:

$$\begin{aligned} X_0 &= 1 \\ X_i &= (s + Z_i)^i X_0, \text{ met } i = 1, 2, ..., k \\ X_{k+i} &= (s + Z_i)^i X_k \\ X_{kn+i} &= (s + Z_{k-1})^i X_{nk} \end{aligned}$$

Voor $k = 4$ geldt dan:

$$\begin{aligned} X_1 &= s + Z_1 \Rightarrow E(X_1) = s \\ X_2 &= (s + Z_1)^2 \Rightarrow E(X_2) = s^2 + \sigma^2 \\ X_3 &= (s + Z_1)^3 \Rightarrow E(X_3) = s^3 + s\sigma^2 \\ X_4 &= (s + Z_1)^4 \Rightarrow E(X_4) = s^4 + 6s^2\sigma^2 + 3\sigma^4 \end{aligned}$$

en uiteindelijk geldt voor $n = 1, 2, ...$:

$$\begin{aligned} X_{4n} = \prod_{i=1}^{n}((s + Z_i)^4) \Rightarrow E(X_{4n}) &= E(\prod_{i=1}^{n}((s + Z_i)^4)) \\ &= \prod_{i=1}^{n} E((s + Z_i)^4) \\ &= \prod_{i=1}^{n} s^4 + 6s^2\sigma^2 + 3\sigma^4 \\ &= (s^4 + 6s^2\sigma^2 + 3\sigma^4)^n \qquad (5) \end{aligned}$$

Het volgend punt is om te kijken of we een verband tussen de verwachting van het discrete model 3 met k=4 (geven we dus aan met X_{4n}) en het continue Black-Scholes model $X(n)$ kunnen vinden. Wanneer deze overeenkomen, dan geldt:

$$E(X(4n)) = E(X_{4n}) \text{ op tijdstip 4n}$$

Met behulp van (2) zien we dat voor de verwachtingswaarde van het continue model op tijdstip $4n$ geldt:

$$\begin{aligned} E(X(4n)) &= e^{(\alpha + \frac{1}{2}\sigma_{bs}^2)4n} \\ &= (e^{(\alpha + \frac{1}{2}\sigma_{bs}^2)4})^n \end{aligned}$$

Merk op dat de σ's van de modellen niet overeen hoeven te komen wanneer de verwachtingswaarden gelijk aan elkaar willen zijn (we zijn slechts op zoek naar een verband). Merk op dat we de σ van het continue (black-scholes) model aangeven met σ_{bs} en die van het discrete model voor $k = 4$ met σ. Ook de rentes van de het continue model en het discrete model geven we (zoals eerder aangegeven) respectievelijk aan met α en r.

Een Taylor benadering van $e^{(\alpha + \frac{1}{2}\sigma_{bs}^2)4}$ en (1) geeft:

$$\begin{aligned} E(X(4n)) &= e^{(\alpha + \frac{1}{2}\sigma_{bs}^2)4n} \\ &\approx (1 + 4\alpha + 4\sigma_{bs}^2)^n \qquad (6) \\ E(X_{4n}) &= (s^4 + 6s^2\sigma^2 + 3\sigma^4)^n \\ &\approx (1 + 4r + 6\sigma^2)^n \qquad (7) \end{aligned}$$

Uit (6) en (7) zien we dat als de verwachtingswaarden van de betreffende modellen overeen willen komen, er moet gelden :

$$(1+4\alpha+4\sigma_{bs}^2))^n = (s^4+6s^2\sigma^2+3\sigma^4)^n \Rightarrow 1+4r+6\sigma^2 = 1+4\alpha+4\sigma_{bs}^2$$
$$\Rightarrow \alpha = r \wedge \sigma_{bs}^2 = \frac{3}{2}\sigma^2 \tag{8}$$

Wanneer we dit nu echter gaan testen voor $n = 10$, $\alpha = 0.1$ en $\sigma_b s = 0.5$, dan krijgen we:

$$E(X(4n)) = 0.2648912211 * 10^{11}$$
$$E(X_{4n}) = 1780255.197$$

Dus de verwachtingswaarden komen niet overeen, terwijl we dit wel hadden verwacht (of beter gezegd: we hadden het gehoopt). Het probleem zit hem in het feit dat de tijdstappen van het discrete model 'te' discreet zijn en we deze wat 'continuër' zouden moeten maken. Dit doen we door elke discrete stap van groote 1 van de vorm $[a, b]$ met $a, b \in \mathbb{N}_{\geqslant 0}$ (en dus $|a - b| = 1$ met $a > b$) in gelijke stukken te verdelen. Dit brengt de nodige wijzigingen in het model met zich mee. De verwachting van het discrete model wordt dan:

$$E(X_{4n}) = (1+(r/N))^4 + 6(1+(r/N))^2\sigma^2/N + 3(\sigma^2/N)^2)^{n*N} \tag{9}$$

Wanneer wij nu met behulp van (8) wederom de verwachtingswaarden met $n = 10$, $\alpha = 0.1$ en $\sigma_b s = 0.5$, dan krijgen we voor $N \to \infty$ (in maple N= 10000000) :

$$E(X(4n)) = 0.2648912211 * 10^{11}$$
$$E(X_{4n}) = 0.2648904584 * 10^{11}$$

We zien dus dat deze waarden wel aardig met elkaar overeen komen. Ook wanneer we andere waarden in maple invoeren komen de verwachtingswaarden telkens overeen. We hebben dus een discreet model waarvan de verwachtings waarde overeenkomt met die van het continue model. Voordat we het wiskundig helemaal in orde gaan maken en ons resultaat volledig gaan uitschrijven, gaan we eerst kijken of andere eigenschappen van het discrete model ook overeenkomen met het continue geval.

Dit brengt ons tot de varianties van de verschillende modellen. We gaan dus na of er geldt dat

$$Var(X(4n)) = Var(X_{4n}) \tag{10}$$

Omdat voor een stochast X geldt $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ en we al hebben laten zien dat $E(X(4n)) = E(X_{4n})$ rest ons alleen nog te laten zien dat $E(X^2(4n)) = E(X_{4n}^2)$. Dit gaat echter niet, waaruit we concluderen dat de varianties van de modellen op tijdstip $4n$(met n willekeurig) niet overeen komen, dus volgt dat de varianties van de modellen niet overeenkomen. Het discrete model wat wij in gedachten hadden komt dus niet overeen met het continue model.

Ook voor het discrete model 3 met k=2 gelden de bovengenoemde eigenschappen en dus gaan we ook deze niet meer (in de trant van het onderzoek naar k=4) verder onderzoeken.

HOOFDSTUK 2

Convergentie in verdeling

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat de varianties van het discrete model 3 (voor k=4) en het continue model niet overeen komen (tenminste het is ons niet gelukt om een verband tussen deze twee aan te tonen). Dit brengt ons tot het volgend punt; we kunnen het model verder algemener maken door de verdeling van de Z_i's in $X_{2n} := \prod_{i=1}^{nN}(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2$ niet te specificeren (voorheen waren deze dus normaal verdeeld met de eerder genoemde eigenschappen), maar als enige eis te stellen dat deze onafhankelijk en identiek verdeeld zijn en dat $E(|Z_i|)^2 < \infty$ geldt voor alle $i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. We hebben hier bewust gekozen voor het discrete model 3 met k=2, vanwege complicaties die optreden wanneer we naar de variantie gaan kijken van het k=4 geval. Ook voor k=2 is het ons niet gelukt om een verband tussen het discrete en het continue model aan te tonen. Om verdere eigenschappen van ons discreet model ten opzichte van het continue model te onderzoeken, brengen we de volgende definitie in herinnering:
Een rij stochastische variabelen $X_1, X_2, ...$ *convergeert in verdeling* naar een stochastische variabele X, wanneer geldt:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \tag{11}$$

voor elke $x \in \mathbb{R}$ waar F continu is. En waar F_n en F de verdelingsfuncties van respectievelijk X_n en X zijn. We noteren de convergentie in verdeling met:

$$X_n \quad \xrightarrow{D} \quad X$$

Ons vorig discrete model kwam niet overeen met het continue model, dus met het huidige discrete model gaan we kijken of er sprake is van convergentie in verdeling naar het continue model. Dus of er in zekere zin geldt dat $X_{2n} \xrightarrow{D} X(t)$. Omdat $X(t)$ een normale verdeling volgt, komen we al snel uit bij de Centrale Limiet Stelling. Deze stelt namelijk dat voor een rij stochastische variabelen (Z_i), met alle Z_i identiek en onafhankelijk verdeeld en $E(|Z_i|)^2 < \infty$, er geldt dat $\sum_{i=1}^{N} \frac{Z_i}{\sqrt{N}} \xrightarrow{D}$ Normale Verdeling als $n \to \infty$. Voor ons model geldt echter $X_{2n} := \prod_{i=1}^{nN}(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2$ met (Z_i) onafhankelijk en identiek verdeeld. Hier is dus geen sprake van een som, maar van een product. Wanneer we nu de natuurlijke logaritme hiervan nemen krijgen we:

$$Y_N := \log(X_{2n}) = \log(\prod_{i=1}^{nN}(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2) = \sum_{i=1}^{nN}\log(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2, \tag{12}$$

dus een som. Merk op dat de N in de subscript van Y_N staat voor de grootte van de discrete tijdsintervallen en we dus op zoek gaan naar convergentie in verdeling naarmate de tijdsintervallen kleiner worden en het model een meer 'continue vorm' aanneemt. We zijn dus geïnteresseerd in het geval $N \to \infty$. De betreffende som is niet van de gevraagde vorm, waardoor wij de Centrale Limiet Stelling niet kunnen toepassen. In plaats van het omschrijven naar die vorm, wat hoogstwaarschijnlijk niet kan, gaan we kijken naar het bewijs van de Centrale Limiet Stelling. Hierin zien we dat de Continuïteits Stelling van kansverdelingen een rol speelt in de verdelingsconvergentie. We zullen eerst de benodigde stellingen en definities formuleren voordat we verder gaan.

1. De Continuïteits Stelling voor karakteristieke functies

DEFINITIE 2.1. De *karakteristieke functie* $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ van een reële stochastische varabele X is gedefinieerd door

$$t \mapsto E(e^{itX}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Merk op dat voor $t \in \mathbb{R}$ de functie $X \mapsto e^{itX}$ begrensd en continu (en dus meetbaar) is, waaruit volgt dat $E(e^{itX})$ bestaat en eindig is.]Dit brengt ons bij de volgende stelling[1]:

STELLING 2.2 (Continuïteit voor karakteristieke functies). *Een rij kansverdelingen in $\mathbb{R}$ convergeert naar een kansverdeling Q dan en slechts dan als de rij van bijbehorende karakteristieke functies puntsgewijs naar een functie φ convergeert die continu is in het punt 0. In dit geval is de convergentie naar φ uniform op het interval $[-u, u]$ voor alle $u \in \mathbb{R}^+$ en φ is de karakteristieke functie behorend bij Q.*

Met convergentie in verdeling

We zullen alleen dat deel van de stelling gebruiken (in het tweede deel van dit hoofdstuk), dat stelt dat een rij kansverdelingen convergeert naar een bepaalde kans verdeling Q, wanneer de bijbehorende karakteristieke functies van de kansverdelingen naar de karakteristieke functie behorend bij Q convergeren. Het andere deel is in ons geval van minder groot belang. De stellingen die wij zullen formuleren om Stelling 2.2 mee te bewijzen zullen we niet bewijzen, omdat deze te uitgebreid zijn en buiten de stof van dit project vallen.

STELLING 2.3. *(Begrensde Convergentie Stelling).*
A[Algemeen] Laat $(f_1, f_2, ...)$ een rij complexe meetbare functies op een eindige maatruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ zijn. Stel dat $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ bijna overal bestaat. Stel nu dat er een eindige constante M bestaat, zodanig dat voor alle $n \geq 1$ geldt $|f_n| \leq M$ bijna overal. Dan geldt:

$$\int_\Omega |f| d\mu \leq M, \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n| d\mu = \int_\Omega f d\mu \text{ en } \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0.$$

B[Kansruimte] Laat $(X_1, X_2, ...)$ een rij complexe stochastische variabele op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Stel dat $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ bijna zeker bestaat. Stel nu dat er een eindige constante M bestaat, zodanig dat voor alle $n \geq 1$ geldt $|X_n| \leq M$ bijna zeker. Dan geldt:

$$E(|X|) \leq M, \lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X) \text{ en } \lim_{n\to\infty} E(|X - X_n|) = 0.$$

PROPOSITIE 2.4. *Laat Q en Q_n, $n = 1, 2, ...$, kansmaten op $\mathbb{R}$ zijn en stel dat $Q_n \to Q$ als $n \to \infty$. Dan bestaat er een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ en reëele stochastische variabelen X en X_n met $n = 1, 2, ...$ gedefinieerd op Ω, zodanig dat de distributies van X en X_n respectievelijk gelijk zijn aan Q en Q_n en er geldt dat $X_n \to X$ bijna zeker als $n \to \infty$.*

BEWIJS. (deel 1 Stelling 2.2)
Stel eerst dat $Q_n \to Q$ als $n \to \infty$. We definieren de karakteristieke functies van Q_n en Q respectievelijk met φ_n en φ. Alle karakteristieke functies zijn per definitie continu, dus i.h.b. is φ continu in het punt 0. Uit propositie 2.4 volgt dat er een kansruimte bestaat met stochastische variabelen X en X_n met $n = 1, 2, ...$ gedefinieerd op de betreffende kansruimte zodanig dat Q de verdeling van X is en Q_n die van X_n voor $n = 1, 2, ...$ en er geldt dat $X_n \to X$ bijna zeker. De exponentiële functie is ook voor complexe waarden een continue functie, dus voor alle $v \in \mathbb{R}$ geldt dat $e^{ivXn} \to e^{ivX}$ bijna zeker als $n \to \infty$.

Omdat $|e^{ivXn}| \leq 1$ volgt nu uit de Begrensde Convergentie Stelling dat $\lim_{n\to\infty} E(e^{ivXn}) = E(e^{ivX})$ ofwel $\varphi_n \to \varphi$ als $n \to \infty$.

Het rest ons nog de uniforme convergentie op begrensde intervallen te bewijzen. Merk allereerst op dat

$$1|\sin(x)| \leq |x| \wedge 1, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$|1 - \cos(x)| \leq \frac{x^2}{2} \wedge 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

[1] De stellingen en proposities uit paragraaf 2.1 zijn gebaseerd op die van [1]

Dit geeft voor $v \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |e^{iv}-1| &= |\cos(v)+i\sin(v)-1| \\ &\leq |1-\cos(v)|+|i||\sin(v)| \\ &= |1-\cos(v)|+|\sin(v)| \\ &\leq (\frac{v^2}{2}\wedge 2)+(|v|\wedge 1) \\ &\leq 2|v|\wedge 2 \end{aligned}$$

Waaruit volgt dat

$$\begin{aligned} |e^{ivX_n}-e^{ivX}| &= |e^{ivX}||e^{iv(X_n-X)}-1| \\ &= |e^{iv(X_n-X)}-1| \\ &\leq 2|v||X_n-X|\wedge 2 \end{aligned}$$

Als we nu $u \in \mathbb{R}^+$ kiezen, krijgen we

$$\sup_{|v|\leq u}|e^{ivX_n}-e^{ivX}| \leq 2u|X_n-X| \to 0 \text{ bijna zeker als } n\to\infty$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} \sup_{|v|\leq u}|\varphi_n(v)-\varphi(v)| &= \sup_{|v|\leq u}|E(e^{ivX_n})-E(e^{ivX})| \\ &\leq \sup_{|v|\leq u}|E(e^{ivX_n}-e^{ivX})| \\ &\leq E(\sup_{|v|\leq u}|e^{ivX_n}-e^{ivX}|) \end{aligned}$$

wat volgens de Begrensde Convergentie Stelling nul nadert, wanneer $n \to \infty$. Dit levert de gevraagde convergentie voor de karakteristieke functies op. Voor het laatste deel van het bewijs, introduceren we eerst een definitie en twee stellingen: □

DEFINITIE 2.5. Een verzameling van kansverdelingen $\mathcal{Q}$ op $\mathbb{R}$ of $\bar{\mathbb{R}}$, heet *relatief rijcompact* als elke rij $(Q_n : n = 1, 2, ...)$ van kansverdelingen uit $\mathcal{Q}$ een convergerende deelrij bevat.

STELLING 2.6. *Laat $\mathcal{Q}$ een verzameling van kansmaten op $\mathbb{R}$, en laat $\mathcal{U}$ de verzameling van bijbehorende karakteristieke functies. Dan zijn de volgende 2 uitspraken equivalent:*

- i *$\mathcal{Q}$ is relatief rijcompact*
- ii *voor alle $\varepsilon > 0$ bestaat er een $b > 0$ z.d.d.*

$$b\int_0^{\frac{1}{b}}[1-\Re(\varphi(v))]dv < \varepsilon$$

voor alle (maar wel eindig veel) $\varphi \in \mathcal{U}$

STELLING 2.7. *Zij $(Q_n : n = 1, 2, ...)$ een rij van kansverdelingen in $\mathbb{R}$ of $\bar{\mathbb{R}}$, met de eigenschap dat voor een bepaalde kansverdeling Q, elke deelrij zelf ook een deelrij heeft die naar Q convergeert. Dan geldt $Q_n \to Q$ als $n \to \infty$.*

BEWIJS. (deel 2 Stelling 2.2)
Stel nu dat $\mathcal{Q}$=$(Q_n : n = 1, 2, ...)$ een rij kansmaten op $\mathbb{R}$ is, met corresponderende karakteristieke functies φ_n, en stel dat er een functie φ bestaat die continu is in 0 z.d.d. $\varphi_n(v) \to \varphi(v)$ als $n \to \infty$ voor alle $v \in \mathbb{R}$. Dan geldt $\varphi(0)$=1, want $\varphi_n(0) = 1$. Vanwege continuïteit van φ in het punt 0, volgt dat $\Re(\varphi)$ continu is in 0. Merk op dat $\Re(\varphi(0)) = 1$. Nu geldt:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : |v-0| < \delta \Rightarrow |\Re(\varphi(v)) - \Re(\varphi(0))| < \varepsilon$$

ofwel $|1 - \Re(\varphi(v))| < \varepsilon$ als $|v| < \delta$.
Neem nu $b > \frac{1}{\delta}$, dus $\frac{1}{b} < \delta$ dan geldt:

$$\begin{aligned} b\int_0^{\frac{1}{b}} [1 - \Re(\varphi(v))]dv &< b\int_0^{\frac{1}{b}} \varepsilon dv \\ &= b \times \frac{1}{b} \times \varepsilon \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Omdat $1 - \Re(\varphi_n(v)) \to 1 - \Re(\varphi(v))$ als $n \to \infty$ en

$$\begin{aligned} |1 - \Re(\varphi_n(v))| &\leq 1 + |\Re(\varphi_n(v))| \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

volgt uit het algemene deel van de Begrensde Convergentie Stelling dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{b}} [1 - \Re(\varphi_n(v))]dv = \int_0^{\frac{1}{b}} [1 - \Re(\varphi(v))]dv$$

dus volgt dat

$$b\int_0^{\frac{1}{b}} [1 - \Re(\varphi_n(v))]dv < \epsilon$$

voor alle $n > N$, met $N \in \mathbb{N}$.

Hiermee hebben we dus voorwaarde (ii) van Stelling 2.6 geverifiëerd, waaruit volgt dat de rij $\mathcal{Q}$ relatief rijcompact is. Dus i.h.b bevat de rij een convergente deelrij. Uit het deel 1 van het bewijs van deze stelling, volgt dat de karakteristieke functie van de limiet van elke convergente deelrij van $\mathcal{Q}$ gelijk aan φ moet zijn. Dus alle convergente deelrijen hebben dezelfde limiet, namelijk de verdeling Q waarvan de karakteristieke functie φ is. Uit Stelling 2.7 volgt nu dat $Q_n \to Q$ als $n \to \infty$. □

2. Convergentie in verdeling

Met al het voorgaande hebben we genoeg gereedschap om te kijken of ons model in distributie convergeert. Dit laten we zien door middel van de volgende stelling, die we in dit deel gaan bewijzen:

Stelling 2.8. *Zij* $Y_N = \sum_{i=1}^{nN} ln(1 + \frac{r}{N} + Z_i)^2$ *(met* $Z_i \sim N(0, \frac{\sigma^2}{N})$*) en zij* $V \sim N(n(2r - \sigma^2), (4\sigma^2)n)$*. Dan geldt* $Y_N \xrightarrow{D} V$ *als* $N \to \infty$*.*

Merk nogmaals op dat de convergentie niet afhankelijk is van de 'kleine n'(dus het gewenste tijdstip), maar afhankelijk is van de grootte van de discrete tijdsintervallen. Wat er dus in wezen staat is dat de natuurlijke logaritme van ons model naar een normale verdeling convergeert naarmate de discrete tijdsintervallen kleiner worden, ofwel wanneer het model een meer 'continue vorm' aanneemt. Dit komt natuurlijk erg mooi uit, vanwege de overeenstemming met de continuïteit van het black scholes model. Merk op dat we hiermee geen beperking opleggen voor het toepassen van de continuiteïts stelling voor karakteristieke functies als voorheen geformuleerd.

Voor de karakteristieke functies van ons model geldt:

$$\begin{aligned} \varphi(Y_N) := E(e^{itY_N}) &= E(e^{it\sum_{i=1}^{nN} ln(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2}) \\ &= E(\prod_{i=1}^{nN} e^{itln(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2}) \text{ (deze gelijkheid volgt uit de onafhankelijkheid van de } Z_i\text{'s)} \\ &= (E(e^{itln(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2}))^{nN} \qquad (13) \end{aligned}$$

En voor de karakteristieke functie van $V \sim N(n(2r-\sigma^2), n(4\sigma^2))$ geldt:

$$\varphi_V(t) = E(e^{itV}) = (e^{it(2r-\sigma^2)-2t^2\sigma^2})^n \tag{14}$$

Uit Stelling 2.2 volgt dat als de karakteristieke functies van Y_N naar de karakteristieke functie van V convergeren, dat Stelling 2.8 waar is. Dus om Stelling 2.8 te bewijzen hoeven wij alleen de volgende relatie aan te tonen:

$$\lim_{N\to\infty} \varphi(Y_N) = \varphi_V(t) \tag{15}$$

Uit (13) en (14) volgt dat we (15) kunnen schrijven als:

$$\lim_{N\to\infty} (E(e^{itln(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2}))^{nN} = (e^{it(2r-\sigma^2)-2t^2\sigma^2})^n$$

ofwel

$$\lim_{N\to\infty} (E(e^{itln(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2}))^{N} = e^{it(2r-\sigma^2)-2t^2\sigma^2} \tag{16}$$

Uit de relatie $\lim_{N\to\infty}(1+\frac{x}{N}+O(\frac{1}{N^2}))^N = e^x$ volgt nu dat:

$$\lim_{N\to\infty} (1 + it\frac{2r-\sigma^2}{N} - 2t^2\frac{\sigma^2}{N} + O(\frac{1}{N^2}))^N = e^{it(2r-\sigma^2)-2t^2\sigma^2} \tag{17}$$

Met behulp van (16) en (17) zien we dat de te bewijzen relatie (15) neerkomt op de volgende stelling:

Stelling 2.9. *Er bestaat een constante $C > 0$ zodat*

$$|E(e^{itln(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2} - (1 + it\frac{2r-\sigma^2}{N} - 2t^2\frac{\sigma^2}{N}))| \leq \frac{C}{N^2} \tag{18}$$

voor alle $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Voordat we aan het bewijs van deze stelling gaan beginnen, leiden we eerst een ongelijkheid af. Bekijk hiervoor:

$$f(x) = e^{itln(x^2)} = x^{2it} \tag{19}$$

met $x = (1 + \frac{r}{N} + Z_k)$. We bekijken hier alleen het deel van de kansruimte waar $x > 0$. Als we nu f, zoals gedefinieerd in (19), met een taylorreeks benaderen rond $x = 1$ vinden we:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2itx^{2it-1} \\
f'''(x) &= 2it(2it-1)x^{2(it-1)} \\
|f'''(x) &= |2it(2it-1)(2it-2)x^{2it-3}| \\
&\leq |2it(2it-1)(2it-2)||x^{2it-3}| \\
&= |2it(2it-1)(2it-2)||e^{ln(x^{2it})}e^{ln(x^{-3}}|) \\
&\leq |2it(2it-1)(2it-2)||e^{ln(x^{2it})}||e^{ln(x^{-3}}| \\
&= |2it(2it-1)(2it-2)||x^{-3}| \\
&= D|x^{-3}|
\end{aligned}$$

met $D = |2it(2it-1)(2it-2)|$
Dus er geldt:

$$|f'''(x)| \leq D|x^{-3}| \tag{20}$$

Dus de Taylor benadering van (19) rond 1 geeft:

$$f(x) = 1 + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(\zeta)(x-1)^3 \tag{21}$$

met ζ tussen 1 en $x \geq 0$.
Nu volgt uit (20) en (21) :

$$f(x) - (1 + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2) = \frac{1}{6}f'''(\zeta)(x-1)^3$$
$$\leq \frac{D}{6}|x-1|^3 \frac{D}{|\zeta|^3} \leq \begin{cases} \frac{D}{6}|x-1|^3 & \text{als } x \geq 1 \\ \frac{D}{6}|x-1|^3 \frac{1}{|x|^3} & \text{als } x < 1 \end{cases}$$

ofwel

$$|f(x) - (1 + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2| \leq \frac{D}{6}|x-1|^3(1 + \frac{1}{|x|^3}) \tag{22}$$

Wanneer we nu in (22) f zoals gedefinieerd in (19) invullen (natuurlijk met $x = 1 + \frac{r}{N} + Z_k > 0$), dan krijgen we:

$$|e^{itln[(1+\frac{r}{N}+Z_k)^2]} - (1 + 2it(\frac{r}{N}+Z_k) + it(2it-1)(\frac{r}{N}+Z_k)^2)| \leq \frac{D}{6}|\frac{r}{N}+Z_k|^3(\frac{1}{|1+\frac{r}{N}+Z_k|^3}+1) \tag{23}$$

Nu we deze ongelijkheid hebben afgeleid, kunnen we verder naar het bewijs van Stelling 2.9 toe werken. Merk op dat er in ongelijkheid (23) bij $(\frac{1}{|1+\frac{r}{N}+Z_k|^3}+1)$ geldt dat deze niet goedgedefinieerd is omdat de noemer gelijk aan nul kan zijn. Om Stelling 2.9 te bewijzen, wilden we eigenlijk ongelijkheid (23) gebruiken (zoals we straks zullen zien), maar omdat deze niet overal goedgedefinieerd is zullen we het bewijs van de stelling in tweeën splitsen. Namelijk een deel waarvoor geldt $1 + \frac{r}{N} + Z_k < \delta$ en een ander deel waarvoor geldt $1 + \frac{r}{N} + Z_k > \delta$ met $\delta > 0$. Bij het deel met $1 + \frac{r}{N} + Z_k > \delta$ kunnen we de ongelijkheid toepassen en bij het andere deel maken we gebruik van de eigenschap $1 + \frac{r}{N} + Z_k < \delta$. We beginnen met het geval waar ongelijkheid (23) aan bod komt. Allereerst merken we op dat:

$$E(1 + 2it(\frac{r}{N}+Z_k) + it(2it-1)(\frac{r}{N}+Z_k)^2) = 1 + 2itE(\frac{r}{N}+Z_k) + it(2it-1)E((\frac{r}{N}+Z_k)^2)$$
$$= 1 + it(\frac{2r-\sigma^2}{N}) - 2t^2\frac{\sigma^2}{N} + it(2it-1)\frac{r^2}{N^2} \tag{24}$$

We formuleren en bewijzen nu het volgende lemma (wat wij gaan gebruiken voor het bewijs van Stelling 2.9) voor $1 + \frac{r}{N} + Z_k > \delta$.

LEMMA 2.10. *Er bestaat een constante $C_1 > 0$ zodat:*

$$|E(e^{itln[(1+\frac{r}{N}+Z_k)^2]} - (1 + it\frac{2r-\sigma^2}{N} - 2t^2\frac{\sigma^2}{N})).1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k>\delta}| \leq \frac{C_1}{N^2} \tag{25}$$

voor alle $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

BEWIJS. (lemma 2.10)
Een bekende relatie voor een stochast X is: $|E(X)| \leq E(|X|)$. Wanneer wij deze ongelijkheid toepassen op de linkerkant van vergelijking (25), dan volgt hieruit:

$$|E((e^{itln[(1+\frac{r}{N}+Z_k)^2]} - (1 + it\frac{2r-\sigma^2}{N} - 2t^2\frac{\sigma^2}{N})).1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k>\delta})|$$
$$\leq E|(e^{itln[(1+\frac{r}{N}+Z_k)^2]} - (1 + it\frac{2r-\sigma^2}{N} - 2t^2\frac{\sigma^2}{N})).1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k>\delta}| \tag{26}$$

Gebruikmakend van ongelijkheid (23) en het feit dat voor twee stochasten X en Y geldt dat $E(X) \leq E(Y)$ als $X \leq Y$, krijgen we voor (26):

$$E|((e^{itln[(1+\frac{r}{N}+Z_k)^2]} - (1 + 2it + (\frac{r}{N}+Z_k) + it(2it-1)(\frac{r}{N}+Z_k)^2))).1_{1+\frac{r}{N}+Z_k>\delta}|$$
$$\leq E((\frac{D}{6}|\frac{r}{N}+Z_k|^3(\frac{1}{|1+\frac{r}{N}+Z_k|^3}+1)).1_{1+\frac{r}{N}+Z_k>\delta}) \tag{27}$$

Met $D = |2it(2it-1)(2it-2)|$ zoals eerder gedefnieerd.
Verder geldt:

$$\frac{D}{6}|\frac{r}{N} + Z_k|^3(\frac{1}{|1+\frac{r}{N}+Z_k|^3}+1).1_{1+\frac{r}{N}+Z_k>\delta} \leq (\frac{D}{6}|\frac{r}{N}+Z_k|^3)(\frac{1}{\delta^3}+1).1_{1+\frac{r}{N}+Z_k>\delta}$$

$$\leq \frac{D}{6}|\frac{r}{N}+Z_k|^3(\frac{1}{\delta^3}+1) \tag{28}$$

want $1_{1+\frac{r}{N}+Z_k>\delta}$ is een indicator functie, dus deze neemt als enige waarden nul of een aan.
Ook geldt dat:

$$E(|\frac{r}{N}+Z_k|^3) = \frac{r^3}{N^3} + \frac{r}{N^2}\sigma^2 + E|Z_k^3|$$

$$\leq \frac{r^3}{N^3} + \frac{r}{N^2}\sigma^2 + \sqrt{15}\frac{\sigma^6}{N^3}$$

$$\leq (r^3 + r\sigma^2 + \sqrt{15})\frac{\sigma^6}{N^3} \tag{29}$$

Een combinatie van de resultaten bij (27), (28) en (29) geeft het gewenste resultaat, namelijk:

$$|E((e^{itln[(1+\frac{r}{N}+Z_k)^2]} - (1 + it\frac{2r-\sigma^2}{N} - 2t^2\frac{\sigma}{N})).1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k>\delta})| \leq (r^3 + r\sigma^2 + \sqrt{15})\frac{\sigma^6}{N^2} + \frac{|it(2it-1)r^2|}{N^2} = \frac{C_1}{N^2}$$

□

Bekijk nu het geval waarvoor geldt: $1 + \frac{r}{N} + Z_k \leq \delta$.

LEMMA 2.11. *Er bestaat een constante $C_1 > 0$ zodat:*

$$|E((e^{itln[(1+\frac{r}{N}+Z_k)^2]} - (1 + it\frac{2r-\sigma^2}{N} - 2t^2\frac{\sigma^2}{N})).1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k<\delta})| \leq \frac{C_2}{N^2} \tag{30}$$

voor alle $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

BEWIJS. Met dezelfde argumentatie als bij de afleiding van vergelijking (26) (althans voor de eerste stap van wat nu volgt, zie bewijs lemma 2.10) volgt er voor vergelijking (30):

$$|E(e^{itln[(1+\frac{r}{N}+Z_k)^2]} - (1 + it\frac{2r-\sigma^2}{N} - 2t^2\frac{\sigma^2}{N})).1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k<\delta}|$$

$$\leq E|(e^{itln[(1+\frac{r}{N}+Z_k)^2]} - (1 + it\frac{2r-\sigma^2}{N} - 2t^2\frac{\sigma^2}{N})).1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k<\delta}|$$

$$\leq E|(e^{itln[(1+\frac{r}{N}+Z_k)^2]}.1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k<\delta})| + E|(1 + it\frac{2r-\sigma^2}{N} - 2t^2\frac{\sigma^2}{N}).1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k<\delta}| \tag{31}$$

Voor de eerste term van (31) geldt nu:

$$E(|e^{itln[(1+\frac{r}{N}+Z_k)^2]}.1_{1+\frac{r}{N}+Z_k<\delta}|) = E(|e^{itln[(1+\frac{r}{N}+Z_k)^2]}|.|1_{1+\frac{r}{N}+Z_k<\delta}|)$$

$$= E|1_{1+\frac{r}{N}+Z_k<\delta}| \text{ (want } |e^{ia}| = 1 \text{ voor alle } a \in \mathbb{R})$$

$$= P(1 + \frac{1}{N} + Z_k < \delta)$$

wanneer we de ongelijkheid van Chebychev hierop toepassen, krijgen we :

$$P(X \geq \delta) = E(1_{X\geq\delta})$$

$$\leq E(\frac{X}{\delta}1_{X\geq\delta})$$

$$\leq \frac{1}{\delta}E|X| \text{ (met } X = 1 + \frac{r}{N} + Z_k) \tag{32}$$

het combineren van (32) en de symmetrie eigenschap van $Z_k \sim N(0, \frac{\sigma^2}{N})$ geeft:

$$\begin{aligned}
P(1+\frac{r}{N}+Z_k<\delta) &= P(1+\frac{r}{N}-Z_k<\delta)\\
&= P(Z_k>1+\frac{r}{N}-\delta)\\
&= P(Z_k^2>(1+\frac{r}{N}-\delta)^2)\\
&\leq \frac{1}{(1-\frac{r}{N}-\delta)^4}E(Z_k^4) \text{ (ook hier is Chebychev's ongelijkheid toegepast)}\\
&= \frac{1}{(1-\frac{r}{N}-\delta)^4}3(\frac{\sigma}{\sqrt{N}})^4\\
&\leq \frac{3\sigma^4}{(1-\delta)^2}.\frac{1}{N^2}=\frac{D_1}{N^2} \qquad (33)
\end{aligned}$$

D_1 is dus een constante.
Voor de tweede term van (31) geldt:

$$\begin{aligned}
E|(1+it\frac{2r-\sigma^2}{N}-2t^2\frac{\sigma^2}{N}).1_{1+\frac{r}{N}+Z_k<\delta)}| &= |(1+it\frac{2r-\sigma^2}{N}-2t^2\frac{\sigma^2}{N})|.E|1_{1+\frac{r}{N}+Z_k<\delta}|\\
&\leq (|1|+|it\frac{2r-\sigma^2}{N}|+|2t^2\frac{\sigma^2}{N}|.E|1_{1+\frac{r}{N}+Z_k<\delta}|\\
&\leq (1+|it(2r-\sigma^2)|+|2t^2\sigma^2|).E|1_{1+\frac{r}{N}+Z_k<\delta}|(\text{want } N\geq 1)\\
&\leq (1+|it(2r-\sigma^2)|+|2t^2\sigma^2|).P(1+\frac{r}{N}+Z_k<\delta)\\
&\leq (1+|it(2r-\sigma^2)|+|2t^2\sigma^2|).\frac{3\sigma^4}{(1-\delta)^2}.\frac{1}{N^2}=\frac{D_2}{N^2} \qquad (34)
\end{aligned}$$

voor de laatste stap zie de afleiding van (33).

Wanneer we nu de resultaten van (31),(32),(33) en (34) combineren krijgen we:

$$|E((e^{itln[(1+\frac{r}{N}+Z_k)^2]}-(1+it\frac{2r-\sigma^2}{N}-2t^2\frac{\sigma^2}{N})).1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k<\delta)}|\leq\frac{D_1+D_2}{N^2}=\frac{C_2}{N^2} \qquad (35)$$

zoals gevraagd. □

Nu de lemma's 2.10 en 2.11 zijn bewezen, kunnen we Stelling 2.9 gaan bewijzen:

Bewijs. (Stelling 2.9) Het toepassen van de lemma's 2.10 en 2.11 op de linkerkant van ongelijkheid (18) en wat omschrijfwerk geeft:

$$\begin{aligned}
&|E(e^{itln(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2}-(1+it\frac{2r-\sigma^2}{N}-2t^2\frac{\sigma^2}{N}))|\\
&=|E((e^{itln(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2}-(1+it\frac{2r-\sigma^2}{N}-2t^2\frac{\sigma^2}{N})).(1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k>\delta}+1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k<\delta}))|\\
&\leq|E((e^{itln(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2}-(1+it\frac{2r-\sigma^2}{N}-2t^2\frac{\sigma^2}{N})).1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k>\delta})\\
&+E((e^{itln(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2}-(1+it\frac{2r-\sigma^2}{N}-2t^2\frac{\sigma^2}{N})).1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k<\delta})|\\
&\leq|E((e^{itln(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2}-(1+it\frac{2r-\sigma^2}{N}-2t^2\frac{\sigma^2}{N})).1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k>\delta})|\\
&+|E((e^{itln(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2}-(1+it\frac{2r-\sigma^2}{N}-2t^2\frac{\sigma^2}{N})).1_{1+\frac{\sigma^2}{N}+Z_k<\delta})|\\
&=\frac{C_1}{N^2}+\frac{C_2}{N^2} \text{ (hier hebben we dus de betreffende lemma's toegepast)}\\
&=\frac{C}{N^2}
\end{aligned}$$

met C een constante. Dus we hebben dat:

$$|E(e^{itln(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2} - (1+it\frac{2r-\sigma^2}{N} - 2t^2\frac{\sigma^2}{N}))| \leq \frac{C}{N^2} \tag{36}$$

voor $N \geq 1$. Waarmee de stelling is bewezen. □

Nu we het bewijs van Stelling 2.9 hebben voltooid, volgt Stelling 2.8 zoals eerder vermeld en hebben we dus aangetoond dat ons model, met de restricties zoals aan het begin van dit hoofdstuk aangegeven, inderdaad in verdeling convergeert naar een normale verdeling. Ofwel het volgt uit stelling 2.8 dat

$$X_{2n} = \prod_{i=1}^{nN}(1+\frac{r}{N}+Z_i)^2 \xrightarrow{D} e^V$$

waar $V \sim N(n(2r-\sigma^2), n(4\sigma^2))$.

HOOFDSTUK 3

Alpha Stabiele Functies

Het discrete model 3 dat in hoofdstuk 1 aan bod is gekomen is alsvolgt:

$$X_i = \prod_{i=1}^{nN} (1 + r + Z_i)^2 \text{ met } Z_i \sim N(0, \frac{\sigma^2}{N}) \tag{37}$$

In het vorig hoofdstuk hebben we gezien dat $\ln(X_i)$ in verdeling naar een normale verdeling convergeert. In dit hoofdstuk gaan we andere restricties op de variabelen (Z_i) leggen en op gelijke wijze het convergentie gedrag van ons discreet model bestuderen.
Als eerste eisen stellen we de volgende, namelijk dat het eerste moment gelijk aan nul moet zijn en het tweede moment alleen eindig hoeft te zijn. Ofwel voor alle i geldt:

$$Z_i \text{ onafhankelijk en indentiek verdeeld en } E(Z_i^2) < \infty \text{ en } E(Z_i) = 0 \tag{38}$$

Verder kiezen we het discrete model in dezelfde vorm als het eerste discrete model dat we in hoofdstuk 1 hebben geïntroduceerd, met een enkele wijziging namelijk:

$$X_n = \prod_{i=1}^{nN} (1 + \frac{r}{N} + \frac{Z_i}{\sqrt{N}}) \text{ met } Z_i \text{ gekozen als in (38)} \tag{39}$$

Nu volgt uit de Centrale Limiet Stelling voor stochastische variabelen (Z_i) zoals gegeven in (38), als $N \longrightarrow \infty$ dan:

$$\sum_i^N \frac{Z_i}{\sqrt{N}} \xrightarrow{D} V \text{ met V normaal verdeeld}$$

Opdezelfde manier als we in het vorige hoofdstuk voor het model X_{2n} hadden bewezen dat deze naar een normale verdeling convergeert, valt te verwachten dat we ook nu weer kunnen aantonen dat voor X_n zoals gedefinieerd in (39) geldt:

$$X_n \xrightarrow{D} e^V \text{ met V normaal verdeeld} \tag{40}$$

Merk wederom op dat de centrale limiet stelling niet rechtstreeks kan worden toegepast, omdat ons model niet van de gevraagde vorm is. Dit blijkt uit het volgende; wanneer we de natuurlijke logaritme van X_n (dus $\ln(X_n)$) nemen, met X_n als in (38), krijgen we $E(\ln(X_i)) = E(\ln(1 + \frac{r}{N} + \frac{Z_i}{\sqrt{N}}))$ voor de verwachtingswaarden en deze zijn niet gelijk aan nul. We zullen (40) verder niet uitwerken of verder beschouwen.

In de financiele wiskunde staat het ter discussie of voor een wiskundig model voor een aandelenpakket, de ruis Z_i wel een eindig tweede moment heeft. Dus of er inderdaad, voor Z_i als in(38), geldt dat $E(Z_i^2) < \infty$. Hierom is het intressant om ons model zodanig op te stellen dat de (Z_i) inderdaad oneindig tweede moment hebben, ofwel dat er voor alle $i > 0$ geldt:

$$Z_i \text{ onafhankelijk en indentiek verdeeld en } E(Z_i^2) = \infty \text{ en } E(Z_i) = 0 \tag{41}$$

Vanwege het feit dat dit model oneindig tweede moment heeft, heeft het geen zin om opdezelfde manier als voorheen te kijken of deze naar een normale verdeling convergeert (dus via wijzigingen in het bewijs van de centrale limiet stelling). Verdelingen met oneindige variantie die we wel gaan beschouwen, zijn *α-stabiele verdelingen*. Voordat we het convergentie gedrag verder gaan bestuderen, introduceren we eerst een stukje theorie over α-stabiele verdelingen.

1. α-stabiele verdelingen in $\mathbb{R}$

α-stabiele verdelingen spelen een grote rol in de natuurlijke veralgemenisering van de normale verdeling. Daarom zijn deze van toepassing bij de beschouwing van ons model.

Voor de beschrijving hiervan introduceren we eerst de volgende notatie

NOTATIE 3.1.

$$U \stackrel{d}{=} V$$

Hiermee geven we aan dat de stochastische variabelen U en V dezelfde verdeling volgen.
Dus met $U \stackrel{d}{=} aV + b$ wordt bedoeld dat de verdelingen van U en V alleen verschillen in locatie en scalaire parameters. Verder geldt in deze sectie dat $X, X_1, X_2, ...$ onderling onafhankelijke variabelen voorstellen met gemeenschappelijke distributie R en dat geldt $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

DEFINITIE 3.2. De verdeling R heet *stabiel* als voor alle n er constanten γ_n, $c_n > 0$ bestaan zodanig dat:

$$S_n \stackrel{d}{=} c_n X + \gamma_n \tag{42}$$

en R niet geconcentreerd is op één punt. R heet strict stabiel wanneer voor alle n geldt $\gamma_n = 0$, dus wanneer het gemiddelde van R gelijk is aan nul.

De volgende stelling zegt iets over de vorm van de normeringsconstanten c_n zoals beschreven in Definitie 3.2:

STELLING 3.3. *De normeringsconstanten zijn van de vorm $c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$, met $0 < \alpha \leq 2$. De constante α heet het karakteristieke exponent van R, ofwel een verdeling R die aan deze voorwaarde voldoet heet een α-stabiele verdeling.*

Bekijk eerst het volgende voorbeeld:

VOORBEELD 3.4. De normale verdeling, met gemiddelde nul, is strikt stabiel met normerings constante $c_n = \sqrt{n}$ ofwel α-stabiel met $\alpha = 2$

Nu gaan we door met het bewijs:

BEWIJS. De symmetrie van de verdeling maakt dit bewijs verrassend eenvoudig. Als R een stabiele verdeling is van de variabelen $X, X_1, X_2...$, dan is de verdeling R' van $X_1 - X_2$ ook stabiel en de normeer constanten c_n van beide verdelingen zijn hetzelfde. Hieruit volgt dat het voldoende is om de bewering voor een symmetrisch stabiele R te bewijzen.
We beginnen met de eenvoudige opmerking dat S_{m+n} de som is van onafhankelijke variabelen S_m en $S_{m+n} - S_m$, die respectievelijk verdeeld zijn als $c_m X$ en $c_n X$. Dus voor symmetrisch stabiele verdelingen geldt:

$$c_{m+n} X \stackrel{d}{=} c_m X_1 + c_n X_2 \tag{43}$$

Op gelijke wijze kan men de som S_{rk} opbreken in r onafhankelijke delen met elk k termen, waaruit volgt dat $c_{rk} = C_r c_k$ voor alle r en k. Voor subscripten van de vorm $n = r^v$ volgt met behulp van inductie dat

$$\text{als } n = r^v \text{ dan geldt } c_n = c_r^v \tag{44}$$

Neem vervolgens $v = m + n$ en merk op dat vanwege de symmetrie van de variabelen in (43) er voor $t > 0$ geldt:

$$P(X > t) \geq \frac{1}{2} P(X_2 > \frac{t c_v}{c_n}) \tag{45}$$

Hieruit volgt dat voor $v > n$ de quotiënten $\frac{c_n}{c_v}$ begrensd blijven, ofwel $\frac{c_n}{c_v} < \infty$.
Voor alle $r \in \mathbb{Z}$ bestaat er een unieke α zodanig dat $c_r = p^{\frac{1}{\alpha}}$. Om te bewijzen dat $c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ geldt, is het voldoende om te laten zien dat als geldt $c_p = p^{\frac{1}{\beta}}$ dan geldt $\beta = \alpha$. Uit (44) volgt nu

$$\text{als } n = r^j \text{ dan geldt } c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$\text{als } v = p^k \text{ dan geldt } c_v = v^{\frac{1}{\beta}}$$

Maar voor alle $v = p^k$ bestaat er een $n = r^j$ zodanig dat $n < v \leq rn$. Dan

$$c_v = v^{\frac{1}{\beta}} \leq (rn)^{\frac{1}{\beta}} = r^{\frac{1}{\beta}} c_n^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Omdat de quotiënten $\frac{c_n}{c_v}$ begrensd blijven, impliceert dit $\beta \leq \alpha$. Wanneer wij de rollen van r en p omdraaien, vinden we op gelijke wijze dat $\beta \geq \alpha$ en dus geldt $\beta = \alpha$.
Om te bewijzen dat $\alpha \leq 2$ merken we op dat de normale verdeling stabiel is met $\alpha = 2$(zie voorgaand voorbeeld). Hiermee reduceert (43) zich tot de optel regel voor varianties van onderling onafhankelijke stochastische variabelen, en het voorgaande impliceert dat elke stabiele verdeling met eindige variantie noodzakelijk correspondeert met $\alpha = 2$. Om ons bewijs te voltooien, is het daarom voldoende te laten zien dat alle stabiele verdelingen met $\alpha > 2$ eindige variantie hebben.
Voor symmetrische verdelingen geldt (42) met $\gamma_n = 0$ en dus kunnen we een t kiezen zodanig dat $P(|S_n| > tc_n) < \frac{1}{4}$ voor alle n. Vanwege symmetrie impliceert dit dat $n[1 - R(tc_n)]$ begrensd blijft. Hieruit volgt dat er een constante M bestaat waarvoor geldt dat $x^\alpha[1 - R(x)] < M$ voor alle $x\,t$. Dus de bijdrage van het interval $2^{k-1} < x \leq 2^k$ aan de integraal voor $E(X^2)$ (de variantie in dit geval) is begrensd door $M2(2 - \alpha)k$ en voor $\alpha > 2$ is dit de hoofdterm van een convergente rij. □

We gaan nu terug naar het discrete model zoals beschreven in (39) en kiezen dan de Z_i's zodanig dat deze voeldoen aan de eisen zoals geoformuleerd in (41) én alpha-stabiel verdeeld zijn voor een zekere $0 < \alpha \leq 2$. Voor $\alpha = 2$ geldt dat de Z_i's een normale verdeling volgen en dus eindige variantie hebben. In dat geval convergeert het discrete model naar een normale verdeling. Merk op dat de schalingsfactor voor de normaal verdeelde Z_i's van het model zoals beschreven in (39) van de vorm $N^{\frac{1}{2}}$ is, ofwel van de vorm $N^{\frac{1}{\alpha}}$ met $\alpha = 2$. Dus analoog hieraan kiezen we voor onze α-stabiel verdeelde Z_i's als schalings factor $\frac{1}{N^{\frac{1}{\alpha}}}$.
Ons model wordt dus:

$$X_n^N = \prod_{i=1}^{nN}(1 + \frac{r}{N} + \frac{Z_i}{N^{\frac{1}{\alpha}})} \text{ met } Z_i \text{ zoals hierboven beschreven(38)} \tag{46}$$

De vraag is of er een stabiele verdeling bestaat waar ons model, zoals hierboven beschreven, in verdeling naar convergeert. In het vorige hoofdstuk hebben we de convergentie in verdeling, met behulp van karakteristieke functies en Stelling 2.1 aangetoond. Deze karakteristieke functies zijn ook in dit geval van toepassing.
We zijn dus op zoek naar een α-stabiel verdeelde U zodanig dat geldt:

$$E(e^{itX_n^N}) \overset{puntsgewijs}{\rightarrow} E(e^{itU}) \text{ als } N \rightarrow \infty \tag{47}$$

met X_n^N zoals beschreven in (**??**).

Zonder bewijs geven we de karakteristieke functie van een stochastische variabele U met α-stabiele verdeling:

$$\varphi(t) = \exp[it\mu - |ct|^\alpha(1 - i\beta sgn(t)\Phi)] \tag{48}$$

met sgn(t) het teken van t(dus plus of min) en $\Phi = \tan(\pi\alpha/2)$

De overblijvende paramters zullen we in het volgend lijstje toelichten:

α: het exponent waarvoor geldt $0 < \alpha \leq 2$

β: dit is een maat voor de stijlheid van de grafiek van de karakteristieke functie. We nemen deze gelijk aan 0.

c: schalings facor voor de spreiding van de verdeling.

μ : dit is het gemiddelde(de Z_i kiezen we met $E(Z_i) = 0$, maar voor μ hoeft dat niet te gelden)

De variantie van een α-stabiele verdeling is oneindig, behalve wanneer $\alpha = 2$, want dat is het geval van de normale verdeling. Dan is de variantie gelijk aan $2c^2$. Met de bovengenoemde eigenschappen geldt in ons geval voor de karakteristieke functie van U:

$$\varphi_U(t) = exp[it\mu - |ct|^\alpha] \tag{49}$$

We hebben nu genoeg gereedschap om na te gaan of relatie (47) inderdaad geldt.

2. convergentie naar een α-stabiele verdeling

We beginnen eerst met het beschouwen van de natuurlijke logaritme van het model zoals beschreven in (46) (voor het gemak kijken we even naar het geval met $n = 1$). We beschouwen het gedeelte van de kansruimte waar $1 + \frac{r}{N} + \frac{Z_k}{N^\alpha} > 0$ geldt. Dit kan later geformaliseerd worden door vermenigvuldigingmet een indicator functie. Dit geeft:

$$\begin{aligned} Y_N &= \ln X^N \\ &= ln \prod_{k=1}^{N} (1 + \frac{r}{N} + \frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \ln(1 + \frac{r}{N} + \frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}}) \end{aligned} \tag{50}$$

We gaan kijken of de karakteristieke functies van het model zoals beschreven in (50) puntsgewijs convergeren naar die van (49). De karakteristieke functies van (50) wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_N}(t) = E(e^{itY_n}) &= E(\prod_{k=1}^{N} (e^{it\ln(1+\frac{r}{N}+\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}}}) \\ &= \prod_{k=1}^{N} E(e^{it\ln(1+\frac{r}{N}+\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}}}) \\ &= (E(e^{it\ln(1+\frac{r}{N}+\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}}}))^N \end{aligned} \tag{51}$$

Bekijk nu de volgende afschattingen:

$$\begin{aligned} E(e^{it\ln(1+\frac{r}{N}+\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}})}) &= E(e^{it(\frac{r}{N}+\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}}-(\frac{r}{N}+\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}})^2+\ldots)}) \\ &= E(e^{it\frac{r}{N}}e^{it(\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}}-\frac{1}{N^2}(r+\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}-1}})+\ldots)}) \end{aligned} \tag{52}$$

Een schatting, die wij hebben gemaakt en die heeft geleid tot veel nieuwe resultaten voor het aantonen van de convergentie van karakteristieke functies als in (51), is dat (52) mogelijk gelijk is aan:

$$e^{it\frac{r}{N}}E(e^{it\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}}}) \tag{53}$$

waarbij $\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}}$ α-stabiel verdeeld is en er dus geldt dat (53) gelijk is aan

$$e^{it\frac{r}{N}}(e^{-b|\frac{t}{N^{\frac{1}{\alpha}}}|^\alpha}) = e^{it\frac{r}{N}-\frac{bt^\alpha}{N}} \tag{54}$$

met $p > 1$.
Wanneer we (52) tot de N-de macht verheffen, krijgen we voor $N \to \infty$:

$$(e^{it\frac{r}{N} - \frac{bt^\alpha}{N}} + O(\frac{1}{N^p}))^N = e^{itr - bt^\alpha} \tag{55}$$

waar e^{itr-bt^α} de karakteristieke functie is van een α-stabiele verdeling (zie vergelijking (49)) .
Uit (55) volgt nu:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) &= \lim_{N\to\infty} E(e^{it\ln(1+\frac{r}{N}+\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}})}) \\ &= e^{itr-bt^\alpha}\end{aligned} \tag{56}$$

Hiermee zou hetgeen wat we willen aantonen in deze paragraaf zijn aangetoond. Het enige wat wij dus nog zouden moeten verifiëren is de volgende gelijkheid:

$$E(e^{it\frac{r}{N}} e^{it(\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}} - \frac{1}{N^2}(r + \frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}-1}}) + \ldots)}) \stackrel{?}{=} e^{it\frac{1}{N}} E(e^{it\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}}}) + O(\frac{1}{N^p}) \tag{57}$$

met $p > 1$.
Het is niet gelukt om (57) aan te tonen. We moeten (57) verifiëren voor de geldigheid van relatie (56). Omdat dit niet is gelukt, gaan we gelijkheid (56) direct proberen aan te tonen. Dit komt neer op het aantonen van de volgende relatie:

$$E(e^{it(ln(1+\frac{1}{N}+\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}})}) = e^{it\frac{r}{N} - \frac{bt^\alpha}{N}} + O(\frac{1}{N^p}) \tag{58}$$

met $p > 1$.
We pakken dit als volgt aan:
Laat f de dichtheidsfunctie zijn van de stochastische variabelen (Z_k). Dan geldt:

$$\begin{aligned} E(e^{it(ln(1+\frac{1}{N}+\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}})}) &= \int_{\mathbb{R}} e^{it(ln(1+\frac{1}{N}+\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}})} f(Z_k) dZ_k \\ \text{subtitueer } x = \frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}} &\text{ en } dZ_k = N^{\frac{1}{\alpha}} dx, \text{ dit geeft:} \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{it(ln(1+\frac{1}{N}+x)} f(N^{\frac{1}{\alpha}}) N^{\frac{1}{\alpha}} dx \end{aligned} \tag{59}$$

We splitsen de integraal van (59) nu in verschillende delen, namelijk de volgende:

$$(\int_\delta^\delta + \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_\delta^\infty) e^{it(ln(1+\frac{1}{N}+\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}})} f(N^{\frac{1}{\alpha}}) N^{\frac{1}{\alpha}} dx \tag{60}$$

met $\delta \in (0, 1)$. De motivatie voor deze splitsing, is te vinden bij het bewijs van stelling 2.9 uit het vorige hoofdstuk.
Vanwege de gelijkheid:

$$e^{(it\frac{r}{N} - \frac{bt^\alpha}{N})} = e^{(itr - bt^\alpha)\frac{1}{N}} \tag{61}$$

volgt dat als we (58) willen aan tonen, het voldoende is om te bewijzen dat

$$E(e^{it\ln(1+\frac{1}{N}+\frac{Z_k}{N^{\frac{1}{\alpha}}})}) = 1 + \frac{itr}{N} - \frac{bt^\alpha}{N} + O(\frac{1}{N^p}) \tag{62}$$

met $p > 1$ geldt.
Merk op dat (62) net als (60) drie termen bevat. Toen wij de eerste term van (60) gingen uitrekenen, leek het erop dat deze overeenkwam met de tweede term van (62) op een term $O(\frac{1}{N^2})$ na. Toen we dit nader zijn gaan bekijken, bleek dit echter niet te kloppen. Ook verdere termen van (60) kwamen niet overeen met wat er aan de rechterkant van (62) staat. Hiermee viel ons vermoeden (dus hetgeen wat wij in deze paragraaf wilden aantonen) in duigen.

Korte Nawoord

We zijn aangekomen bij het nawoord en tevens aan het einde van dit Bachelor Project. Het is ons dus niet gelukt om een discreet model te contrueren wat naar een α-stabiele verdeling convergeert. Het is echter wel gelukt om aan te tonen dat er een discreet model bestaat wat naar een normale verdeling convergeert. Van hetgeen wat niet gelukt is om te bewijzen hebben we geen tegenvoorbeelden, bewijzen of argumentaties om volledig(in de wiskundige zin) aan te geven waarom het niet is gelukt gegeven. Tijdens het onderzoek zelf is echter wel gebleken dat hetgeen waarvan wij in het verslag magertjes hebben aangegeven dat ze niet waar zijn, ook echt niet waar zijn. Het leek ons verder niet nodig om dit allemaal uitgebreid in het verslag weer te geven. Dit zou teveel ruimte hebben gekost, omdat we het dan wiskundig allemaal met veel rekenwerk volledig zouden moeten maken. Tevens verwachtten we niet dat het tot nieuwe inzichten of resultaten zou leiden. Voor het laatste deel sluiten we convergentie naar een α-stabiele verdeling van het betreffende discrete model niet uit. Mogelijk moeten de karakteristieke functie van de α-stabiel verdeelde stochasten anders opgeschreven worden of moeten we een kleine wijziging aanbrengen in ons discrete model. Of misschien kunnen we inspiratie vinden uit een soort van algemene Centrale Limiet Stelling, voor α stabiele verdelingen in plaats van normale verdelingen. Er was echter geen tijd meer om hieraan te werken.

Bibliografie

[1] Bert Fristedt (with Lawtence Gray) (1937). *A Modern Approach to Probability Theory.* Birkhäuser.
[2] B.V Gnedenko and A.N Komogorov (1954). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables.* Addison-Wesley.
[3] A.N Shiryaev (1989). *Probability*(second edition). Springer.
[4] William Feller (1950). *An Introduction to Probability Theory and Its Applictions, Volume 1.* Wiley.
[5] Xuerong Mao (1997). *Stochastic Differential Equations & Applications.* Horwood Publishing Chichester.
[6] John A.Rice (2007). *Mathematical Statistics and Data Analysis*(third edition). Thomson, Books/Cole.