**Joris Pries**

# Optimale strategie in een rood-zwart casino

**Bachelor scriptie**

**Begeleidster: Dr. F. M. Spieksma**

**Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden**

26 juli 2016

# Inhoudsopgave

# 1 Inleiding

Jan heeft grote problemen om financieel rond te komen. Hij heeft twee baantjes, werkt meer dan 60 uur per week, maar alsnog heeft hij te weinig geld om zijn schuld, huur, gas, water en elektriciteit te betalen. Morgen moet Jan 600 euro hebben om alles te betalen, maar hij heeft slechts 400 euro. Hij heeft dus nog een tekort van 200 euro. Dit is een groot probleem voor Jan. In een wanhoopspoging besluit hij de 400 euro in te gaan zetten in het casino om de 200 euro bij elkaar te winnen. Hij gaat naar een roulette tafel en besluit om steeds op rood in te zetten. Er zijn 37 vakjes, waarvan er 18 rood zijn, dus Jan wint met kans $\frac{18}{37}$. Jan wil de kans, dat hij uiteindelijk 600 euro bij elkaar heeft, natuurlijk maximaliseren. Hij besluit om 200 euro in te zetten. Is dit een slimme beslissing van Jan? Wat is de kans dat Jan uiteindelijk 600 euro heeft?

We kunnen het probleem ook algemener maken. Stel een persoon moet, om welke reden dan ook, een bedrag $N \in \mathbb{R}$ hebben aan het einde van de dag. Hij heeft op dit moment slechts een kapitaal $n < N$. Hij besluit om het gewenste kapitaal $N$ te verkrijgen door te gaan gokken. Hij gaat naar het casino en kiest een spel waarbij hij zijn inzet verdubbelt met kans $p \in (0, 1)$ en zijn inzet verliest met kans $1 - p$. Hij blijft het spel spelen, totdat hij het bedrag $N$ heeft of blut is. Dit laatste scenario wil hij natuurlijk voorkomen. De gokker heeft een heleboel vragen, die we in deze scriptie zullen behandelen. *Hoeveel geld moet hij telkens inzetten? Wat is een slimme strategie? Wat is de kans dat hij wint?* Dit zijn allemaal vragen die aan bod komen. Verder zal er ook gekeken worden naar gokken met een *vaste inzet* en wat voor invloed een *huislimiet* heeft op de beste strategie.

De belangrijke stellingen, die we in deze scriptie zullen bewijzen, zijn al bekend in de literatuur. Helaas waren de bewijzen vaak kort door de bocht en werden er belangrijke dingen weggelaten. Zo werden er vaak claims gemaakt zonder bewijs. Deze scriptie is geschreven om de bewijsvoering beter te onderbouwen. Hopelijk zorgt dit voor meer overzicht en duidelijkheid bij de lezer.

# 2 Uitleg wiskundig model

We zullen het probleem vertalen naar een wiskundig model, zodat we de bovengenoemde vragen kunnen beantwoorden. Het model dat we gebruiken is een stationair deterministisch Markov beslissingsproces, zie [1, p. 179]. De beschrijving is als volgt:

- De gokker begint met een bedrag $f \in \mathbb{R}$ en stopt als hij een **stopbedrag** $N \in \mathbb{R}$ heeft.
- $S$ is de **toestandsruimte**, dit zijn de mogelijke bedragen die de gokker kan hebben. Deze toestandsruimte kan discreet of continu zijn.
- Een **toestand** is een element uit $S$.

De gokker kan in een toestand een bepaald bedrag inzetten.

- $A(f) = \{a \mid 0 \leq a \leq f \wedge f \pm a \in S\}$ is de **actieverzameling** behorend bij toestand $f \in S$. Merk op dat voor alle $f \in S$ en voor alle $a \in A(f)$ geldt dat $0 \leq a \leq \min\{f, N - f\}$. Merk op dat $A(0) = A(N) = \{0\}$. $A(f)$ is dus de verzameling van alle mogelijke inzetten in toestand $f$.

Stel dat de gokker zich in toestand $f \in S$ bevindt. Met kans $p \in (0, 1)$ verdubbelt hij zijn inzet, en met kans $1 - p$ verliest hij zijn inzet.

- Het casino heet een **rood-zwart casino**, vanwege de volgende eigenschap: de gokker heeft **kans** $p \in (0, 1)$ om te winnen en kans $1 - p$ om te verliezen. Hij verdubbelt zijn inzet als hij wint, en hij is zijn inzet kwijt als hij verliest. Denk hierbij bijvoorbeeld aan een roulette tafel, waarbij de gokker op rood of zwart inzet.

Voortaan, als we het hebben over een casino, dan bedoelen we een rood-zwart casino. $p = 0$ of $p = 1$ geeft triviale resultaten en die laten we voor het gemak buiten beschouwing. De gokker blijft gokken totdat hij het stopbedrag $N$ heeft of geen geld meer heeft om te gokken. Hij moet namelijk per se het bedrag $N$ bereiken. Als hij geen geld meer heeft, kan hij niet meer gokken.

Het kansmechanisme is als volgt:

* De **overgangskans** $p_{ij}(a)$, met $i, j \in S \setminus \{0, N\}$ en $a \in A(f)$, is gelijk aan

$$p_{ij}(a) = \begin{cases} p, & \text{als } j = i + a \\ 1 - p, & \text{als } j = i - a \\ 0, & \text{andere gevallen.} \end{cases}$$

  Verder geldt $p_{N0}(0) = p_{00}(0) = 1$ en $p_{Nj}(0) = p_{0j}(0) = 0$ voor alle $j \neq 0$.

Omdat we het willen modelleren als een Markov beslissingsproces, moeten we ook de directe opbrengst definiëren.

* De **directe opbrengst** $r(f, a)$ is de opbrengst van een actie $a \in A(f)$ gekozen in een toestand $f$. We definiëren $r(f, a) \equiv 0$ als $f \in S \setminus \{N\}$ en $r(N, 0) \equiv 1$.

Hierdoor komt de totaal verwachte opbrengst overeen met de kans om toestand $N$ te bereiken, zie [1, p. 185].

We zullen kijken naar verschillende *strategieën* voor de gokker. Een strategie legt voor elke toestand vast hoeveel geld de gokker moet inzetten in die situatie.

* $s$ heet een **strategie** als voor alle $f \in S$ geldt dat $s(f) \in A(f)$.

Een eenvoudige strategie is om steeds een vast bedrag in te zetten.

* Zij $t_b$ de strategie behorend bij **vast inzetten** met bedrag $b \in \mathbb{R}_{>0}$. Dit wil zeggen dat voor alle $f \in S$ geldt $t_b(f) = \min\{f, N - f, b\}$.

Bij elke strategie $s$ hoort een *waardefunctie* $Q$. Deze functie legt voor elke toestand vast wat de kans is om het stopbedrag te bereiken met strategie $s$.

* Een **waardefunctie** $Q : S \to [0, 1]$ is zodanig dat $Q(f)$ de kans is dat het stopbedrag wordt bereikt met beginbedrag $f$ spelend met strategie $s$.

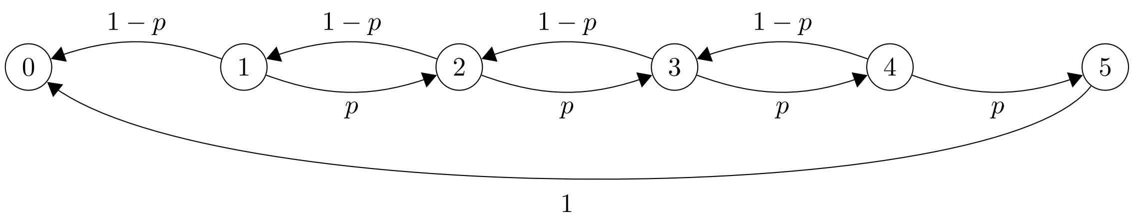
# 3 Vaste inzet

In dit hoofdstuk berekenen we de kans om van een toestand $f$ naar een stopbedrag $N$ te komen, waarbij we als strategie steeds vast inzetten met bedrag $b$, oftewel we spelen de strategie $t_b$. Zij $S = \{0, 1, \cdots, N\}$. We zullen eerst kijken naar strategie $t_1$, $t_2$ en vervolgens $t_b$ met $b \in \mathbb{N}_{>2}$. We zullen zien dat de kansen steeds te bepalen zijn, maar dat de berekeningen steeds gecompliceerder worden.

Zij $g_b : S \times N \to [0, 1]$ zodanig dat voor alle $n \in S$ geldt dat $g_b(n, N)$ de kans is dat het gewenste stopbedrag $N$ met beginkapitaal $n$ wordt bereikt met als strategie $t_b$. Merk op dat $g_b(0, 0) = 0$ en $g_b(N, N) = 1$.

## 3.1 Klein voorbeeld met $b = 1$

Om eerst een beter beeld te krijgen, beschouwen we het probleem met $N = 5$ en vaste inzet $b = 1$. De bijbehorende Markovketen is gegeven in Figuur 1.




Figuur 1: Markovketen voor $N = 5$ en $b = 1$.

Een eerste-stapsanalyse levert het volgende stelsel

$$\begin{aligned}
&g_1(0,5) = 0 \\
&g_1(1,5) = p \cdot g_1(2,5) + (1-p) \cdot g_1(0,5) = p \cdot g_1(2,5) \\
&g_1(2,5) = p \cdot g_1(3,5) + (1-p) \cdot g_1(1,5) \\
&g_1(3,5) = p \cdot g_1(4,5) + (1-p) \cdot g_1(2,5) \\
&g_1(4,5) = p \cdot g_1(5,5) + (1-p) \cdot g_1(3,5) = p + (1-p) \cdot g_1(3,5) \\
&g_1(5,5) = 1.
\end{aligned}$$

Combineren geeft

$$\begin{aligned}
g_1(2,5) &= p \cdot g_1(3,5) + (1-p) \cdot p \cdot g_1(2,5) \\
\rightsquigarrow g_1(3,5) &= \frac{1-(1-p)\cdot p}{p} \cdot g_1(2,5), \qquad (1)
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
&g_1(3,5) = p \cdot g_1(4,5) + (1-p) \cdot g_1(2,5) = p^2 + (1-p) \cdot p \cdot g_1(3,5) + (1-p) \cdot g_1(2,5) \\
&\rightsquigarrow (1-(1-p)\cdot p) \cdot g_1(3,5) = p^2 + (1-p) \cdot g_1(2,5). \qquad (2)
\end{aligned}$$

(1) en (2) combineren geeft

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-(1-p)\cdot p)^2}{p} \cdot g_1(2,5) = p^2 + (1-p) \cdot g_1(2,5) \\
&\rightsquigarrow \frac{(1-(1-p)\cdot p)^2 - (1-p)\cdot p}{p} \cdot g_1(2,5) = p^2 \\
&\rightsquigarrow \frac{p^4 - 2p^3 + 3p^2 - 2p + 1 - p + p^2}{p} \cdot g_1(2,5) = p^2 \\
&\rightsquigarrow \frac{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1}{p} \cdot g_1(2,5) = p^2 \\
&\rightsquigarrow g_1(2,5) = \frac{p^3}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1}.
\end{aligned}$$

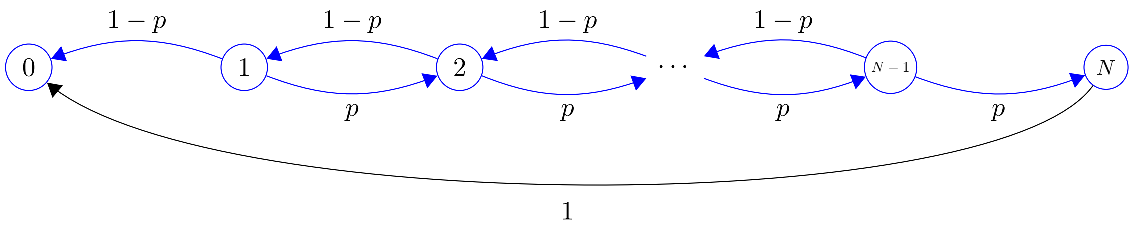
Hieruit volgt

$$\boxed{\begin{aligned}
&g_1(0,5) = 0 \\
&g_1(1,5) = \frac{p^4}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1} \\
&g_1(2,5) = \frac{p^3}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1} \\
&g_1(3,5) = \frac{p^2 \cdot (1 - p + p^2)}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1} \\
&g_1(4,5) = \frac{p \cdot (2p^2 - 2p + 1)}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1} \\
&g_1(5,5) = 1.
\end{aligned}}$$

Hiermee hebben we de kansen bepaald.

## 3.2 Algemene formule voor $b = 1$

In § 3.1 is $N$ nog redelijk klein, maar het is al best wat werk om de kansen te berekenen. Voor grotere waarde van $N$ wordt dit ondoenlijk. Daarom zullen we het nu anders aanpakken met behulp van een idee uit [2]. Zij $N \in \mathbb{N}_{>0}$ willekeurig gegeven en zij $w_i := g_1(i, N)$ voor alle $i \in S$. De bijbehorende Markovketen is gegeven in Figuur 2.




Figuur 2: Markovketen voor algemene $N$ en $b = 1$.

We krijgen nu weer een stelsel van vergelijkingen zoals in § 3.1. We representeren dit stelsel echter op een andere manier:

$$\boxed{\begin{aligned} w_0 &= 0 \\ w_1 &= p \cdot w_2 + (1-p) \cdot w_0 \\ w_2 &= p \cdot w_3 + (1-p) \cdot w_1 \\ &\vdots \\ w_{N-2} &= p \cdot w_{N-1} + (1-p) \cdot w_{N-3} \\ w_{N-1} &= p \cdot w_N + (1-p) \cdot w_{N-2} \\ w_N &= 1. \end{aligned}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} w_0 &= 0 \\ w_1 &= \cdots \\ w_2 &= \frac{1}{p} \cdot w_1 - \frac{1-p}{p} \cdot w_0 \\ w_3 &= \frac{1}{p} \cdot w_2 - \frac{1-p}{p} \cdot w_1 \\ &\vdots \\ w_{N-1} &= \frac{1}{p} \cdot w_{N-2} - \frac{1-p}{p} \cdot w_{N-3} \\ w_N &= \frac{1}{p} \cdot w_{N-1} - \frac{1-p}{p} \cdot w_{N-2} \\ w_N &= 1. \end{aligned}}$$

Merk op dat dit een homogene lineaire tweede orde recurrente betrekking is met constante coëfficiënten. Hiervan is de oplossing bekend, zie [3, p. 89]. Er is nog één probleem, namelijk dat $w_1$ onbekend is, maar in plaats daarvan is $w_N$ wel bekend. We zullen daarom het hele stelsel schalen door te delen door $w_1$. Zij $c_i = \dfrac{w_i}{w_1}$ voor alle $i \in S$. Het stelsel wordt dan als volgt

$$\boxed{\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_1 &= 1 \\ c_2 &= \frac{1}{p} \cdot c_1 - \frac{1-p}{p} \cdot c_0 \\ c_3 &= \frac{1}{p} \cdot c_2 - \frac{1-p}{p} \cdot c_1 \\ &\vdots \\ c_{N-1} &= \frac{1}{p} \cdot c_{N-2} - \frac{1-p}{p} \cdot c_{N-3} \\ c_N &= \frac{1}{p} \cdot c_{N-1} - \frac{1-p}{p} \cdot c_{N-2} \\ c_N &= \frac{1}{w_1}. \end{aligned}}$$

De recurrente betrekking is nu als volgt

$$\begin{cases} c_i = \frac{1}{p} \cdot c_{i-1} - \frac{1-p}{p} \cdot c_{i-2}, & \text{voor } i \in \mathbb{N}_{\geq 2} \\ c_0 = 0,\ c_1 = 1. \end{cases}$$

De bijbehorende karakteristieke vergelijking is

$$x^2 - \frac{1}{p} \cdot x + \frac{1-p}{p}.$$

Merk op dat per aanname $p \neq 0$.

De karakteristieke vergelijking gelijkstellen aan 0 geeft

$$x = 1 \vee x = \frac{1-p}{p}.$$

Met behulp van [3, p. 89-90] volgt dat er twee mogelijkheden zijn.

* Als $p \neq \frac{1}{2}$, dan volgt voor alle $n \in S$ dat

  $$c_n = K_1 \cdot 1^n + K_2 \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^n,$$

  waarbij

  $$K_1 = \frac{1 - \frac{1-p}{p} \cdot 0}{1 - \frac{1-p}{p}} = \frac{1}{\frac{2p-1}{p}} = \frac{p}{2p-1}$$
  $$K_2 = \frac{1 \cdot 0 - 1}{1 - \frac{1-p}{p}} = \frac{-1}{\frac{2p-1}{p}} = \frac{-p}{2p-1}.$$

  Dus geldt

  $$c_n = \frac{p}{2p-1} - \frac{p}{2p-1} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^n = \frac{p}{2p-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n\right). \tag{3}$$

* Als $p = \frac{1}{2}$, dan geldt voor alle $n \in S$ dat

  $$c_n = (K_1 + n \cdot K_2) \cdot 1^n = K_1 + n \cdot K_2.$$

  Merk op dat $0 = c_0 = K_1$ en $1 = c_1 = K_1 + K_2 = 0 + K_2 = K_2$. Dat wil zeggen dat

  $$c_n = n. \tag{4}$$

(3) en (4) combineren geeft

$$c_n = \begin{cases} \frac{p}{2p-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n\right), & \text{als } p \neq \frac{1}{2} \\ n, & \text{als } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Er geldt per aanname dat $\frac{1}{w_1} = c_N$, dus

$$\frac{1}{w_1} = \begin{cases} \frac{p}{2p-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N\right), & \text{als } p \neq \frac{1}{2} \\ N, & \text{als } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Er geldt voor alle $n \in S$ dat $\frac{w_n}{w_1} = c_n$, oftewel $w_n = w_1 \cdot c_n$. Als $p \neq \frac{1}{2}$, dan geldt

$$\frac{\frac{p}{2p-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n\right)}{\frac{p}{2p-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N\right)} = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}.$$

Hiermee hebben we de volgende stelling bewezen.

**Stelling 1.** *Zij $g_1(n,N)$ de kans dat met strategie $t_1$ stopbedrag $N$ wordt bereikt vanuit een beginkapitaal $n$. Dan geldt*

$$g_1(n,N) = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N}, & \text{als } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{n}{N}, & \text{als } p = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{5}$$

Hiermee hebben we de kansen bepaald voor willekeurige $N$ en $p$ met vaste inzet $b = 1$. Merk op dat

$$\begin{aligned} \lim_{p\to\frac{1}{2}} \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N} &= \lim_{p\to\frac{1}{2}} \frac{\left(\dfrac{-n\cdot\left(\frac{1}{p}-1\right)^n}{(p-1)\cdot p}\right)}{\left(\dfrac{-N\cdot\left(\frac{1}{p}-1\right)^N}{(p-1)\cdot p}\right)} \\ &= \lim_{p\to\frac{1}{2}} \frac{-n\cdot\left(\frac{1}{p}-1\right)^n}{-N\cdot\left(\frac{1}{p}-1\right)^N} \\ &= \frac{n\cdot(2-1)^n}{N\cdot(2-1)^N} \\ &= \frac{n}{N}. \end{aligned}$$

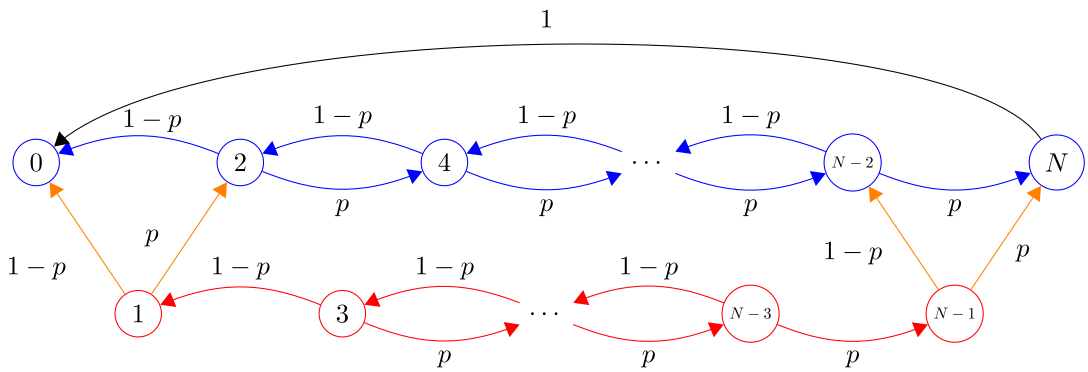
Dus $g_1(n,N)$ is een continue functie van $p$.

## 3.3 Vaste inzet $b = 2$

Als $b = 2$, dan zijn er twee mogelijkheden: $N \equiv 0 \mod 2$ of $N \equiv 1 \mod 2$. De algemene vorm van de bijbehorende Markovketen is gegeven in Figuur 3 respectievelijk Figuur 4.

### 3.3.1 Even stopbedrag

Stel $N \equiv 0 \mod 2$. De bijbehorende Markovketen staat in Figuur 3.




Figuur 3: Markovketen voor $N \equiv 0 \mod 2$ en $b = 2$.

Als de gokker in een even toestand is, blijft hij altijd in even toestanden. Merk verder de overeenkomsten tussen de blauwe ketens in Figuur 2 en Figuur 3 op. Beide blauwe ketens zijn van dezelfde vorm met dezelfde overgangskansen, alleen de toestanden zijn niet gelijk. We kunnen de gevonden algemene formule (5) handig gebruiken om voor alle $i \in S$ de kans $g_2(i, N)$ te bepalen. Als de gokker in toestand $i = 2k$ met $k \in \mathbb{N}$ is, dan geldt

$$g_2(2k, N) = g_1\left(k, \frac{N}{2}\right). \tag{6}$$

Uit een eerste-stapsanalyse volgt dat

$$g_2(1, N) = p \cdot g_2(2, N) = p \cdot g_1\left(1, \frac{N}{2}\right), \tag{7}$$

$$g_2(N-1, N) = p + (1-p) \cdot g_2(N-2, N) = p + (1-p) \cdot g_1\left(\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}\right). \tag{8}$$

Merk op dat voor een toestand $2k+1 \in S$, met $k \in \mathbb{N}$, geldt dat de gokker altijd in toestand 1 of in toestand $N-1$ terecht komt, om vervolgens naar een even toestand te springen. De kans om van toestand $2k+1$ naar toestand $N-1$ te komen, is precies $g_1\left(k, \frac{N}{2} - 1\right)$. Is dit niet het geval, dan kom je terecht in toestand 1. De kans om van toestand $2k+1$ naar toestand 1 te komen is daarom precies $1 - g_1\left(k, \frac{N}{2} - 1\right)$. Hiermee volgt dat

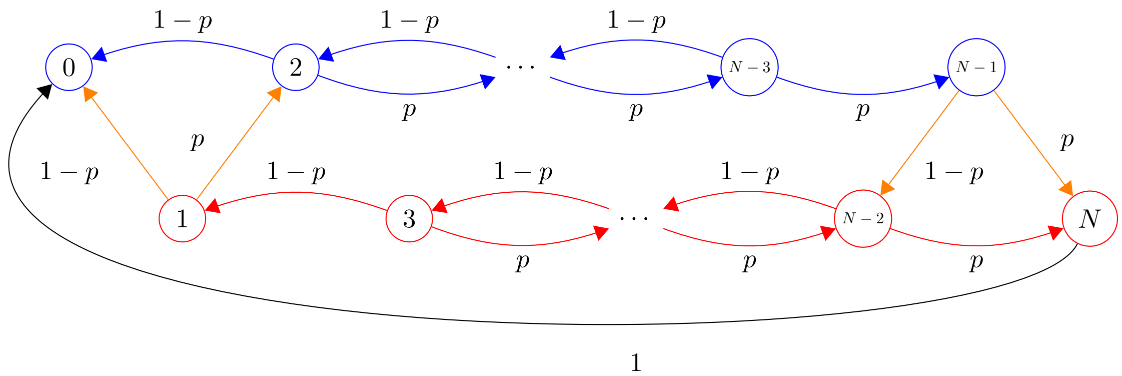
$$\begin{aligned}
g_2(2k+1, N) &= \mathbb{P}(N-1 \text{ wordt bereikt vanuit } 2k+1) \cdot g_2(N-1, N) \\
&\quad + \mathbb{P}(1 \text{ wordt bereikt vanuit } 2k+1) \cdot g_2(1, N) \\
&= g_1\left(k, \frac{N}{2} - 1\right) \cdot g_2(N-1, N) + \left(1 - g_1\left(k, \frac{N}{2} - 1\right)\right) \cdot g_2(1, N) \\
&= g_1\left(k, \frac{N}{2} - 1\right) \cdot \left(p + (1-p) \cdot g_1\left(\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}\right)\right) \\
&\quad + \left(1 - g_1\left(k, \frac{N}{2} - 1\right)\right) \cdot p \cdot g_1\left(1, \frac{N}{2}\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Voor $N \equiv 0 \mod 2$ geldt dus voor alle $n \in S$ dat

$$g_2(n, N) = \begin{cases} g_1\left(\frac{n}{2}, \frac{N}{2}\right), & \text{als } n \text{ even} \\ g_1\left(\frac{n-1}{2}, \frac{N}{2} - 1\right) \cdot \left(p + (1-p) \cdot g_1\left(\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}\right)\right) & \\ \quad + \left(1 - g_1\left(\frac{n-1}{2}, \frac{N}{2} - 1\right)\right) \cdot p \cdot g_1\left(1, \frac{N}{2}\right), & \text{als } n \text{ oneven.} \end{cases} \tag{10}$$

### 3.3.2 Oneven stopbedrag

Stel $N \equiv 1 \mod 2$. De bijbehorende Markovketen staat in Figuur 4.




Figuur 4: Markovketen voor $N \equiv 1 \mod 2$ en $b = 2$.

Stel dat de gokker in een even toestand $2k$ is, met $k \in \mathbb{N}$. Merk op dat de gokker dan toestand 0 óf toestand $N-1$ bereikt. We kunnen de gevonden algemene formule (5) weer handig gebruiken. Merk namelijk op dat

$$\begin{aligned} g_2(2k, N) &= \mathbb{P}(N-1 \text{ wordt bereikt vanuit } 2k) \cdot g_2(N-1, N) \\ &\quad + \mathbb{P}(0 \text{ wordt bereikt vanuit } 2k) \cdot g_2(0, N) \\ &= g_1\left(k, \frac{N-1}{2}\right) \cdot g_2(N-1, N) + 0 \\ &= g_1\left(k, \frac{N-1}{2}\right) \cdot (p + (1-p) \cdot g_2(N-2, N)) \,. \end{aligned} \tag{11}$$

Stel dat de gokker in een oneven toestand $2k+1$ is. Merk op dat de gokker dan toestand 1 óf toestand $N$ bereikt. We vinden dus dat

$$\begin{aligned} g_2(2k+1, N) &= \mathbb{P}(N \text{ wordt bereikt vanuit } 2k+1) \cdot g_2(N, N) \\ &\quad + \mathbb{P}(1 \text{ wordt bereikt vanuit } 2k+1) \cdot g_2(1, N) \\ &= g_1\left(k, \frac{N-1}{2}\right) + \left(1 - g_1\left(k, \frac{N-1}{2}\right)\right) \cdot p \cdot g_2(2, N). \end{aligned} \tag{12}$$

(11) en (12) combineren geeft voor een even toestand $2k$

$$\begin{aligned} g_2(2k, N) &= g_1\left(k, \frac{N-1}{2}\right) \cdot (p + (1-p) \cdot g_2(N-2, N)) \\ &= g_1\left(k, \frac{N-1}{2}\right) \cdot \left(p + (1-p) \cdot \left(g_1\left(\frac{N-3}{2}, \frac{N-1}{2}\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \left(1 - g_1\left(\frac{N-3}{2}, \frac{N-1}{2}\right)\right) \cdot p \cdot g_2(2, N)\right)\right) . \end{aligned}$$

Stel $k = 1$, dan volgt

$$\begin{aligned} g_2(2, N) &= g_1\left(1, \frac{N-1}{2}\right) \left(p + (1-p) \cdot \left(g_1\left(\frac{N-3}{2}, \frac{N-1}{2}\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \left(1 - g_1\left(\frac{N-3}{2}, \frac{N-1}{2}\right)\right) \cdot p \cdot g_2(2, N)\right)\right) . \end{aligned}$$

Zij $D := g_1\left(1, \frac{N-1}{2}\right)$ en $E := g_1\left(\frac{N-3}{2}, \frac{N-1}{2}\right)$, dan volgt

$$\begin{aligned} g_2(2,N) &= D \cdot (p + (1-p) \cdot (E + (1-E) \cdot p \cdot g_2(2,N))) \\ &= D \cdot (p + E - p \cdot E + (1 - p - E + p \cdot E) \cdot p \cdot g_2(2,N)) \\ &= p \cdot D + D \cdot E - p \cdot D \cdot E + \big(p \cdot D - p^2 \cdot D - p \cdot D \cdot E + p^2 \cdot D \cdot E\big) \cdot g_2(2,N). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} g_2(2,N) \cdot \big(1 - p \cdot D + p^2 \cdot D + p \cdot D \cdot E - p^2 \cdot D \cdot E\big) &= p \cdot D + D \cdot E - p \cdot D \cdot E \\ \rightsquigarrow g_2(2,N) &= \frac{p \cdot D + D \cdot E - p \cdot D \cdot E}{1 - p \cdot D + p^2 \cdot D + p \cdot D \cdot E - p^2 \cdot D \cdot E}. \end{aligned} \tag{13}$$

Met behulp van (12) en (13) kunnen we $g_2(2k+1, N)$ bepalen voor alle even toestanden $2k+1$. Vervolgens kunnen we ook voor alle oneven toestanden $2k$ de kans $g_2(2k, N)$ bepalen. We weten nu namelijk $g_2(N-2, N)$, want $N-2$ is een oneven toestand. Met (11) kunnen we dan $g_2(2k, N)$ berekenen.

### 3.4 Vaste inzet $b \in \mathbb{N}_{>2}$

Stel $b \in \mathbb{N}_{>2}$. Onze claim is dat op eenzelfde manier als voor $b = 2$ alle kansen kunnen worden berekend, door de gevallen $N \equiv 0 \mod b$, $N \equiv 1 \mod b, \cdots N \equiv b-1 \mod b$ apart te analyseren. Vervolgens kan (5) gebruikt worden om de kansen te bepalen. Dit wordt echter steeds meer werk voor grote $b$ en $N$. Een andere manier om hier naar te kijken is door gebruik te maken van matrices. Dit vergt echter nog verder onderzoek. Het is nog niet gelukt om een algemene formule of een algemeen patroon te vinden voor vast inzetten met bedrag $b \in \mathbb{N}_{>0}$ en stopbedrag $N$.

### 3.5 Vaste inzet $b \in \mathbb{Q}_{>0}$ en $S \subset \mathbb{Q}$

Stel $b = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_{>0}$, met $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ en we staan rationale toestanden toe, dus $S \subset \mathbb{Q}$. Verder is het stopbedrag $N = \frac{d}{e} \in \mathbb{Q}_{>0}$, met $d, e \in \mathbb{N}_{>0}$. We kunnen de kennis van vast inzetten met een natuurlijk getal, natuurlijke toestanden en een natuurlijk stopbedrag gebruiken om de kansen te bepalen door gebruik te maken van een idee uit [2].

Zij $\frac{a}{b} \in S$ met $a, b \in \mathbb{N}$. We willen nu de kans bepalen dat de gokker met een beginbedrag $\frac{a}{b}$ met strategie $t_{\frac{m}{n}}$ het stopbedrag $\frac{d}{e}$ bereikt. Merk op dat we het hele systeem kunnen vermenigvuldigen met een factor $b \cdot n \cdot e$. De gokker begint dan met een bedrag $a \cdot n \cdot e$ en probeert het stopbedrag $d \cdot b \cdot n$ te bereiken met strategie $t_{m \cdot b \cdot e}$. Dit zijn allemaal natuurlijke toestanden. Deze situatie kunnen we nu vervolgens oplossen met de kennis van vast inzetten met een natuurlijk getal, natuurlijke toestanden en een natuurlijk stopbedrag.

## 4 Optimaal spel

In dit hoofdstuk zullen we onderzoeken welke strategie optimaal is voor welke situatie. Zij $N \in \mathbb{R}_{>0}$ het stopbedrag. Uit [4, p. 87] volgt:

**Lemma 1. Optimaliteits-eis:** *Een strategie $s$ is optimaal, als voor de bijbehorende waardefunctie $Q : S \to [0,1]$ geldt $Q(0) = 0$, $Q(N) = 1$ en*

$$p \cdot Q(f+a) + (1-p) \cdot Q(f-a) \leq Q(f) \tag{14}$$

*voor alle $f \in S \setminus \{0, N\}$ en $a \in A(f)$.*

We kunnen dit omschrijven naar:

**Lemma 2.** *Een waardefunctie $Q : S \to [0,1]$ behorend bij een strategie $s$ is optimaal als*

$$Q(f) = \begin{cases} \max\limits_{a \in A(f)} \{p \cdot Q(f+a) + (1-p) \cdot Q(f-a)\}, & \text{als } f \in S \setminus \{0, N\} \\ 0, & \text{als } f = 0 \\ 1, & \text{als } f = N. \end{cases} \tag{15}$$

Een strategie $s$ is een **optimale strategie** als voor $f \in S \setminus \{0, N\}$ geldt dat

$$s(f) \in \operatorname*{arg\,max}_{a \in A(f)} \{p \cdot Q(f+a) + (1-p) \cdot Q(f-a)\}$$

en $s(0) = s(N) = 0$.

## 4.1 Schaling

We beschouwen vanaf nu de volgende situatie:

* $N = 1$, het stopbedrag is 1.
* $S = [0, 1]$, elk reëel kapitaal is toegestaan.
* $A(f) = [0, \min\{f, 1-f\}]$ voor alle $f \in S$. Oftewel elke reële inzet, zodanig dat er niet meer wordt ingezet dan het bedrag dat de gokker heeft, en niet meer dan er nog nodig is om stopbedrag 1 te halen, is toegestaan.

Als het stopbedrag $N$ is, $S = [0, N]$ en $A(f) = [0, \min\{f, N-f\}]$ voor alle $f \in S$, dan kunnen we dit model schalen door te vermenigvuldigen met $\frac{1}{N}$. Dit geeft exact de situatie die we hierboven hebben beschreven. Het is daarom voldoende om ons te beperken tot bovenstaande situatie.

We zullen in dit hoofdstuk drie verschillende gevallen bekijken, namelijk $p > \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$ en $p < \frac{1}{2}$.

## 4.2 Gunstig casino

Een casino heet **gunstig** als de kans om te winnen groter is dan de kans om te verliezen, oftewel $p > \frac{1}{2}$. Aan de hand van een idee uit [2], zullen we laten zien dat voor elke $f \in S \setminus \{0\}$ er een strategie is, waarbij voor de bijbehorende waardefunctie $Q$ geldt $Q(f) > 1 - \epsilon$ met $\epsilon > 0$ willekeurig klein. Dit zullen we niet volledig uitwerken, maar we zullen een bewijsschets geven.

Stel $f = \frac{d}{e} \in S \setminus \{0\} \cap \mathbb{Q}$ en zij $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Als de gokker vast inzet met een bedrag $\frac{1}{m \cdot e}$, dan is dit equivalent met vast inzetten van 1 met stopbedrag $m \cdot e$ en beginkapitaal $m \cdot d$. Merk dus op dat de kans om stopbedrag 1 te bereiken overeenkomt met $g_1(m \cdot d, m \cdot e)$. Er geldt dat $\frac{1-p}{p} < 1$, dus voor de limiet $m \to \infty$ geldt

$$\begin{aligned} \lim_{m \to \infty} g_1(m \cdot d, m \cdot e) &= \lim_{m \to \infty} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{m \cdot d}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{m \cdot e}} \\ &= \frac{1-0}{1-0} \\ &= 1. \end{aligned}$$

We kunnen daarom de kans om van een toestand $f \in S \setminus \{0\} \cap \mathbb{Q}$ naar het stopbedrag te komen willekeurig dicht bij 1 krijgen.

Zij $f \in S \setminus \mathbb{Q}$ en zij $k \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\frac{\lfloor 10^k \cdot f \rfloor}{10^k} > 0$. Deze $k$ bestaat, anders zou $f = 0$ gelden. Merk op dat $\frac{\lfloor 10^k \cdot f \rfloor}{10^k} \in S \setminus \{0\} \cap \mathbb{Q}$. De gokker kan nu het bedrag $f - \frac{\lfloor 10^k \cdot f \rfloor}{10^k}$ achter de hand houden, en vervolgens spelen alsof hij een bedrag $\frac{\lfloor 10^k \cdot f \rfloor}{10^k}$ heeft. Omdat hij met een kans willekeurig dichtbij 1 het stopbedrag kan bereiken, zie hierboven, bereikt hij ook met een kans willekeurig dichtbij 1 het stopbedrag als hij een beginbedrag $f$ heeft. Dit geeft ons de volgende stelling

**Stelling 2.** *In een gunstig casino bestaat er voor alle $\epsilon > 0$ en $f \in S \setminus \{0\}$ een strategie, waarbij voor de bijbehorende waardefunctie $Q$ geldt dat $Q(f) > 1 - \epsilon$.*

### 4.3 Eerlijk casino

Een casino heet **eerlijk** als de kans om te winnen gelijk is aan de kans om te verliezen, oftewel $p = \frac{1}{2}$. We zullen bewijzen dat elke strategie met een bijbehorende concave waardefunctie $Q$ optimaal is.

Hierbij maken we gebruik van een algemeen bekende eigenschap van concave functies, beschreven in het volgende lemma.

**Lemma 3.** *Zij $Q$ een concave functie, dan geldt*

$$Q\left((1-p)\cdot(f-a)+p\cdot(f+a)\right) \geq (1-p)\cdot Q(f-a)+p\cdot Q(f+a)$$

*voor alle $f-a, f+a \in S$ en $p \in (0,1)$.*

Als $p = \frac{1}{2}$, dan volgt uit Lemma 3 dat

$$\begin{aligned}&Q\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot(f-a)+\frac{1}{2}\cdot(f+a)\right) \geq \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot Q(f-a)+\frac{1}{2}\cdot Q(f+a)\\ &\rightsquigarrow Q\left(f\right) \geq \frac{1}{2}\cdot Q(f+a)+\frac{1}{2}\cdot Q(f-a).\end{aligned}$$

Merk op dat de waardefunctie hiermee voldoet aan (14). Dit geeft de volgende stelling.

**Stelling 3.** *Als een strategie $s$ een concave waardefunctie $Q$ heeft, dan is $s$ optimaal.*

In § 5.7 zullen we zien dat de strategie *bold play* voor $p = \frac{1}{2}$ als waardefunctie

$$Q : [0,1] \to [0,1], f \mapsto f$$

heeft. Merk op dat deze functie concaaf is, dus bold play is een optimale strategie in een eerlijk casino.

### 4.4 Ongunstig casino

Een casino heet **ongunstig** als de kans om te winnen kleiner is dan de kans om te verliezen, oftewel $p < \frac{1}{2}$. In hoofdstuk 6 zullen we bewijzen dat *bold play* een optimale strategie is. Eerst zullen we in hoofdstuk 5 dieper ingaan op eigenschappen van bold play.

## 5 Bold play

Een strategie $\sigma$ heet **bold play** als geldt dat

$$\sigma(f) = \begin{cases} f, & \text{als } 0 \leq f < \frac{1}{2} \\ 1-f, & \text{als } \frac{1}{2} \leq f \leq 1. \end{cases} \tag{16}$$

Zij $Q$ de bijbehorende waardefunctie. Uit een eerste-stapsanalyse volgt

$$Q(f) = p\cdot Q(f+\sigma(f)) + (1-p)\cdot Q(f-\sigma(f)).$$

Invullen van (16) geeft

$$Q(f) = \begin{cases} p\cdot Q(2f), & \text{als } 0 \leq f < \frac{1}{2} \\ p+(1-p)\cdot Q(2f-1), & \text{als } \frac{1}{2} \leq f \leq 1. \end{cases} \tag{17}$$

In dit hoofdstuk zullen we een oplossing construeren voor dit stelsel. We moeten ons hiervoor eerst verdiepen in binaire representaties. Vervolgens beschouwen we een aantal eigenschappen van deze oplossing.

## 5.1 Binaire representatie

Zij $f \in [0,1]$ willekeurig gegeven. Een **binaire representatie** van $f$ is een representatie van de vorm

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot 2^{-k}, \text{ met } f_k = 0 \vee f_k = 1 \text{ voor alle } k \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Deze representatie heet **eindig** als $\#\{f_k | f_k = 1, k \in \mathbb{N}_{>0}\} < \infty$. Als de representatie niet eindig is, dan heet zij **oneindig**.

Neem bijvoorbeeld $f = \frac{3}{8}$, dan is $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ een eindige binaire representatie van $f$ met $f_2 = f_3 = 1$ en $f_k = 0$ voor alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2, 3\}$. Voor elke $f \in [0,1]$ bestaat er een binaire representatie. Om er één te vinden, kan het volgende greedy algoritme gebruikt worden.

**Greedy Algoritme Binaire Representatie**

1. Initialiseer: $k = 1, w = f, f_i = 0$ voor alle $i \in \mathbb{N}_{>0}$.
2. Als $2^{-k} \leq w$, doe $f_k = 1$ ; $w := w - 2^{-k}$.
3. Als $w = 0$, STOP. Anders: $k := k + 1$, ga naar stap 2.

Merk op dat er ook oneindige binaire representaties zijn, bijvoorbeeld de binaire representatie van $\frac{1}{3}$.

In dit hoofdstuk zullen we de volgende stelling bewijzen.

**Stelling 4.** *Zij $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot 2^{-k}$ een binaire representatie van $f \in [0,1]$. Dan is*

$$Q(f) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_j} \tag{18}$$

*een **strikt stijgende, continue** en een **unieke** oplossing is van stelsel* (17). *Verder is $Q(f)$ **onafhankelijk** van de gekozen binaire representatie van $f$.*

In de volgende paragrafen zullen we deze eigenschappen bewijzen. Deze formulering komt zonder bewijs uit [5].

## 5.2 Onafhankelijk

We willen bewijzen dat $Q(f) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_j}$ onafhankelijk is van de gekozen binaire representatie van $f$. Hiervoor moeten we opmerken dat de binaire representatie van $f$ uniek is dan en slechts dan als $f$ geen *dyadische breuk* is.

Een breuk heet **dyadisch**, als deze van de vorm $\dfrac{a}{2^b}$ is, met $a \in \mathbb{Z}$ en $b \in \mathbb{N}$. Merk op dat $\dfrac{a}{2^b} \in [0,1]$ als $0 \leq a \leq 2^b$. Dyadische breuken zijn precies de getallen waarvan er een eindige binaire expansie bestaat. $b$ wordt ook wel de **rang** van een dyadische breuk genoemd.

Zij $f \in S$, waarbij $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot 2^{-k}$ en $\sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot 2^{-k}$ twee verschillende binaire representaties zijn van

$f$. Zij $n \in \mathbb{N}_{>0}$ zodanig dat $f_j = g_j$ voor alle $j < n$ en $f_n \neq g_n$. Dan volgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot 2^{-k} &= \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot 2^{-k} \\ \rightsquigarrow \sum_{k=n}^{\infty} f_k \cdot 2^{-k} &= \sum_{k=n}^{\infty} g_k \cdot 2^{-k}. \end{aligned}$$

Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannemen dat $f_n = 1$ en dus $g_n = 0$. Merk op dat

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} g_k \cdot 2^{-k} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k \cdot 2^{-k} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 1 \cdot 2^{-k} \\ &= 2^{-n}. \end{aligned}$$

Verder geldt ook dat

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} f_k \cdot 2^{-k} &= 1 \cdot 2^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k \cdot 2^{-k} \\ &\geq 2^{-n}. \end{aligned}$$

Dit resulteert in

$$2^{-n} \leq \sum_{k=n}^{\infty} f_k \cdot 2^{-k} = \sum_{k=n}^{\infty} g_k \cdot 2^{-k} \leq 2^{-n}.$$

Dit geldt alleen als $g_k = 1$ en $f_k = 0$ voor alle $k \in \mathbb{N}_{>n}$. Als er twee verschillende binaire representaties zijn, dan zijn ze dus altijd van deze vorm.

Als $f \in S$ geen dyadische breuk is, dan is de binaire representatie oneindig. Doordat de representatie oneindig is, is zij uniek. We hoeven daarom alleen voor de dyadische breuken te bewijzen dat $Q$ onafhankelijk is van de gekozen binaire representatie.

Zij $f \in S$ een dyadische breuk. Beide representaties zijn te construeren door het in § 5.1 genoemde algoritme te gebruiken. Waarbij in de tweede stap '$\leq$' vervangen wordt door '$<$' als men de oneindige representatie wil.

Zij $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot 2^{-k}$ en $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot 2^{-k}$ met $f = g$, waarbij $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ de eindige representatie is en $(g_1, g_2, \cdots)$ de oneindige representatie. Dan geldt dus dat $f_k = g_k$ als $k \in \mathbb{N}_{<n}$.

Zij $C := \sum_{j=1}^{n-1} f_j$, dan volgt

$$\begin{aligned}
Q(f) - Q(g) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_j} - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} g_j} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} f_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=n}^{k-1} f_j + C} - \sum_{k=n}^{\infty} g_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=n}^{k-1} g_j + C} \\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^C \left(1 \cdot p^n + 0 - \sum_{k=n+1}^{\infty} 1 \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=n+1}^{k-1} 1}\right) \\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^C \left(p^n - \sum_{k=n+1}^{\infty} p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k-n-1}\right) \\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^C \left(p^n - p^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-p)^{k-n-1}\right) \\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^C \left(p^n - p^{n+1} \cdot \frac{1}{1-(1-p)}\right) \\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^C \left(p^n - p^{n+1} \cdot \frac{1}{p}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dus kunnen we concluderen dat $Q(f)$ onafhankelijk is van de gekozen binaire representatie van $f$.

## 5.3 Continuïteit

Zij $f, g \in [0,1]$. Stel dat er een $n \in \mathbb{N}_{>0}$ is zodanig dat $|f - g| \leq 2^{1-n}$. Merk op dat er dan representaties zijn van $f, g$ waarvoor $f_j = g_j$ voor alle $j < n$ en $f_n \neq g_n$.. Om deze representaties te vinden, kan het algoritme uit § 5.1 gebruikt worden. Er geldt dus dat $f_j = g_j$ voor $j \in \mathbb{N}_{<n}$.

Zij $C := \sum_{j=1}^{n-1} f_j$, dan volgt

$$\begin{aligned}
|Q(f) - Q(g)| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_j} - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} g_j}\right| \\
&= \left|\sum_{k=n}^{\infty} f_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=n}^{k-1} f_j + C} - \sum_{k=n}^{\infty} g_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=n}^{k-1} g_j + C}\right| \\
&\overset{(\star)}{\leq} \left(\frac{1-p}{p}\right)^n \left|\sum_{k=n}^{\infty} 1 \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=n}^{k-1} 1} - 0\right| \\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^n \cdot p^n \sum_{k=n}^{\infty} p^{k-n} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k-n} \\
&= (1-p)^n \sum_{k=n}^{\infty} (1-p)^{k-n} \\
&= (1-p)^n \cdot \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= \frac{(1-p)^n}{p}.
\end{aligned}$$

$(\star)$ volgt, omdat $\left(\frac{1-p}{p}\right)^C \leq \left(\frac{1-p}{p}\right)^n$ en omdat het absolute verschil het grootst is als $f_k = 1$ en $g_k = 0$ voor alle $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$.

Zij $\epsilon > 0$ willekeurig gegeven. $\dfrac{(1-p)^n}{p} < \epsilon$ als $n \cdot \log(1-p) < \log(\epsilon \cdot p)$, oftewel

$$n > \frac{\log(\epsilon \cdot p)}{\log(1-p)}.$$

Kies $0 < \delta < 2^{1-\dfrac{\log(\epsilon \cdot p)}{\log(1-p)}}$. Als $|f-g| < \delta$ geldt, dan volgt nu dat

$$|Q(f) - Q(g)| \leq \frac{(1-p)^n}{p} < \epsilon,$$

oftewel

$$|f-g| < \delta \Rightarrow |Q(f) - Q(g)| < \epsilon.$$

Dus $Q$ is continu. Merk op dat $Q$ zelfs uniform continu is, omdat $\delta$ onafhankelijk is van de keuze van $f$.

## 5.4 Strikt stijgend

We zullen bewijzen dat $Q$ strikt stijgend is. Zij $x, y \in S$ willekeurig gegeven met $x < y$. We zullen bewijzen dat $Q(x) < Q(y)$. Beschouw de representatie $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot 2^{-k}$ en $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \cdot 2^{-k}$ geconstrueerd door het greedy algoritme uit § 5.1. Zij $n \in \mathbb{N}_{>0}$ zodanig dat $x_j = y_j$ voor alle $j < n$ en $x_n \neq y_n$. Zij $C := \sum_{j=1}^{n-1} x_j$, dan volgt

$$\begin{aligned}
Q(x) - Q(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_j} - \sum_{k=1}^{\infty} y_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} g_j} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} x_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=n}^{k-1} x_j + C} - \sum_{k=n}^{\infty} y_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=n}^{k-1} y_j + C} \\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^C \left(\sum_{k=n}^{\infty} x_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=n}^{k-1} x_j} - \sum_{k=n}^{\infty} y_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=n}^{k-1} y_j}\right) \\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^C \cdot \star.
\end{aligned}$$

Omdat $x < y$ volgt uit het algoritme dat $x_n = 0$ en $y_n = 1$. We onderscheiden twee gevallen.

* Als $x_k = 1$ voor alle $k > n$, dan moet er een $l \in \mathbb{N}_{>n}$ zijn zodanig dat $y_l = 1$, want anders

geldt $x = y$. Hieruit volgt

$$
\begin{aligned}
\star &= \sum_{k=n+1}^{\infty} 1 \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=n+1}^{k-1} 1} - p^n - \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{y_n + \sum_{j=n+1}^{k-1} y_j} \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k-n-1} - p^n - \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{1 + \sum_{j=n+1}^{k-1} y_j} \\
&= p^{n+1} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-p)^{k-n-1} - p^n - \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{1 + \sum_{j=n+1}^{k-1} y_j} \\
&= p^{n+1} \cdot \frac{1}{1-(1-p)} - p^n - \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{1 + \sum_{j=n+1}^{k-1} y_j} \\
&= p^n - p^n - \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{1 + \sum_{j=n+1}^{k-1} y_j} \\
&= - \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{1 + \sum_{j=n+1}^{k-1} y_j} \\
&\leq -p^l \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{1 + \sum_{j=n+1}^{l-1} y_j} \\
&\leq -p^l \\
&< 0.
\end{aligned}
$$

* Als $x_k = 1$ niet geldt voor alle $k > n$, dan volgt

$$
\begin{aligned}
\star &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=n+1}^{k-1} x_k} - p^n \\
&< \sum_{k=n+1}^{\infty} 1 \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=n+1}^{k-1} 1} - p^n \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k-n-1} - p^n \\
&= p^{n+1} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-p)^{k-n-1} - p^n \\
&= p^{n+1} \cdot \frac{1}{1-(1-p)} - p^n \\
&= p^n - p^n \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

In beide gevallen volgt dat $\star < 0$, oftewel $Q(x) - Q(y) < 0$. We kunnen hieruit concluderen dat $Q(x) < Q(y)$, dus $Q$ is strikt stijgend.

## 5.5 Oplossing stelsel

Voordat we zullen bewijzen dat $Q$, zie (18), een unieke oplossing is van stelsel (17), zullen we eerst bewijzen dat het überhaupt een oplossing is.

Hiervoor beschouwen we eerst wat er gebeurt met de binaire representatie van $f$ door vermenigvuldiging met 2 en eventueel aftrekken van 1. We onderscheiden de gevallen $f < \frac{1}{2}$ en $f \geq \frac{1}{2}$.

* Stel $f < \frac{1}{2}$. Dan bestaat er een binaire representatie $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot 2^{-k}$ met $f_1 = 0$. Vermenigvuldiging met 2 geeft een verschuiving in de binaire representatie. Zij $g = 2f$, merk op dat er een binaire representatie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot 2^{-k}$ van $g$ bestaat, waarvoor geldt dat $g_k = f_{k+1}$ voor alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$.

  Nu volgt

$$\begin{aligned} Q(2f) &= Q(g) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} g_j} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{k+1} \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_{j+1}} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} f_k \cdot p^{k-1} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=2}^{k-1} f_j} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot p^{k-1} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_j} \\ &= p \cdot Q(f). \end{aligned}$$

* Stel $f \geq \frac{1}{2}$. Dan bestaat er een binaire representatie $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot 2^{-k}$ met $f_1 = 1$. Vermenigvuldiging met 2 geeft een verschuiving in de binaire representatie. Vervolgens 1 van $f$ aftrekken zorgt ervoor dat $f \in [0, 1]$. Zij $g = 2f - 1$. Dan is er een binaire representatie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot 2^{-k}$ van $g$ met $g_k = f_{k+1}$ voor alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$.

  Nu volgt

$$\begin{aligned} Q(2f-1) &= Q(g) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} g_j} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{k+1} \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_{j+1}} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} f_k \cdot p^{k-1} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=2}^{k-1} f_j} \\ &= \frac{p}{1-p} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} f_k \cdot p^{k-1} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_j} \\ &= \frac{p}{1-p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot p^{k-1} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_j} - f_1\right) \\ &= \frac{1}{1-p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot p^{k} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_j} - p\right) \\ &= \frac{1}{1-p} \cdot \left(Q(f) - p\right). \end{aligned}$$

  Hieruit volgt

$$p + (1-p) \cdot Q(2f-1) = Q(f).$$

We kunnen nu concluderen dat $Q(f) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_j}$ inderdaad een oplossing is van stelsel (17).

## 5.6 Uniciteit

Vervolgens zullen we aantonen dat $Q(f) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_j}$ een unieke oplossing is van het stelsel. Dit doen we door een tegenspraak af te leiden. Stel $M : [0,1] \to [0,1]$ is een andere oplossing van het stelsel, dan bestaat er een $f \in [0,1]$ zodanig dat

$$M(f) = Q(f) + \delta$$

met $|\delta| > 0$.

* Als $f < \frac{1}{2}$ dan geldt dat

  $$M(f) = p \cdot M(2f) = p \cdot Q(2f) + \delta.$$

  Hieruit volgt dat

  $$M(2f) = Q(2f) + \frac{\delta}{p}.$$

  Merk op dat $|\frac{\delta}{p}| > |\delta|$.

* Als $f \geq \frac{1}{2}$, dan geldt dat

  $$M(f) = p + (1-p) \cdot M(2f-1) = p + (1-p) \cdot Q(2f-1) + \delta.$$

  Hieruit volgt dat

  $$M(2f-1) = Q(2f-1) + \frac{\delta}{1-p}.$$

  Merk op dat $|\frac{\delta}{1-p}| > |\delta|$.

Vervolgens kunnen we dit herhalen maar dan met $f := 2f$ en $\delta := \frac{\delta}{p}$, als $f < \frac{1}{2}$ en $f := 2f-1$ en $\delta := \frac{\delta}{1-p}$als $f \geq \frac{1}{2}$. Elke iteratie wordt $|\delta|$ met een factor $\frac{\delta}{p}$ of $\frac{\delta}{1-p}$ groter. Na een eindig aantal iteraties geldt daarom dat $|\delta| > 1$.

Omdat een oplossing van het stelsel begrensd is tussen 0 en 1, geldt $|M(f) - Q(f)| \leq 1$ voor alle $f \in S$. We krijgen nu een tegenspraak, want na een eindig aantal iteraties is $|\delta| > 1$, en bestaat er een $f \in S$ waarvoor $M(f) = Q(f) + \delta$ geldt. Uit de tegenspraak volgt dat de oplossing van het stelsel uniek is.

Hiermee is het bewijs van Stelling 4 afgerond.

## 5.7 Optimale strategie eerlijk casino

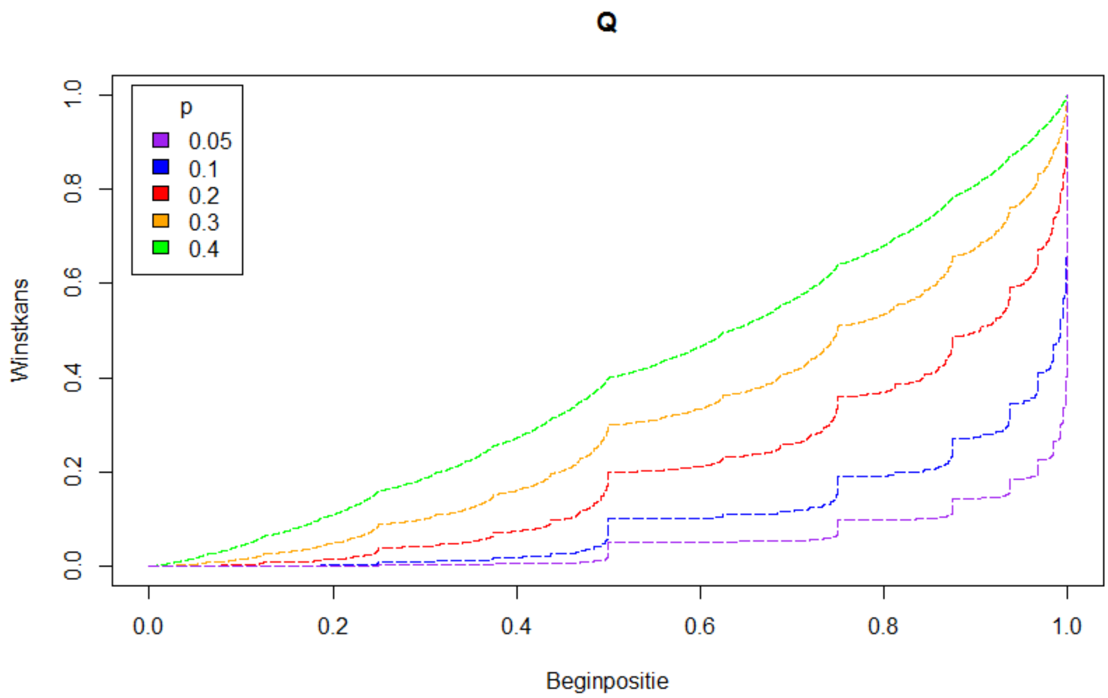
Zij $f \in S$ en zij $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot 2^{-k}$ een binaire representatie van $f$. Als $p = \frac{1}{2}$, dan geldt met behulp van Stelling 4

$$\begin{aligned}
Q(f) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_j} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_j} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot 2^{-k} \cdot 1 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot 2^{-k} \\
&= f.
\end{aligned}$$

Uit § 4.3 volgt nu dat bold play een optimale strategie is in een eerlijk casino.

## 5.8 Grafiek $Q$

We zijn natuurlijk geïnteresseerd hoe de functie $Q$ eruit ziet voor verschillende waarden van $p < \frac{1}{2}$. $Q$ maakt gebruik van de binaire representatie. Hierdoor is het niet eenvoudig in te zien hoe de grafiek van $Q$ eruit zal zien. We hebben daarom in $R$ een programma geschreven, waarmee we de volgende grafiek van $Q$ voor verschillende waarden van $p$ hebben gemaakt.




Figuur 5: Grafiek van $Q$ voor verschillende $p$.

Opmerkelijk is dat het een soort trapfunctie is. Sommige beginposities zijn een stuk voordeliger dan een iets kleinere beginpositie. Neem bijvoorbeeld $f = \frac{1}{2}$, dan zie je dat er een relatief groot verschil is ten opzichte van iets kleinere beginposities. Ook zijn er intervallen waarbij een iets groter kapitaal eigenlijk niet heel veel meer toevoegt. Dit is potentieel interessant voor een casino. Stel een casino wil als publiciteitsstunt gratis fiches weggeven als je voor een bepaald bedrag aan fiches koopt. Als $p = 0.05$, dan kan het casino een gokker best 0.2 aan extra fiches geven als de gokker 0.5 aan fiches koopt, omdat de winstkans dan nauwelijks groter is. Maar het casino moet bijvoorbeeld niet 0.05 aan fiches geven als de gokker 0.45 aan fiches koopt, omdat de winstkans dan aanzienlijk groter is.

Er moet wel rekening mee worden gehouden dat in dit model het stopbedrag vastligt. De meeste gokkers stoppen niet bij een van tevoren bedacht stopbedrag. Zij stoppen om andere redenen: verliezen te vaak, tijdgebrek en plezier kunnen bijvoorbeeld allemaal redenen zijn om te stoppen. Ook wordt het 'trapfunctie-effect'minder naarmate $p$ dichterbij $\frac{1}{2}$ komt. Dit is te zien in Figuur 5. Aangezien de meeste spellen in een casino een winstkans hebben die net onder $\frac{1}{2}$ ligt, zal dit effect niet heel groot zijn. Toch is het iets om rekening mee te houden.

# 6 Optimale strategie ongunstig casino

## 6.1 Optimaliteits-eis

De strategie bold play is optimaal als het voldoet aan de optimaliteits-eis, zie (14). Zij $a \in A(f)$. Merk op dat $0 \leq a \leq f \leq 1$. Zij $x := f + a$ en zij $y := f - a$, dan geldt dat $0 \leq y \leq x \leq 1$. $x, y$ invullen in (14) geeft

$$p \cdot Q(x) + (1-p) \cdot Q(y) \leq Q\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

We kunnen de optimaliteits-eis dus als volgt herformuleren:

**Lemma 4.** *Zij $Q$ de waardefunctie behorend bij strategie $s$. Als voor alle $x, y \in [0,1]$ met $y \leq x$ geldt*

$$W(x,y) := Q\left(\frac{x+y}{2}\right) - p \cdot Q(x) - (1-p) \cdot Q(y) \geq 0, \tag{19}$$

*dan is strategie $s$ optimaal.*

## 6.2 Bold play optimaal

We willen nu bewijzen dat de strategie bold play optimaal is in een ongunstig casino ($p < \frac{1}{2}$). We willen dus de volgende stelling bewijzen.

**Stelling 5.** *Zij $Q$ de waardefunctie behorend bij bold play. Voor alle $x, y \in [0,1]$ met $y \leq x$ geldt*

$$W(x,y) := Q\left(\frac{x+y}{2}\right) - p \cdot Q(x) - (1-p) \cdot Q(y) \geq 0. \tag{20}$$

Uit Lemma 4 en Stelling 5 volgt dat bold play optimaal is. Om Stelling 5 te bewijzen volgen we het idee van [2]. Merk op dat $f_k = 0$ en $g_k = 1$ voor alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ een binaire representatie is voor $f = 0$ en $g = 1$. Nu geldt

$$\begin{aligned}
Q(0) &= Q(f) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_j} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} 0} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

en

$$
\begin{aligned}
Q(1) &= Q(g) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} f_j} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot p^k \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{k-1} 1} \\
&= p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k-1} \\
&= p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \\
&= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= p \cdot \frac{1}{p} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Dus $Q(0) = 0$ en $Q(1) = 1$. Merk op dat $W$ continu is, omdat $Q$ continu is, zie § 5.3. $W$ is namelijk een samenstelling van continue functies, en daarom is $W$ zelf ook continu.

Het bewijs van Stelling 5 volgt uit de volgende twee claims.

**Claim 1.** *Als $W(x, y) \geq 0$ voor alle dyadische breuken $x, y \in [0, 1]$ met $y \leq x$, dan geldt voor alle $x, y \in [0, 1]$ dat $W(x, y) \geq 0$.*

**Claim 2.** *$W(x, y) \geq 0$ voor alle dyadische breuken $x, y \in [0, 1]$ met $y \leq x$.*

We zullen deze twee claims vervolgens bewijzen.

Claim 1. Neem aan dat $W(x, y) \geq 0$ voor alle dyadische breuken $x, y \in [0, 1]$ met $y \leq x$. Stel dat $W(a, b) < 0$ voor $a, b \in [0, 1]$ met $b \leq a$. Als we het greedy algoritme, zie § 5.1, toepassen om een binaire representatie te vinden voor $a$, kunnen we elke iteratie bijhouden welke waarde $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot 2^{-k}$ heeft. Zij $d_i$ gelijk aan de waarde van $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot 2^{-k}$ na iteratie $i$. We krijgen nu een rij $(d_1, d_2, \cdots)$ waarbij $\lim_{n\to\infty} d_n = a$. Dit kunnen we ook doen voor $b$, alleen dan met $e_i$ in plaats van $d_i$. Hiervoor geldt dat $\lim_{n\to\infty} e_n = b$. Omdat $W$ continu is, geldt nu dat

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} W(d_n, e_n) &= W(\lim_{n\to\infty} d_n, \lim_{n\to\infty} e_n) \\
&= W(a, b).
\end{aligned}
$$

Dus $W(d_n, e_n)$ convergeert naar $W(a, b)$ als $n \to \infty$. Zij $\epsilon := -W(a, b)$. Merk op dat $\epsilon > 0$. Nu geldt dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat voor alle $n \in \mathbb{N}_{>N}$ geldt dat

$$
|\lim_{n\to\infty} W(d_n, e_n) - W(a, b)| < \epsilon.
$$

Kies $m \in \mathbb{N}_{>N}$, dan geldt

$$
\begin{aligned}
\epsilon &> |W(d_m, e_m) - W(a, b)| \\
&= |W(d_m, e_m) + \epsilon|.
\end{aligned}
$$

Deze gelijkheid kan alleen gelden als $W(d_m, e_m) < 0$. We hebben nu een tegenspraak gevonden, omdat we nu twee dyadische breuken $d_m, e_m$ hebben met $e_m \leq d_m$, waarvoor geldt dat $W(d_m, e_m) < 0$. Dit is een tegenspraak met onze aanname. Merk op dat $e_m \leq d_m$ door de constructie van het greedy algoritme.

Nu hebben we Claim 1 bewezen.

Claim 2. De tweede claim zullen we bewijzen door middel van inductie naar de hoogste rang $n$ van beide dyadische breuken $x, y$, zie § 5.2. Stel $x = \frac{1}{2}$ en $y = \frac{3}{4}$, dan is de rang van $x$ gelijk aan 1 en de rang van $y$ gelijk aan 2. Dus de hoogste rang van $x, y$ is dan 2.

Stel voor de hoogste rang $n$ geldt $n = 0$ (inductiebasis), dan geldt dat $(x, y)$ gelijk is aan $(0, 0), (1, 0)$ of $(1, 1)$. We bekijken de drie gevallen apart. Hiervoor merken we eerst nog op dat $Q(0) = 0$, $Q(1) = 1$ en $Q\left(\frac{1}{2}\right) = p$. Dat $Q\left(\frac{1}{2}\right) = p$ is eenvoudig te achterhalen door naar stelsel (17) te kijken.

* Als $(x, y) = (0, 0)$ geldt, dan volgt

$$\begin{aligned} W(0,0) &= Q\left(\frac{0+0}{2}\right) - p \cdot Q(0) - (1-p) \cdot Q(0) \\ &= 0 - p \cdot 0 - (1-p) \cdot 0 \\ &= 0 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

* Als $(x, y) = (1, 0)$ geldt, dan volgt

$$\begin{aligned} W(1,0) &= Q\left(\frac{1}{2}\right) - p \cdot Q(1) - (1-p) \cdot Q(0) \\ &= p - p - (1-p) \cdot 0 \\ &= 0 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

* Als $(x, y) = (1, 1)$ geldt, dan volgt

$$\begin{aligned} W(1,1) &= Q(1) - p \cdot Q(1) - (1-p) \cdot Q(1) \\ &= 1 - p - (1-p) \cdot 1 \\ &= 1 - p - 1 + p \\ &= 0 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Dus voor $n = 0$ is de claim waar. Zij $N \in \mathbb{N}_{>0}$ willekeurig gegeven zodanig dat de claim waar is voor alle $n \in \mathbb{N}_{<N}$ (inductieveronderstelling). Zij $x, y \in [0, 1]$ twee dyadische breuken met $y \leq x$, waarbij de hoogste rang $N$ is. Er zijn zes mogelijkheden die we allemaal apart behandelen. We gebruiken steeds eigenschappen van de functie $Q$ in het bewijs, die voortkomen uit stelsel (17).

1. $\boxed{y \leq x < \frac{1}{2}.}$ Dan is $\frac{x+y}{2} < \frac{1}{2}$, dus volgt dat

$$\begin{aligned} W(x,y) &= Q\left(\frac{x+y}{2}\right) - p \cdot Q(x) - (1-p) \cdot Q(y) \\ &= p \cdot Q(x+y) - p \cdot p \cdot Q(2x) - (1-p) \cdot p \cdot Q(2y) \\ &= p \cdot (Q(x+y) - p \cdot Q(2x) - (1-p) \cdot Q(2y)) \\ &= p \cdot W(2x, 2y). \end{aligned}$$

   Merk op dat $W(2x, 2y) \geq 0$ vanwege de inductieveronderstelling, omdat de hoogste rang van $2x$ en $2y$ strikt kleiner is dan de hoogste rang van $x$ en $y$. Verder is $p > 0$, dus volgt dat

$$W(x,y) = p \cdot W(2x, 2y) \geq 0.$$

2. $\boxed{\frac{1}{2} \leq y \leq x.}$ Dan is $\frac{x+y}{2} \geq \frac{1}{2}$, dus volgt dat

$$\begin{aligned}
W(x,y) &= Q\left(\frac{x+y}{2}\right) - p \cdot Q(x) - (1-p) \cdot Q(y) \\
&= p + (1-p) \cdot Q(x+y-1) - p \cdot (p + (1-p) \cdot Q(2x-1)) \\
&\quad - (1-p) \cdot (p + (1-p) \cdot Q(2y-1)) \\
&= p + (1-p) \cdot Q(x+y-1) - p^2 - p \cdot (1-p) \cdot Q(2x-1) - p + p^2 \\
&\quad - (1-p)^2 \cdot Q(2y-1) \\
&= (1-p) \cdot Q(x+y-1) - p \cdot (1-p) \cdot Q(2x-1) - (1-p)^2 \cdot Q(2y-1) \\
&= (1-p) \cdot (Q(x+y-1) - p \cdot Q(2x-1) - (1-p) \cdot Q(2y-1)) \\
&= (1-p) \cdot W(2x-1, 2y-1).
\end{aligned}$$

Merk op dat $W(2x-1, 2y-1) \geq 0$ vanwege de inductieveronderstelling, omdat de hoogste rang van $2x-1$ en $2y-1$ strikt kleiner is dan de hoogste rang van $x$ en $y$. Verder is $1-p > 0$, dus volgt dat

$$W(x,y) = (1-p) \cdot W(2x-1, 2y-1) \geq 0.$$

3. $\boxed{y \leq \frac{x+y}{2} < \frac{1}{2} \leq x \text{ en } 2x-1 \leq 2y.}$ Dan geldt

$$\begin{aligned}
W(x,y) &= Q\left(\frac{x+y}{2}\right) - p \cdot Q(x) - (1-p) \cdot Q(y) \\
&= p \cdot Q(x+y) - p \cdot (p + (1-p) \cdot Q(2x-1)) - (1-p) \cdot p \cdot Q(2y) = \star.
\end{aligned}$$

Merk op dat $\frac{1}{2} \leq x+y < 1$ geldt, dus volgt dat $Q(x+y) = p + (1-p) \cdot Q(2x+2y-1)$. Verder is $0 \leq x+y-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, dus $Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) = p \cdot Q(2x+2y-1)$. Hiermee volgt

$$\begin{aligned}
\star &= p \cdot (p + (1-p) \cdot Q(2x+2y-1)) - p^2 - p \cdot (1-p) \cdot Q(2x-1) - p \cdot (1-p) \cdot Q(2y) \\
&= p^2 + p \cdot (1-p) \cdot Q(2x+2y-1) - p^2 - p \cdot (1-p) \cdot Q(2x-1) - p \cdot (1-p) \cdot Q(2y) \\
&= (1-p) \cdot (p \cdot Q(2x+2y-1) - p \cdot Q(2x-1) - p \cdot Q(2y)) \\
&= (1-p) \cdot \left(Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - p \cdot Q(2x-1) - p \cdot Q(2y)\right) \\
&= (1-p) \cdot \left(Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - (1-p) \cdot Q(2x-1) + (1-2p) \cdot Q(2x-1) - p \cdot Q(2y)\right) \\
&= (1-p) \cdot (W(2y, 2x-1) + (1-2p) \cdot Q(2x-1)).
\end{aligned}$$

Merk op dat $W(2y, 2x-1) \geq 0$ vanwege de inductieveronderstelling, omdat de hoogste rang van $2y$ en $2x-1$ strikt kleiner is dan de hoogste rang van $x$ en $y$. Verder is $1-p > 0$ en $1-2p > 0$, omdat $p < \frac{1}{2}$. Omdat $Q$ niet negatief is, geldt dat $Q(2x-1) \geq 0$. Nu volgt dat

$$W(x,y) = (1-p) \cdot (W(2y, 2x-1) + (1-2p) \cdot Q(2x-1)) \geq 0.$$

4. $\boxed{y \leq \frac{x+y}{2} < \frac{1}{2} \leq x \text{ en } 2x-1 \geq 2y.}$ Dan geldt

$$\begin{aligned}
W(x,y) &= Q\left(\frac{x+y}{2}\right) - p \cdot Q(x) - (1-p) \cdot Q(y) \\
&= p \cdot Q(x+y) - p \cdot (p + (1-p) \cdot Q(2x-1)) - (1-p) \cdot p \cdot Q(2y) = \star.
\end{aligned}$$

Merk op dat $\frac{1}{2} \leq x + y < 1$ geldt, dus volgt dat $Q(x+y) = p + (1-p) \cdot Q(2x+2y-1)$. Verder is $0 \leq x + y - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, dus $Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) = p \cdot Q(2x+2y-1)$. Hiermee volgt

$$\begin{aligned}
\star &= p \cdot (p + (1-p) \cdot Q(2x+2y-1)) - p^2 - p \cdot (1-p) \cdot Q(2x-1) - p \cdot (1-p) \cdot Q(2y) \\
&= p^2 + p \cdot (1-p) \cdot Q(2x+2y-1) - p^2 - p \cdot (1-p) \cdot Q(2x-1) - p \cdot (1-p) \cdot Q(2y) \\
&= (1-p) \cdot (p \cdot Q(2x+2y-1) - p \cdot Q(2x-1) - p \cdot Q(2y)) \\
&= (1-p) \cdot \left(Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - p \cdot Q(2x-1) - p \cdot Q(2y)\right) \\
&= (1-p) \cdot \left(Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - p \cdot Q(2x-1) + (1-2p) \cdot Q(2y) - (1-p) \cdot Q(2y)\right) \\
&= (1-p) \cdot (W(2x-1, 2y) + (1-2p) \cdot Q(2y)).
\end{aligned}$$

Merk op dat $W(2x-1, 2y) \geq 0$ vanwege de inductieveronderstelling, omdat de hoogste rang van $2x-1$ en $2y$ strikt kleiner is dan de hoogste rang van $x$ en $y$. Verder is $1-p > 0$ en $1-2p > 0$, omdat $p < \frac{1}{2}$. Omdat $Q$ niet negatief is, geldt dat $Q(2x-1) \geq 0$. Nu volgt dat

$$W(x,y) = (1-p) \cdot (W(2x-1, 2y) + (1-2p) \cdot Q(2y)) \geq 0.$$

5. $\boxed{y < \frac{1}{2} \leq \frac{x+y}{2} \leq x \text{ en } 2x - 1 \leq 2y.}$ Dan geldt

$$\begin{aligned}
W(x,y) &= Q\left(\frac{x+y}{2}\right) - p \cdot Q(x) - (1-p) \cdot Q(y) \\
&= p + (1-p) \cdot Q(x+y-1) - p \cdot (p + (1-p) \cdot Q(2x-1)) - (1-p) \cdot p \cdot Q(2y) = \star.
\end{aligned}$$

Merk op dat $0 \leq x + y - 1 < \frac{1}{2}$. Daarom volgt dat $Q(x+y-1) = p \cdot Q(2x+2y-2)$. Uit $\frac{1}{2} \leq x + y - \frac{1}{2} < 1$ volgt verder dat $Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) = p + (1-p) \cdot Q(2x+2y-2)$. Als we dit invullen krijgen we

$$\begin{aligned}
\star &= p + (1-p) \cdot p \cdot Q(2x+2y-2) - p^2 - p \cdot (1-p) \cdot Q(2x-1) - (1-p) \cdot p \cdot Q(2y) \\
&= p + p \cdot \left(Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - p\right) - p^2 - p \cdot (1-p) \cdot Q(2x-1) - (1-p) \cdot p \cdot Q(2y) \\
&= p + p \cdot Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - p^2 - p^2 - p \cdot (1-p) \cdot Q(2x-1) - (1-p) \cdot p \cdot Q(2y) \\
&= p \cdot (1-2p) + p \cdot \left(Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - (1-p) \cdot Q(2x-1) - (1-p) \cdot Q(2y)\right) \\
&= p \cdot (1-2p) + p \cdot \left(Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - (1-p) \cdot Q(2x-1) - p \cdot Q(2y) - (1-2p) \cdot Q(2y)\right) \\
&= p \cdot (1-2p) + p \cdot (W(2y, 2x-1) - (1-2p) \cdot Q(2y)) \\
&= p \cdot (1-2p) - (1-2p) \cdot p \cdot Q(2y) + p \cdot W(2y, 2x-1).
\end{aligned}$$

Merk op dat $W(2y, 2x-1) \geq 0$ vanwege de inductieveronderstelling, omdat de hoogste rang van $2y$ en $2x-1$ strikt kleiner is dan de hoogste rang van $x$ en $y$. Verder is $p > 0$ en $1-2p > 0$, omdat $p < \frac{1}{2}$. Omdat $Q$ niet negatief is, geldt dat $p \cdot (1-2p) - (1-2p) \cdot p \cdot Q(2y) \geq 0$. Nu volgt dat

$$W(x,y) = p \cdot (1-2p) - (1-2p) \cdot p \cdot Q(2y) + p \cdot W(2y, 2x-1) \geq p \cdot W(2y, 2x-1) \geq 0.$$

6. $\boxed{y < \frac{1}{2} \leq \frac{x+y}{2} \leq x \text{ en } 2x - 1 \geq 2y.}$ Dan geldt

$$\begin{aligned}
W(x,y) &= Q\left(\frac{x+y}{2}\right) - p \cdot Q(x) - (1-p) \cdot Q(y) \\
&= p + (1-p) \cdot Q(x+y-1) - p \cdot (p + (1-p) \cdot Q(2x-1)) - (1-p) \cdot p \cdot Q(2y) = \star.
\end{aligned}$$

Merk op dat $0 \leq x+y-1 < \frac{1}{2}$. Daarom volgt dat $Q(x+y-1) = p \cdot Q(2x+2y-2)$. Uit $\frac{1}{2} \leq x+y-\frac{1}{2} < 1$ volgt verder dat $Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) = p + (1-p) \cdot Q(2x+2y-2)$. Als we dit invullen krijgen we

$$\begin{aligned}
\star &= p + (1-p) \cdot p \cdot Q(2x+2y-2) - p^2 - p \cdot (1-p) \cdot Q(2x-1) - (1-p) \cdot p \cdot Q(2y) \\
&= p + p \cdot \left(Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - p\right) - p^2 - p \cdot (1-p) \cdot Q(2x-1) - (1-p) \cdot p \cdot Q(2y) \\
&= p + p \cdot Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - p^2 - p^2 - p \cdot (1-p) \cdot Q(2x-1) - (1-p) \cdot p \cdot Q(2y) \\
&= p \cdot (1-2p) + p \cdot \left(Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - (1-p) \cdot Q(2x-1) - (1-p) \cdot Q(2y)\right) \\
&= p \cdot (1-2p) + p \cdot \Bigg(Q\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - p \cdot Q(2x-1) - (1-2p) \cdot Q(2x-1) \\
&\qquad - (1-p) \cdot Q(2y)\Bigg) \\
&= p \cdot (1-2p) + p \cdot (W(2x-1, 2y) - (1-2p) \cdot Q(2x-1)) \\
&= p \cdot (1-2p) - (1-2p) \cdot p \cdot Q(2x-1) + p \cdot W(2x-1, 2y).
\end{aligned}$$

Merk op dat $W(2x-1, 2y) \geq 0$ vanwege de inductieveronderstelling, omdat de hoogste rang van $2x-1$ en $2y$ strikt kleiner is dan de hoogste rang van $x$ en $y$. Verder is $p > 0$ en $1-2p > 0$, omdat $p < \frac{1}{2}$. Omdat $Q$ niet negatief is, geldt dat $p \cdot (1-2p) - (1-2p) \cdot p \cdot Q(2x-1) \geq 0$. Nu volgt dat

$$W(x,y) = p \cdot (1-2p) - (1-2p) \cdot p \cdot Q(2x-1) + p \cdot W(2x-1, 2y) \geq p \cdot W(2x-1, 2y) \geq 0.$$

In alle zes de gevallen zagen we dat $W(x,y) \geq 0$. Daarom is de claim ook waar voor alle dyadische breuken $x, y \in [0,1]$ met $y \leq x$ waarbij de hoogste rang $N$ is. Met inductie volgt nu dat de claim waar is voor alle $n \in \mathbb{N}$. Hiermee hebben we Claim 2 bewezen.

Combineren van Claim 1 en 2 geeft dat $W(x,y) \geq 0$ voor alle $x, y \in [0,1]$ met $y \leq x$. Hiermee hebben we Stelling 5 bewezen en volgt dus met Lemma 4 dat bold play optimaal is.

Jan heeft een goede keuze gemaakt om 200 euro in te zetten, want dit is precies het bedrag dat bold play voorschrijft om in te zetten bij een beginbedrag van 400 euro en een stopbedrag van 600 euro. Stel dat Jan verder had gespeeld met de strategie bold play, dan kunnen we nu dus zijn kans bepalen om bij het stopbedrag te komen. We moeten hiervoor eerst schalen zodanig dat het stopbedrag 1 wordt. Zijn beginkapitaal wordt dan $\frac{2}{3}$. De binaire representatie van $\frac{2}{3}$ is oneindig, dus zullen we $Q\left(\frac{2}{3}\right)$ afschatten. Met behulp van R code, zie § 11.1, volgt dat

$$Q\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0.64849074975657228$$

Jan heeft dus bijna 65% kans om het stopbedrag te bereiken.

# 7 Huislimiet

Bij de meeste casino's mag je niet een belachelijk groot bedrag inzetten. Vaak is er een maximum gesteld op de hoogte van het bedrag dat je elke keer mag inzetten. Zo'n maximum noemen we een **huislimiet**. De speler mocht eerst $s(f) \in [0, \min\{f, 1-f\}]$ inzetten voor alle $f \in S$. Als er een huislimiet $z \in \mathbb{R}_{>0}$ is, dan moet voor de inzet $s(f)$ gelden dat $s(f) \in [0, \min\{f, 1-f, z\}]$ voor alle $f \in S$. Merk op dat voor $z \geq \frac{1}{2}$ de huislimiet geen beperking is. Dus nemen we vanaf nu aan dat $z < \frac{1}{2}$.

## 7.1 Modified bold play

De extra restrictie van een huislimiet zorgt ervoor dat bold play geen toegestane strategie meer is. Bij bold play geldt voor elke $f \in [0, 1]$ dat $\sigma(f) = \min\{f, 1-f\}$ wordt ingezet. In woorden: zet steeds zoveel mogelijk in, maar niet meer dan dat je nog nodig hebt om bij 1 te komen.

We introduceren voor de situatie met een huislimiet $z$ daarom de strategie **modified bold play**, waarbij we weer het idee gebruiken dat we steeds zoveel mogelijk inzetten. Bij modified bold play geldt voor elke $f \in [0, 1]$ dat $\xi(f) = \min\{f, 1-f, z\}$ wordt ingezet.

Oftewel

$$\xi(f) = \min\{f, 1-f, z\} = \begin{cases} f, & \text{als } 0 \leq f < z \\ z, & \text{als } z \leq f < 1-z \\ 1-f, & \text{als } 1-f \leq f \leq 1. \end{cases}$$

Zij $Z : [0, 1] \to [0, 1]$ zodanig dat $Z(f)$ de kans is dat met modified bold play 1 wordt bereikt vanaf $f$ met huislimiet $z$.

Met eerste-stapsanalyse volgt dat

$$Z(f) = \begin{cases} p \cdot Z(2f), & \text{als } 0 \leq f < z \\ p \cdot Z(f+z) + (1-p) \cdot Z(f-z), & \text{als } z \leq f < 1-z \\ p + (1-p) \cdot Z(2f-1), & \text{als } 1-z \leq f \leq 1. \end{cases} \tag{21}$$

## 7.2 Oplossing stelsel met $z = \frac{1}{n}$

We zullen de volgende stelling aan de hand van [5] bewijzen.

**Stelling 6.** *Zij $z = \frac{1}{n}$ de huis limiet met $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ en zij $p \neq \frac{1}{2}$. Zij $f \in S$, dan bestaat er een unieke $m \in \mathbb{N}$ en $R \in \mathbb{R}$ zodanig dat $0 \leq R < z$ waarvoor geldt dat $f = m \cdot z + R$. Nu geldt dat*

$$Z(f) = \frac{\left(1 + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot Q(R/z)\right) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^m - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1} \tag{22}$$

*een oplossing is van* (21) *met $Q$ als in* (18).

We onderscheiden vervolgens zes gevallen, waarbij we steeds gebruikmaken van de eigenschappen van $Q$.

1. Stel $\boxed{f \in [0, \frac{z}{2})}$, dan is $f = 0 \cdot z + R$, dus $m = 0$ en $R = f$. Dit invullen in (22) geeft

$$Z(f) = \frac{\left(1 + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot Q(R/z)\right) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^0 - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1} = \diamond.$$

Merk op dat $\frac{R}{z} < \frac{1}{2}$, dus $Q(R/z) = p \cdot Q(2R/z)$. Hiermee volgt

$$\diamond = \frac{\left(1 + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot p \cdot Q(2R/z)\right) \cdot 1 - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot p \cdot Q(2R/z)}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1} = \star.$$

Er geldt dat $2f \in [0, z)$, en $2f = 0 \cdot z + w$ met $0 \leq w < z$. Dus is $m = 0$ en $w = 2f = 2R$. Nu volgt dat

$$p \cdot Z(2f) = p \cdot \frac{\left(1 + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot Q(2R/z)\right) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^0 - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot p \cdot Q(2R/z)}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1} = \star.$$

Dus inderdaad geldt dat $Z(f) = p \cdot Z(2f)$ voor alle $f \in [0, \frac{z}{2})$.

2. Stel $\boxed{f \in [\frac{z}{2}, z)}$, dan is $f = 0 \cdot z + R$ met $R < z$. Dus is $m = 0$ en $R = f$. Er geldt dat $\frac{R}{z} \geq \frac{1}{2}$, dus $Q(R/z) = p + (1-p) \cdot Q(2R/z - 1)$. Nu volgt dat

$$Z(f) = \frac{\left(1 + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot Q(R/z)\right) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^0 - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}$$

$$= \frac{\left(1 + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot (p + (1-p) \cdot Q(2R/z - 1))\right) \cdot 1 - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot (p + (1-p) \cdot Q(2R/z - 1))}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}$$

$$= \frac{1 - 2p + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot (1-p) \cdot Q(2R/z - 1)}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1} = \star.$$

Er geldt dat $2f \in [z, 2z)$, dus $2f = 1 \cdot z + w$, met $0 \leq w < z$ en $m = 1$. Nu volgt dat

$$p \cdot Z(2f) = p \cdot \frac{\left(1 + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot Q(w/z)\right) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^1 - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}$$

$$= \frac{\left(1 + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot Q(w/z)\right) \cdot (1-p) - p}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}$$

$$= \frac{1 - p + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot (1-p) \cdot Q(w/z) - p}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}$$

$$= \frac{1 - 2p + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot (1-p) \cdot Q(w/z)}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1} = \star\star.$$

Merk op dat

$$2R/z = \frac{2f}{z} = \frac{z+w}{z} = 1 + \frac{w}{z}.$$

Dus $Q(2R/z - 1) = Q(w/z)$. Hieruit volgt dat $\star = \star\star$ en dus $Z(f) = p \cdot Z(2f)$ voor alle $f \in [\frac{z}{2}, z)$.

3. Stel $\boxed{f \in [z, 1-z)}$, dan is $f = m \cdot z + R$ voor een $m \in \mathbb{N}_{<n}$ en $0 \leq R < z$. Dan is $f + z = (m+1) \cdot z + R$ en $f - z = (m-1) \cdot z + R$. Er geldt dat

$$\begin{aligned}
p \cdot Z(f+z) + (1-p) \cdot Z(f-z) &= p \cdot \frac{\left(1 + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot Q(R/z)\right) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+1} - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n} - 1} \\
&\quad + (1-p) \cdot \frac{\left(1 + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot Q(R/z)\right) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{m-1} - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n} - 1} \\
&= \frac{(1-p) \cdot \left(\left(1 + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot Q(R/z)\right) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{m}\right)}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}} \\
&\quad + \frac{p \cdot \left(\left(1 + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot Q(R/z)\right) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{m}\right) - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n} - 1} \\
&= \frac{\left(1 + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot Q(R/z)\right) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{m} - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n} - 1} \\
&= Z(f).
\end{aligned}$$

Dus inderdaad geldt dat $Z(f) = p \cdot Z(f+z) + (1-p) \cdot Z(f-z)$ voor alle $f \in [z, 1-z)$.

4. Stel $\boxed{f \in [1-z, 1-\frac{z}{2})}$, dan is $f = (n-1) \cdot z + R$ met $R = z - 1 + f$. Nu volgt dat

$2f-1=(n-2)\cdot z+2R$, dus

$$p+(1-p)\cdot Z(2f-1)=p+(1-p)\cdot\left(\frac{\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(2R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-2}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}\right)$$
$$=p+\frac{p\cdot\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(2R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-(1-p)}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$
$$=\frac{p\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-p}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$
$$+\frac{p\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}+p\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(2R/z)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-(1-p)}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$
$$=\frac{p\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}+p\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}+p\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(2R/z)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$
$$=\frac{p\cdot\left(\frac{1-p}{p}+1\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}+p\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(2R/z)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$
$$=\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}+p\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(2R/z)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$
$$=\diamond.$$

Merk op dat $\frac{R}{z}<\frac{1}{2}$, dus

$$Z(f)=\frac{\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$
$$=\frac{\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot p\cdot Q(2R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$
$$=\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}+p\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(2R/z)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$
$$=\diamond.$$

Hieruit volgt dat $Z(f)=p+(1-p)\cdot Z(2f-1)$ voor alle $f\in[1-z,1-\frac{z}{2})$.

5. Stel $\boxed{f\in[1-\frac{z}{2},1)}$, dan is $f=(n-1)\cdot z+R$, waarbij $R=z-1+f<z$. Hiermee volgt

dat $2f-1=(n-1)\cdot z+z-2+2f$, waarbij $z-2+2f<z$. Nu geldt

$$p+(1-p)\cdot Z(2f-1)=p+(1-p)\cdot\left(\frac{\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{z+2f-2}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}\right)$$

$$=\frac{p\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-p+(1-p)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}+(1-p)\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{z+2f-2}{z}\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-(1-p)}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$

$$=\frac{p\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}+(1-p)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}+(1-p)\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{z+2f-2}{z}\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}\cdot\left(p\cdot\frac{1-p}{p}+(1-p)\right)+(1-p)\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{z+2f-2}{z}\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}\cdot(2-2p)+(1-p)\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{z+2f-2}{z}\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}=\star.$$

Merk op dat $\frac{R}{z}\geq\frac{1}{2}$, dus volgt dat

$$Q(R/z)=p+(1-p)\cdot Q(2R/z-1)=p+(1-p)\cdot Q\left(\frac{z+2f-2}{z}\right).$$

Hiermee volgt dat

$$Z(f)=\frac{\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$

$$=\frac{\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot\left(p+(1-p)\cdot Q\left(\frac{z+2f-2}{z}\right)\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot p\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$

$$+\frac{(1-p)\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{z+2f-2}{z}\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}\cdot(2-2p)+(1-p)\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{z+2f-2}{z}\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n}-1}=\star.$$

Dus inderdaad geldt $Z(f)=p+(1-p)\cdot Z(2f-1)$ voor alle $f\in[1-\frac{z}{2},1)$.

6. Merk op dat als $\boxed{f=1}$, dat $Z(f)=1$ moet gelden. Verder geldt ook dat $Q(0)=0$. Als

$f = 1$, dan geldt $f = n \cdot z + 0$. Dus volgt

$$\begin{aligned} Z(f) &= \frac{\left(1 + \left(\frac{1-p}{p} - 1\right) \cdot Q(0/z)\right) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1} \\ &= \frac{(1+0) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1} \\ &= \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dus $Z(1) = 1$ geldt inderdaad.

We hebben nu alle mogelijkheden bekeken. We kunnen concluderen dat (22) een oplossing is van (21) en hiermee hebben we Stelling 6 bewezen.

Verder hebben we nog een vermoeden, namelijk

**Vermoeden 1.** *(22) is ook een oplossing van (21) als $z \neq \frac{1}{n}$. In (22) moet $n$ dan wel vervangen worden door $\frac{1}{z}$.*

Dit zou nog verder onderzocht moeten worden.

## 7.3 Optimaal voor $z = \frac{1}{n}$ in een ongunstig casino

We zullen nu de volgende stelling bewijzen.

**Stelling 7.** *Modified bold play is een optimale strategie in een ongunstig casino ($p < \frac{1}{2}$) als voor de huislimiet $z$ geldt dat $z = \frac{1}{n}$ met $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.*

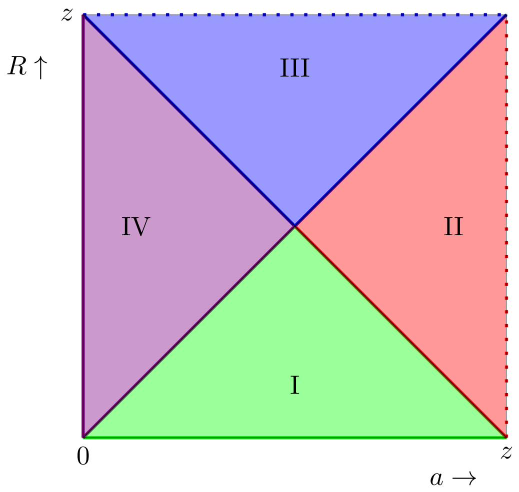
Dit bewijs komt uit [5]. Uit (14) volgt dat modified bold play optimaal is als voor de bijbehorende waardefunctie $Z$ geldt $Z(0) = 0$ en $Z(1) = 1$ en

$$p \cdot Z(f + a) + (1 - p) \cdot Z(f - a) \leq Z(f) \tag{23}$$

voor alle $f \in [0, 1]$ en $a \in A(f)$. Dat $Z(0) = 0$ en $Z(1) = 1$ volgt uit § 7.2. Zij $a \in A(f)$ willekeurig gegeven. Als $a = z$, dan volgt uit (21) direct dat

$$p \cdot Z(f + a) + (1 - p) \cdot Z(f - a) = p \cdot Z(f + z) + (1 - p) \cdot Z(f - z) = Z(f).$$

Omdat $A(f) = [0, \min\{f, 1 - f, z\}]$, kunnen we nu aannemen dat $0 \leq a < z$. Net als in § 7.2 bestaat er voor elke $f \in S$ een unieke $m \in \mathbb{N}$ en $R \in \mathbb{R}$ zodanig dat $0 \leq R < z$, waarvoor geldt dat $f = m \cdot z + R$. Merk dus op dat $0 \leq a < z$ en $0 \leq R < z$. We beschouwen de verschillende combinaties van $a$ en $R$. We verdelen het in vier stukken zoals in Figuur 6 is verduidelijkt.




Figuur 6: Vierdeling van combinaties van $0 \leq a \leq z$ en $0 \leq R \leq z$.

Vervolgens beschouwen we het quotiënt en rest van $f + a$ en $f - a$ voor de vier opties. Hierbij nemen we de tabel van [5, p. 569] over.

| Gebied | (Quotiënt, rest) van: $f + a$ | (Quotiënt, rest) van: $f - a$ |
|---|---|---|
| I: $0 \leq R < a < z - R$ | $(m, R + a)$ | $(m - 1, z + R - a)$ |
| II: $z - a \leq R < a < z$ | $(m + 1, R + a - z)$ | $(m - 1, z + R - a)$ |
| III: $z - R \leq a \leq R < z$ | $(m + 1, R + a - z)$ | $(m, R - a)$ |
| IV: $0 \leq a \leq R < z - a$ | $(m, R + a)$ | $(m, R - a)$ |

Vervolgens kunnen we met behulp van de tabel naar de vier verschillende mogelijkheden gaan kijken. We willen bewijzen dat

$$Z(f) - p \cdot Z(f + a) - (1 - p) \cdot Z(f - a) \geq 0.$$

Merk op dat $\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1 \geq 0$, dus het is voldoende om te bewijzen dat

$$D := \left(\left(\frac{1 - p}{p}\right)^n - 1\right) \cdot (Z(f) - p \cdot Z(f + a) - (1 - p) \cdot Z(f - a)) \geq 0. \tag{24}$$

We zullen de vier mogelijkheden eerst reduceren tot vier ongelijkheden, die we in het vervolg van het bewijs gezamenlijk zullen bewijzen.

I. Met behulp van de tabel volgt

$$
\begin{aligned}
D = {} & \left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m - 1 \\
& - p\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R+a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m - 1\right) \\
& - (1-p)\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{z+R-a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m-1} - 1\right) \\
= {} & \left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m \\
& - p\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R+a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m\right) \\
& - (1-p)\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{z+R-a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m-1}\right) \\
= {} & \left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m \\
& - p\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R+a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m\right) \\
& - p\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{z+R-a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m\right) = \star.
\end{aligned}
$$

Merk op dat $\left(\frac{1-p}{p}\right)^m \geq 0$, dus is het voldoende om te bewijzen dat $\frac{\star}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^m} \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\star}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^m} &= 1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z) - p - (1-2p)\cdot Q\left(\frac{R+a}{z}\right) - p \\
&\quad - (1-2p)\cdot Q\left(\frac{z+R-a}{z}\right) \\
&= (1-2p)\cdot\left(1+\frac{1}{p}\cdot Q(R/z) - Q\left(\frac{R+a}{z}\right) - Q\left(\frac{z+R-a}{z}\right)\right) \\
&= \diamond.
\end{aligned}
$$

Merk op dat $p > 0$ en $1-2p \geq 0$, want $0 < p < \frac{1}{2}$. Het is daarom voldoende om te bewijzen dat $p\cdot\frac{\diamond}{1-2p} \geq 0$.

$$
p\cdot\frac{\diamond}{1-2p} = p + Q(R/z) - p\cdot Q\left(\frac{R+a}{z}\right) - p\cdot Q\left(\frac{z+R-a}{z}\right).
$$

Merk op dat $p\cdot\frac{\diamond}{1-2p} \geq 0$ als

$$
Q(R/z) \geq p\cdot\left(Q\left(\frac{R+a}{z}\right) + Q\left(\frac{z+R-a}{z}\right) - 1\right). \tag{25}
$$

II. Met behulp van de tabel volgt

$$
\begin{aligned}
D &= \left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m - 1\\
&\quad - p\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R+a-z}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+1}-1\right)\\
&\quad - (1-p)\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{z+R-a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m-1}-1\right)\\
&= \left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m\\
&\quad - p\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R+a-z}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+1}\right)\\
&\quad - (1-p)\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{z+R-a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m-1}\right)\\
&= \left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m\\
&\quad - (1-p)\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R+a-z}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m}\right)\\
&\quad - p\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{z+R-a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m}\right) = \star.
\end{aligned}
$$

Net zoals bij geval I, is het voldoende om te bewijzen dat $\frac{\star}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^m} \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\star}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^m} &= 1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z)-(1-p)-(1-p)\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R+a-z}{z}\right)\\
&\quad -p-p\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{z+R-a}{z}\right)\\
&= \left(\frac{1-2p}{p}\right)\cdot Q(R/z)-(1-p)\cdot\left(\frac{1-2p}{p}\right)\cdot Q\left(\frac{R+a-z}{z}\right)\\
&\quad -p\cdot\left(\frac{1-2p}{p}\right)\cdot Q\left(\frac{z+R-a}{z}\right)\\
&= \diamond.
\end{aligned}
$$

Net zoals bij geval I, is het voldoende om te bewijzen dat $p\cdot\frac{\diamond}{1-2p} \geq 0$.

$$
p\cdot\frac{\diamond}{1-2p} = Q(R/z)-(1-p)\cdot Q\left(\frac{R+a-z}{z}\right)-p\cdot Q\left(\frac{z+R-a}{z}\right).
$$

Merk op dat $p\cdot\frac{\diamond}{1-2p} \geq 0$ als

$$
Q(R/z) \geq (1-p)\cdot Q\left(\frac{R+a-z}{z}\right)+p\cdot Q\left(\frac{z+R-a}{z}\right). \tag{26}
$$

III. Met behulp van de tabel volgt

$$
\begin{aligned}
D &= \left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m - 1\\
&\quad - p\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R+a-z}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+1} - 1\right)\\
&\quad - (1-p)\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R-a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m} - 1\right)\\
&= \left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m\\
&\quad - p\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R+a-z}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+1}\right)\\
&\quad - (1-p)\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R-a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m}\right)\\
&= \left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m\\
&\quad - (1-p)\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R+a-z}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m}\right)\\
&\quad - (1-p)\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R-a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m}\right) = \star.
\end{aligned}
$$

Het is voldoende om te bewijzen dat $\frac{\star}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^m} \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\star}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^m} &= 1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z) - (1-p) - (1-p)\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R+a-z}{z}\right)\\
&\quad - (1-p) - (1-p)\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R-a}{z}\right)\\
&= -(1-2p) + \left(\frac{1-2p}{p}\right)\cdot Q(R/z) - (1-p)\cdot\left(\frac{1-2p}{p}\right)\cdot Q\left(\frac{R+a-z}{z}\right)\\
&\quad - (1-p)\cdot\left(\frac{1-2p}{p}\right)\cdot Q\left(\frac{R-a}{z}\right)\\
&= \diamond.
\end{aligned}
$$

Het is voldoende om te bewijzen dat $p\cdot\frac{\diamond}{1-2p} \geq 0$.

$$
p\cdot\frac{\diamond}{1-2p} = -p + Q(R/z) - (1-p)\cdot Q\left(\frac{R+a-z}{z}\right) - (1-p)\cdot Q\left(\frac{R-a}{z}\right).
$$

Merk op dat $p\cdot\frac{\diamond}{1-2p} \geq 0$ als

$$
Q(R/z) \geq p + (1-p)\cdot\left(Q\left(\frac{R+a-z}{z}\right) Q\left(\frac{R-a}{z}\right)\right). \tag{27}
$$

IV. Met behulp van de tabel volgt

$$\begin{aligned}
D = {} & \left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m - 1 \\
& - p\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R+a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m - 1\right) \\
& - (1-p)\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R-a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m - 1\right) \\
= {} & \left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m \\
& - p\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R+a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m\right) \\
& - (1-p)\cdot\left(\left(1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R-a}{z}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^m\right) = \star.
\end{aligned}$$

Het is voldoende om te bewijzen dat $\frac{\star}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^m} \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\star}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^m} &= 1+\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q(R/z) - p - p\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R+a}{z}\right) \\
&\quad - (1-p) - (1-p)\cdot\left(\frac{1-p}{p}-1\right)\cdot Q\left(\frac{R-a}{z}\right) \\
&= \left(\frac{1-2p}{p}\right)\cdot Q(R/z) - p\cdot\left(\frac{1-2p}{p}\right)\cdot Q\left(\frac{R+a}{z}\right) \\
&\quad - (1-p)\cdot\left(\frac{1-2p}{p}\right)\cdot Q\left(\frac{R-a}{z}\right) \\
&= \diamond.
\end{aligned}$$

Het is voldoende om te bewijzen dat $p\cdot\frac{\diamond}{1-2p} \geq 0$.

$$p\cdot\frac{\diamond}{1-2p} = Q(R/z) - p\cdot Q\left(\frac{R+a}{z}\right) - (1-p)\cdot Q\left(\frac{R-a}{z}\right).$$

Merk op dat $p\cdot\frac{\diamond}{1-2p} \geq 0$ als

$$Q(R/z) \geq p\cdot Q\left(\frac{R+a}{z}\right) + (1-p)\cdot Q\left(\frac{R-a}{z}\right). \tag{28}$$

We definiëren $x := \frac{R}{z}$ en $y := \frac{a}{z}$. De ongelijkheden (25), (26), (27) en (28) worden dan respectievelijk

$$\begin{aligned}
&Q(x) \geq p\cdot(Q(x+y) + Q(1+x-y) - 1) && \text{met } 0 \leq x < y < 1-x && (29)\\
&Q(x) \geq (1-p)\cdot Q(x+y-1) + p\cdot Q(1+x-y) && \text{met } 1-y \leq x < y < 1 && (30)\\
&Q(x) \geq p + (1-p)\cdot(Q(x+y-1)\,Q(x-y)) && \text{met } 1-x \leq y \leq x < 1 && (31)\\
&Q(x) \geq p\cdot Q(x+y) + (1-p)\cdot Q(x-y) && \text{met } 0 \leq y \leq x < 1-y && (32)
\end{aligned}$$

Merk op dat voor (32) geldt dat $0 \leq y \leq x < 1-y$, dus volgt dat $x < 1-x$. Dit hebben we in hoofdstuk 6 al bewezen, dus deze ongelijkheid geldt. Zij $y =: 1-w$ en vul dit in (32), dan krijgen we

$$Q(x) \geq p\cdot Q(x+1-w) + (1-p)\cdot Q(x-1+w) \qquad \text{met } 0 \leq 1-w \leq x < w < 1.$$

Dit is precies ongelijkheid (30), dus ook deze geldt.

Vervangen we op eenzelfde manier in (32) $x$ met $x+\frac{1}{2}$ en $y$ met $y-\frac{1}{2}$, dan krijgen we

$$Q\left(x+\frac{1}{2}\right) \geq p \cdot Q\left(x+y\right)+(1-p) \cdot Q\left(1+x-y\right) \qquad \text{met } \frac{1}{2} \leq y \leq 1-x \leq 1. \tag{33}$$

Als we in (32) $x$ met $x+\frac{1}{2}$ en $y$ met $\frac{1}{2}-y$ vervangen, dan krijgen we

$$Q\left(x+\frac{1}{2}\right) \geq p \cdot Q\left(x+1-y\right)+(1-p) \cdot Q\left(x+y\right) \qquad \text{met } 0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{2}. \tag{34}$$

Als $y \geq \frac{1}{2}$ dan volgt uit (33)

$$\begin{aligned} Q\left(x+\frac{1}{2}\right) &\geq p \cdot Q\left(x+y\right)+(1-p) \cdot Q\left(1+x-y\right) \\ &= p \cdot Q\left(x+y\right)-(1-p) \cdot Q\left(x+y\right)+(1-p) \cdot Q\left(x+y\right)+(1-p) \cdot Q\left(1+x-y\right) \\ &= (p-(1-p)) \cdot Q(x+y)+(1-p) \cdot Q\left(x+y\right)+(1-p) \cdot Q\left(1+x-y\right) \\ &= (2p-1) \cdot Q(x+y)+(1-p) \cdot \left(Q\left(x+y\right)+Q\left(1+x-y\right)\right) \\ &\geq 2p-1+(1-p) \cdot \left(Q\left(x+y\right)+Q\left(1+x-y\right)\right). \end{aligned}$$

Als $y \leq \frac{1}{2}$ dan volgt uit (34)

$$\begin{aligned} Q\left(x+\frac{1}{2}\right) &\geq p \cdot Q\left(x+1-y\right) \\ &\qquad +(1-p) \cdot Q\left(x+y\right) \\ &= p \cdot Q\left(x+1-y\right)-(1-p) \cdot Q\left(x+1-y\right)+(1-p) \cdot Q\left(x+1-y\right) \\ &\qquad +(1-p) \cdot Q\left(x+y\right) \\ &= (p-(1-p)) \cdot Q(x+1-y)+(1-p) \cdot Q\left(x+1-y\right)+(1-p) \cdot Q\left(x+y\right) \\ &= (2p-1) \cdot Q(x+1-y)+(1-p) \cdot \left(Q\left(1+x-y\right)+Q\left(x+y\right)\right) \\ &\geq 2p-1+(1-p) \cdot \left(Q\left(1+x-y\right)+Q\left(x+y\right)\right). \end{aligned}$$

Dus geldt dat

$$Q\left(x+\frac{1}{2}\right) \geq 2p-1+(1-p) \cdot \left(Q\left(1+x-y\right)+Q\left(x+y\right)\right) \qquad \text{met } 0 \leq x \leq y \leq 1-x. \tag{35}$$

Uit (17) volgt dat

$$Q\left(x+\frac{1}{2}\right) = p+(1-p) \cdot Q\left(2x+1-1\right) = p+(1-p) \cdot Q(2x).$$

Oftewel $Q(2x) = \frac{Q\left(x+\frac{1}{2}\right)-p}{1-p}$. Dit invullen in (35) geeft

$$Q(2x) \geq -1+Q\left(1+x-y\right)+Q\left(x+y\right).$$

Merk op dat $x \leq \frac{1}{2}$, dus uit (17) volgt dat

$$Q(x) = p \cdot Q(2x) \geq p \cdot \left(Q\left(x+y\right)+Q\left(1+x-y\right)-1\right) \qquad \text{met } 0 \leq x < y < 1-x.$$

Hieruit kunnen we concluderen dat (29) inderdaad geldt.

Zo kunnen we ook in (28) $x$ vervangen door $x-\frac{1}{2}$ en $y$ vervangen door $y-\frac{1}{2}$. Dit geeft

$$Q\left(x-\frac{1}{2}\right) \geq p \cdot Q\left(x-1+y\right)+(1-p) \cdot Q\left(x-y\right) \geq p \cdot Q\left(x-1+y\right)+p \cdot Q\left(x-y\right) \tag{36}$$

met $\frac{1}{2} \leq y \leq x \leq 1$. Als we in (32) $x$ met $x - \frac{1}{2}$ en $y$ met $\frac{1}{2} - y$ vervangen, dan krijgen we

$$Q\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq p \cdot Q(x-y) + (1-p) \cdot Q(x-1+y) \geq p \cdot Q(x-1+y) + p \cdot Q(x-y) \tag{37}$$

met $0 \leq 1 - x \leq y \leq \frac{1}{2}$. (36) combineren met (37) geeft

$$Q\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq p \cdot Q(x-1+y) + p \cdot Q(x-y) \qquad \text{met } 1 - x \leq y \leq x \leq 1.$$

Uit (17) volgt dat

$$Q\left(x - \frac{1}{2}\right) = p \cdot Q(2x-1).$$

Hieruit volgt dat

$$Q(2x-1) = \frac{Q\left(x - \frac{1}{2}\right)}{p} = Q(x-1+y) + Q(x-y).$$

Merk op dat $x \geq \frac{1}{2}$, dus volgt uit (17) dat

$$Q(x) = p + (1-p) \cdot Q(2x-1) \geq p + (1-p) \cdot (Q(x-1+y) + Q(x-y))$$

met $1 - x \leq y \leq x < 1$. Hieruit kunnen we concluderen dat (31) geldt. Omdat we hebben bewezen dat de ongelijkheden (29), (30), (31) en (32) gelden, volgt nu dat de ongelijkheden (25), (26), (27) en (28) gelden. Hiermee hebben we bewezen dat $D \geq 0$, zie (24), voor alle mogelijkheden. Nu hebben we Stelling 7 bewezen.

## 7.4 Modified bold play niet altijd optimaal

We zullen nu aantonen dat modified bold play niet altijd optimaal is. Dit doen we door te laten zien dat modified bold play niet aan de optimaliteits-eis voldoet, zie 6.1. We volgen hierbij het bewijs van [6].

**Stelling 8.** *Zij $z \in \mathbb{R}$ de huislimiet zodanig dat $\frac{1}{n+1} < z < \frac{1}{n}$ voor een $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Er bestaan een $f \in [0,1]$, een $a \in A(f)$ en een $p \in (0, \frac{1}{2})$, waarvoor geldt dat*

$$p \cdot Z(f+a) + (1-p) \cdot Z(f-a) > Z(f).$$

Merk op dat dan niet aan de optimaliteits-eis wordt voldaan, zie (23).

### 7.4.1 Uitwerking voorbeeld

Eerst zullen we Stelling 8 bewijzen door een voorbeeld uit te werken. Zij $z = \frac{7}{24}$ de huislimiet en zij $f = \frac{119}{240}$ de beginkapitaal. We gaan twee gokkers simultaan met een andere strategie laten spelen. De eerste gokker heeft als strategie modified bold play. De tweede gokker heeft als strategie: eerst $a = \frac{69}{240}$ inzetten, om vervolgens na het eerste spel over te gaan op modified bold play. Vervolgens zullen we kijken op welke manieren beide gokkers met maximaal drie gewonnen spellen het stopbedrag 1 kunnen bereiken.

* Voor de eerste gokker zijn er drie manieren om bij het stopbedrag te komen met maximaal drie winst spellen, namelijk
  - ◇ Twee keer winnen, dit geeft
    $$\frac{119}{240} \to \frac{189}{240} \to 1.$$
    De kans hierop is $p^2$.

◇ Een keer winnen, een keer verliezen en daarna twee keer winnen, dit geeft

$$\frac{119}{240} \to \frac{189}{240} \to \frac{138}{240} \to \frac{208}{240} \to 1.$$

De kans hierop is $p^3 \cdot (1-p)$.

◇ Een keer winnen, een keer verliezen, een keer winnen, een keer verliezen en daarna een keer winnen, dit geeft

$$\frac{119}{240} \to \frac{189}{240} \to \frac{138}{240} \to \frac{208}{240} \to \frac{176}{240} \to 1.$$

De kans hierop is $p^3 \cdot (1-p)^2$.

∗ Voor de tweede gokker zijn er vier manieren om bij het stopbedrag te komen met maximaal drie winst spellen, namelijk

◇ Twee keer winnen, dit geeft

$$\frac{119}{240} \to \frac{188}{240} \to 1.$$

De kans hierop is $p^2$.

◇ Een keer winnen, een keer verliezen en daarna twee keer winnen, dit geeft

$$\frac{119}{240} \to \frac{188}{240} \to \frac{136}{240} \to \frac{206}{240} \to 1.$$

De kans hierop is $p^3 \cdot (1-p)$.

◇ Een keer winnen, een keer verliezen, een keer winnen, een keer verliezen en daarna een keer winnen, dit geeft

$$\frac{119}{240} \to \frac{188}{240} \to \frac{136}{240} \to \frac{206}{240} \to \frac{172}{240} \to 1.$$

De kans hierop is $p^3 \cdot (1-p)^2$.

◇ Een keer verliezen, daarna drie keer winnen, dit geeft

$$\frac{119}{240} \to \frac{50}{240} \to \frac{100}{240} \to \frac{170}{240} \to 1.$$

De kans hierop is $p^3 \cdot (1-p)$.

Merk op dat na twaalf spellen de eerste speler 0 of 1 moet hebben bereikt of minstens vier keer heeft gewonnen. Als de speler door in totaal meer dan vier keer te winnen in 1 uitkomt, dan moet hij dus binnen twaalf spellen minstens vier keer hebben gewonnen. $2^{12}$ is een bovengrens voor het totaal aantal realisaties voor de eerste gokker in twaalf spellen. Als al deze paden naar 1 leiden, dan is $2^{12} \cdot p^4$ een bovengrens voor de kans dat de eerste gokker 1 bereikt met minstens vier winst spellen.

De eerste gokker heeft als strategie modified bold play, dus geldt dat

$$Z(f) \leq p^2 + p^3 \cdot (1-p) + p^3 \cdot (1-p)^2 + 2^{12} \cdot p^4.$$

De kans om 1 te bereiken voor de tweede gokker is minstens

$$p^2 + 2 \cdot p^3 \cdot (1-p) + p^3 \cdot (1-p)^2.$$

Als we naar het verschil kijken, dan geldt

$$\begin{aligned}
&p^2 + p^3 \cdot (1-p) + p^3 \cdot (1-p)^2 + 2^{12} \cdot p^4 - \big(p^2 + 2 \cdot p^3 \cdot (1-p) + p^3 \cdot (1-p)^2\big) \\
&= 2^{12} \cdot p^4 - p^3 \cdot (1-p) \\
&= p^3(2^{12} \cdot p - (1-p)) \\
&< 4096 \cdot p - 1 + p \\
&= 4097 \cdot p - 1.
\end{aligned}$$

Als $p < \frac{1}{4097}$, dan heeft de tweede gokker een grotere kans om bij het stopbedrag te komen, dan de eerste gokker. Hieruit kunnen we concluderen dat modified bold play niet altijd optimaal is. We hebben Stelling 8 dus bewezen.

### 7.4.2 Algemene geval

We hebben nu met een voorbeeld bewezen dat modified bold play niet altijd optimaal is. Vervolgens zullen we Stelling 8 algemener bewijzen, zie § 7.4. Dit bewijs komt voort uit [6]. Zij $z \in \mathbb{R}$ de huislimiet zodanig dat $\frac{1}{n+1} < z < \frac{1}{n}$ voor een $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Zij $k \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$2^k < \frac{z}{1 - n \cdot z} \leq 2^{k+1}.$$

Kies $\epsilon$ zodanig dat $0 < \epsilon < \frac{n \cdot z - 1}{4} + 2^{-(k+2)} \cdot z$ en zij $f := \frac{1-(n-1)\cdot z}{2} + z - \epsilon$.

We zullen vervolgens de volgende ongelijkheden bewijzen:

$$1 - (n-1) \cdot z + \frac{z}{2} > f > f - \epsilon > 1 - (n-1) \cdot z > z. \tag{38}$$

$f > f - \epsilon$ is triviaal, omdat $\epsilon > 0$. Merk op dat $n \cdot z < 1$, omdat $z < \frac{1}{n}$. Hiermee volgt

$$\begin{aligned}
& z < 1 - n \cdot z + z \\
& \rightsquigarrow \frac{z}{2} < \frac{1-(n-1)\cdot z}{2} \\
& \rightsquigarrow \frac{1-(n-1)\cdot z}{2} + z < 1 - (n-1) \cdot z + \frac{z}{2}.
\end{aligned}$$

Omdat $f < \frac{1-(n-1)\cdot z}{2} + z$ volgt nu dat $f < 1 - (n-1) \cdot z + \frac{z}{2}$. Verder geldt ook dat $f - \epsilon > 1 - (n-1) \cdot z$, want

$$\begin{aligned}
f - \epsilon &> \frac{1-(n-1)\cdot z}{2} + z - \frac{n \cdot z - 1}{2} - 2^{-(k+1)} \cdot z \\
&= \frac{1 - n \cdot z + z + 2z - n \cdot z + 1 - 2^{-k} \cdot z}{2} \\
&= \frac{2 - 2 \cdot n \cdot z + 2z}{2} + \frac{z - 2^{-k} \cdot z}{2} \\
&= 1 - (n-1) \cdot z + \frac{z - 2^{-k} \cdot z}{2} \\
&= 1 - (n-1) \cdot z + \frac{z}{2} - \frac{z \cdot 2^{-k}}{2}.
\end{aligned}$$

We hoeven dan alleen nog maar te bewijzen dat $\frac{z}{2} - \frac{z \cdot 2^{-k}}{2} > 0$. Dit is triviaal, want $k > 0$.

Verder volgt, omdat $z < \frac{1}{n}$, dat

$$\begin{aligned}
& n \cdot z < 1 \\
& \rightsquigarrow 1 - n \cdot z > 0 \\
& \rightsquigarrow 1 - n \cdot z + z > z \\
& \rightsquigarrow 1 - (n-1) \cdot z > z.
\end{aligned}$$

Hiermee hebben we alle ongelijkheden van (38) bewezen.

We zullen vervolgens twee gokkers beschouwen die allebei een beginkapitaal $f$ hebben. De eerste gokker heeft als strategie modified bold play. De tweede gokker heeft als strategie: eerst $a = z - \epsilon$ inzetten, om vervolgens na het eerste spel over te gaan op modified bold play. We zullen vervolgens kijken wat de kansen van beide gokkers zijn, dat ze binnen $n$ winst spellen het stopbedrag hebben bereikt. Hiervoor gebruiken we steeds de ongelijkheden uit (38).

* Beide spelers kunnen door $n-1$ keer achter elkaar te winnen het stopbedrag bereiken. De eerste speler kan het stopbedrag namelijk bereiken, omdat $f > 1-(n-1)\cdot z > z$. De tweede speler heeft na de eerste keer winnen $f+z-\epsilon$. Merk op dat we hadden bewezen dat $f-\epsilon > 1-(n-1)\cdot z > z$, dus volgt dat $f+z-\epsilon > 1-(n-2)\cdot z$. Als de tweede speler vervolgens $n-2$ keer wint, bereikt hij dus ook het stopbedrag.

  De kans op $n-1$ winst spellen achter elkaar is $p^{n-1}$.

* Beide spelers kunnen bij het stopbedrag komen door eerst te winnen, vervolgens $n-k$ keer te winnen, met $3 < k \leq n$, één keer te verliezen en daarna $k-1$ keer te winnen. Voor beide spelers is dit eigenlijk hetzelfde pad als $n-1$ keer achter elkaar winnen. Maar tussendoor wordt er één keer verloren. Merk op dat er op dat moment $z$ is ingezet door beide spelers. Ze gaan dus terug naar het bedrag, dat ze hadden na $n-k$ keer winst spellen. De eerste speler heeft dan $f+(n-k)\cdot z > 1-(k-1)\cdot z$, dus door $k-1$ keer te winnen bereikt de eerste speler vervolgens het stopbedrag. De tweede speler heeft $f+(n-k)\cdot z-\epsilon > 1-(k-1)\cdot z$, dus de tweede speler bereikt ook het stopbedrag door daarna $k-1$ keer te winnen.

  Omdat $3 < k \leq n$, zijn er $n-3$ mogelijkheden voor $k$. De kans op deze situatie is dus $(n-3)\cdot p^n \cdot (1-p)$,

* Beide spelers kunnen ook bij het stopbedrag komen door $n-2$ keer achter elkaar te winnen, een keer te verliezen, een keer te winnen en vervolgens niet meer dan $k$ keer verliezen om daarna één keer te winnen.

  Voor de tweede speler geldt het volgende: Na de eerste keer winnen heeft hij een bedrag van $\frac{1-(n-1)\cdot z}{2} + 2z - 2\epsilon$. Vervolgens wint hij $n-3$ keer, waarbij hij $z$ inzet. Na $n-2$ keer te hebben gewonnen, heeft hij dus een bedrag van

$$\frac{1-(n-1)\cdot z}{2} + (n-1)\cdot z - 2\epsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot z - 2\epsilon.$$

  Merk op dat $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot z - 2\epsilon > 1-z$, vanwege (38). Hij zet dus vervolgens

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot z - 2\epsilon\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot z + 2\epsilon$$

  in. Vervolgens wordt er één spel verloren, dus de tweede speler heeft dan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot z - 2\epsilon - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot z + 2\epsilon\right) = (n-1)\cdot z - 4\epsilon.$$

  Merk op dat $(n-1)\cdot z - 4\epsilon < 1-z$. Er geldt vanwege (38) dat

$$1 - \frac{z}{2} > f + (n-1)\cdot z - \epsilon.$$

  De tweede speler moet daarom meer dan $\frac{z}{2}$ inzetten en zal dus na het verlies onder de $1-z$ uitkomen.

  Als de tweede speler vervolgens weer een spel wint, dan heeft hij een bedrag $n\cdot z - 4\epsilon > 1-z$. Merk op dat hij na $k$ keer verliezen het volgende bedrag heeft:

$$1 - 2^k \cdot (1 - n\cdot z + 4\epsilon).$$

  We zullen vervolgens bewijzen dat dit bedrag groter is dan $1-z$. Dit volgt als

$$-2^k \cdot (1 - n\cdot z + 4\epsilon) > -z.$$

  Merk op dat

$$\begin{aligned} -2^k \cdot (1 - n\cdot z + 4\epsilon) &> -2^k \cdot \left(1 - n\cdot z + n\cdot z - 1 + 2^{-k}\cdot z\right) \\ &= -2^k \cdot 2^{-k} \cdot z = -z. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat inderdaad $-2^k \cdot (1 - n \cdot z + 4\epsilon) > -z$ geldt. Omdat de tweede speler nog een bedrag heeft boven de $1 - z$, kan hij door één keer te winnen bij het stopbedrag komen. De tweede speler kan dit dus doen door minder dan $k$ keer te verliezen en dan te winnen.

Stel dat hij $k + 1$ keer verliest, heeft de tweede speler dan nog een bedrag groter dan $1 - z$? Merk op dat door de definitie van $k$ geldt dat

$$\begin{aligned} 2^{k+1} \cdot (1 - n \cdot z + 4\epsilon) &> \frac{z}{1 - n \cdot z} \cdot (1 - n \cdot z + 4\epsilon) \\ &> \frac{z \cdot (1 - n \cdot z)}{1 - n \cdot z} = z. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$1 - 2^{k+1} \cdot (1 - n \cdot z + 4\epsilon) < 1 - z.$$

Als hij vaker dan $k$ keer verliest, dan komt hij dus onder de $1 - z$ uit. Hij kan hierdoor niet meer het stopbedrag bereiken door nog één keer te winnen.

Vervolgens beschouwen we de eerste speler. Merk op dat de eerste speler altijd een strikt groter bedrag heeft dan de tweede speler in deze situatie. Dit komt, omdat de eerste speler meer of evenveel inzet in de winst spellen en minder of evenveel in de verlies spellen. Dus de eerste speler komt ook bij het stopbedrag als de tweede speler er komt. Hierdoor hoeven we alleen nog te kijken of de eerste speler er niet ook nog kan komen door $k + 1$ keer of meer te verliezen in plaats van $k$ keer. Op eenzelfde manier als bij de tweede speler volgt, dat de eerste speler na $n - 2$ keer te winnen, vervolgens één keer te verliezen, één keer te winnen en vervolgens $k + 1$ keer te verliezen, een bedrag heeft van

$$1 - 2^{k+1} \cdot (1 - n \cdot z + 2\epsilon).$$

Merk op dat ook hiervoor geldt dat

$$\begin{aligned} 2^{k+1} \cdot (1 - n \cdot z + 2\epsilon) &> \frac{z}{1 - n \cdot z} \cdot (1 - n \cdot z + 2\epsilon) \\ &> \frac{z \cdot (1 - n \cdot z)}{1 - n \cdot z} = z. \end{aligned}$$

Nu volgt dat

$$1 - 2^{k+1} \cdot (1 - n \cdot z + 2\epsilon) < 1 - z.$$

Ook de eerste speler mag niet vaker dan $k$ keer verliezen, want dan kan hij het stopbedrag niet meer bereiken door nog één keer te winnen.

De kans dat de spelers het stopbedrag bereiken door eerst $n - 2$ keer te winnen, vervolgens één keer te verliezen, één keer te winnen, niet meer dan $k$ keer verliezen en vervolgens winnen, is dus:

$$p^n \cdot (1 - p)^1 + p^n \cdot (1 - p)^2 + p^n \cdot (1 - p)^3 + \cdots + p^n \cdot (1 - p)^{k+1}$$

$*$ Merk op dat de tweede speler na een eerste verlies een bedrag $f - a = \frac{1-(n-1)\cdot z}{2}$ heeft. Dit bedrag is kleiner dan $z$ en is het kleinste bedrag waarmee nog na $n$ winst spellen het stopbedrag kan worden bereikt, namelijk op de volgende manier:

$$\frac{1 - (n - 1) \cdot z}{2} \to 1 - (n - 1) \cdot z \to 1 - (n - 2) \cdot z \to \cdots \to 1 - z \to z.$$

De eerste pijl volgt, omdat $\frac{1-(n-1)\cdot z}{2} < z$. De eerste speler heeft na een eerste verlies een strikt kleiner bedrag, dus kan de eerste speler na een eerste verlies niet na $n$ winst spellen bij het stopbedrag komen.

De kans op deze situatie is: $p^n \cdot (1 - p)$.

We zullen vervolgens een bovengrens bepalen voor de kans dat de eerste speler het stopbedrag bereikt met minstens $n + 1$ gewonnen spellen. Zij $A$ de gebeurtenis dat de eerste speler het stopbedrag bereikt met minstens $n + 1$ gewonnen spellen.

Na een eindig aantal spellen, zij $M$ dit aantal, is er een moment waarop de eerste speler ofwel een bedrag 0 of 1 heeft, ofwel al minstens $n + 1$ keer moet hebben gewonnen. We zullen $M$ bepalen door te kijken naar alle realisaties, waarbij hij 0 of 1 niet bereikt en hooguit $n$ keer wint. We willen hiervoor weten wat het grootste eindbedrag is dat de speler kan hebben op het moment dat hij minder dan $n + 1$ keer heeft gewonnen. Er zijn twee kandidaten voor het grootste eindbedrag.

* Het eerste spel winnen en vervolgens $n - 3$ keer achter elkaar winnen geeft een bedrag groter dan $1 - z$. Tussen de $n - 3$ keer achter elkaar winnen kan ook $0 < k < 3$ keer verloren worden en daarna $k$ keer gewonnen, maar dit zal de hoogte van het eindbedrag niet vergroten. Het eindbedrag is
$$\frac{1 - (n-1) \cdot z}{2} + z - \epsilon + (n-2) \cdot z = \frac{1 + (n-1) \cdot z}{2} - \epsilon$$
We hadden eerder al opgemerkt dat
$$1 - \frac{z}{2} > f + (n-1) \cdot z - \epsilon.$$
Dus dit eindbedrag is meer dan $\frac{z}{2}$ van het stopbedrag verwijderd.
* Stel de speler verliest het eerste spel en wint vervolgens $n$ keer. Na het eerste spel te verliezen, heeft de speler een bedrag $\frac{1-(n-1)\cdot z}{2} - \epsilon$. $n$ keer winnen geeft vervolgens
$$\frac{1 - (n-1) \cdot z}{2} - \epsilon \to 1 - (n-1) \cdot z - 2\epsilon \to 1 - (n-2) \cdot z - 2\epsilon \to \cdots \to 1 - 2\epsilon.$$
Dit is een groter eindbedrag als $1 - 2\epsilon > 1 - \frac{z}{2}$, oftewel $\epsilon < \frac{z}{4}$. Merk op dat
$$\epsilon < \frac{n \cdot z - 1}{4} + 2^{-(k+2)} \cdot z < 2^{-(k+2)} \cdot z < \frac{z}{4}.$$
We kunnen hieruit concluderen dat $1 - 2\epsilon$ het grootst haalbare eindbedrag is met maximaal $n$ keer winnen.

Vervolgens zullen we bepalen hoe vaak we daarna kunnen verliezen voordat we in toestand 0 zijn. Hiervoor moeten we bepalen wanneer we onder de $1 - z$ uitkomen. Als we boven $1 - z$ zijn, dan geldt na $w$ keer verliezen dat we in toestand $1 - 2^{w+1}\epsilon$ zijn. Merk op dat

$$\begin{aligned}
&1 - 2^{w+1}\epsilon < 1 - z \\
&\rightsquigarrow 2^{w+1}\epsilon > z \\
&\rightsquigarrow w + 1 > \log_2 z - \log_2 \epsilon \\
&\rightsquigarrow w > \log_2 z - \log_2 \epsilon - 1.
\end{aligned}$$

Zodra we onder de $1 - z$ zitten, kunnen we nog $n$ keer verliezen. Er geldt namelijk dat $z > \frac{1}{n+1}$, dus $1 - z < n \cdot z$.

We definiëren nu

$$M := n + 1 + w + n + 1 = 2n + w + 2.$$

Dan geldt dat na $M$ spellen de eerste speler ofwel een bedrag 0 of 1 heeft, ofwel al minstens $n + 1$ keer heeft gewonnen.

De gebeurtenis $A$ kunnen we nu ook als volgt formuleren: Zij $A$ de gebeurtenis dat de eerste speler minstens $n + 1$ keer heeft gewonnen, in hooguit $M$ spellen, en het stopbedrag bereikt. Merk op dat dit geen restrictie is op de eerder gedefinieerde $A$, vanwege onze keuze van $M$. Nu volgt

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}\left(\text{De eerste speler wint minstens } n + 1 \text{ keer in hooguit } M \text{ spellen}\right) \leq p^{n+1} \cdot 2^M.$$

$2^M$ is een bovengrens voor het totaal aantal paden dat de eerste speler kan hebben in $M$ spellen. We hebben nu dus een bovengrens gevonden voor de kans dat de eerste speler het stopbedrag bereikt met minstens $n + 1$ gewonnen spellen.

De eerste speler bereikt met kans $Z(f)$ het stopbedrag. We zijn alle mogelijkheden afgegaan, dus volgt nu dat

$$Z(f) \leq p^{n-1} + (n-2) \cdot p^n \cdot (1-p) + p^n \cdot (1-p)^2 + \cdots + p^n \cdot p^{k+1} + 2^M \cdot (1-p)^{n+1}.$$

De tweede speler heeft een extra mogelijkheid om in $n$ winst spellen 1 te bereiken. Zijn kans is dus minstens

$$p^{n-1} + (n-1) \cdot p^n \cdot (1-p) + p^n \cdot (1-p)^2 + \cdots + p^n \cdot (1-p)^{k+1}.$$

Als we naar het verschil kijken, dan geldt

$$\begin{aligned}
&p^{n-1} + (n-1) \cdot p^n \cdot (1-p) + p^n \cdot (1-p)^2 + \cdots + p^n \cdot (1-p)^{k+1} \\
&- \left(p^{n-1} + (n-2) \cdot p^n \cdot (1-p) + p^n \cdot (1-p)^2 + \cdots + p^n \cdot (1-p)^{k+1} + 2^M \cdot p^{n+1}\right) \\
&= p^n \cdot (1-p) - 2^M \cdot p^{n+1} \\
&= p^n \left(1 - p - 2^M \cdot p\right) \\
&\geq 1 - (2^M + 1) \cdot p.
\end{aligned}$$

Merk op dat als $p < \frac{1}{2^M+1}$, dat de tweede speler dan een grotere kans heeft om het stopbedrag te bereiken. We kunnen dus ook voor het algemenere geval concluderen dat modified bold play niet altijd optimaal is. In het algemenere geval hebben we ook Stelling 8 bewezen.

# 8 Samenvatting van kennis

*Wat is er nu bekend in de wetenschap over dit probleem? Wat is er nog niet bewezen?* In dit hoofdstuk geven we een overzicht.

## 8.1 Al bekend

* Als er geen huislimiet is, dan is het voordelig om zo min mogelijk in te zetten als $p > \frac{1}{2}$, zie § 4.2 en [2].
* Als er geen huislimiet is, dan is elke strategie optimaal als $p = \frac{1}{2}$, zie § 4.3.
* Als er geen huislimiet is, dan is bold play optimaal als $p < \frac{1}{2}$, zie hoofdstuk 6 en [2].
* Als $z = \frac{1}{n}$ de huislimiet is, voor $n \in \mathbb{N}_{>1}$, dan is modified bold play optimaal als $p < \frac{1}{2}$, zie § 7.3 en [5].
* Als voor de huislimiet $z$ geldt $\frac{1}{n+1} < z < \frac{1}{n}$ voor $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, dan is modified bold play niet altijd optimaal als $p < \frac{1}{2}$. Het is bijvoorbeeld niet optimaal als $p$ klein genoeg is. Dit hebben we bewezen in § 7.4.2 met het idee van [6].
* Als voor de huislimiet $z$ geldt dat $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $z < \frac{1}{2}$, dan is modified bold play voor geen enkele $p < \frac{1}{2}$ optimaal, zie [7].

### 8.2 Nog onbekend

* Als voor de huislimiet $z$ geldt dat $z \in \mathbb{Q}_{<\frac{1}{3}}$, dan is het nog niet bewezen of modified bold play al dan niet optimaal is voor alle $p < \frac{1}{2}$. Met de uitzondering van $z = \frac{1}{n}$ met $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Dit kan dus nog verder worden onderzocht.
* Als voor de huislimiet $z$ geldt dat $\frac{1}{3} < z < \frac{1}{2}$ en $z \in \mathbb{Q}$, dan is het nog niet duidelijk of modified bold play wel of niet optimaal is voor $p < \frac{1}{2}$. Hierover is vrij weinig bekend en het zou interessant zijn om dit verder uit te zoeken.
* Er is nog weinig bekend over het effect van een minimale inzet. Misschien zorgt in een gunstig casino invoering van een minimale inzet ervoor dat minder inzetten ongunstiger is. Hier zou verder onderzoek naar gedaan moeten worden.

## 9 Slotwoord

Het rood-zwart casino is een erg interessant wiskundig probleem waar al jaren aan gewerkt wordt. Er zijn vele varianten te bedenken, die ook onderzocht worden. Het is opmerkelijk dat sommige vraagstukken nog niet opgelost zijn. Op het eerste oog is het bijvoorbeeld gek dat men wel kan bewijzen dat als de huislimiet een irrationaal getal is, dat modified bold play dan niet optimaal is voor $p < \frac{1}{2}$, maar als de huislimiet rationaal is, dit niet voor alle $p < \frac{1}{2}$ bekend is.

Verder is het leuk om te zien dat het gebruik van dyadische breuken heel natuurlijk is voor bold play. Er kan namelijk handig gebruik worden gemaakt van de rang van een dyadische breuk. We hebben veel gebruik gemaakt van de binaire expansie van een getal, waardoor de bewijzen een stuk eenvoudiger werden.

We hopen dat deze scriptie heeft gezorgd voor een duidelijker beeld en een betere bewijsvoering van de stellingen. Deze informatie kan de lezer gebruiken om beter te gokken.

## 10 Referenties


[1] I. Kallenberg and F. Spieksma, *Besliskunde A.* Universiteit Leiden, `http://www.math.leidenuniv.nl/~spieksma/colleges/besliskunde/BKA-deel1.pdf`, Najaar 2014.

[2] K. Siegrist, "How to gamble if you must," July 2008.

[3] I. Kallenberg and F. Spieksma, *Besliskunde B.* Universiteit Leiden, `http://www.math.leidenuniv.nl/~spieksma/colleges/besliskunde/BKB.pdf`, Voorjaar 2016.

[4] L. E. Dubins and L. J. Savage, *How to Gamble If You Must: Inequalities for Stochastic Processes.* Dover Publications, 2014. Edited and Updated by William D. Sudderth and David Gilat.

[5] J. E. Wilkins, "The bold strategy in presence of house limit," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 32, no. 2, pp. 567–570, 1972.

[6] D. C. Heath, W. E. Pruitt, and W. D. Sudderth, "Subfair red-and-black with a limit," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 35, no. 2, pp. 555–560, 1972.

[7] J. Schweinsberg, "Improving on bold play when the gambler is restricted," *Journal of Applied Probability*, vol. 42, no. 2, pp. 321–333, 2005.

# 11 Appendix

## 11.1 Bepaling kans Jan

```
rm(list = ls())

Q <- function(f,p, constante){
  if(f ==1){
    return(1)
  }
  binair <- rep(0, constante)
  for (i in 1:constante){
    if (2^(-i) <= f){
      binair[i] =1
      f <- f- 2^(-i)
    }
  }
  sum <-0
  pk <- 1
  u <- 1

  for (k in 1: constante){
    pk <- p * pk
    if(binair[k] ==1){
      sum <- sum +  pk * u
      u <- ((1-p)/p) * u
    }
  }
  return(sum)
}

constante <- 10000
p <- (18/37)

options(digits =20)
Q(2/3, p, constante)
```

## 11.2 Grafiek $Q$

```
rm(list = ls())
Q <- function(f,p, constante){
  if(f ==1){
    return(1)
  }
  binair <- rep(0, constante)
  for (i in 1:constante){
    if (2^(-i) <= f){
      binair[i] =1
      f <- f- 2^(-i)
    }
  }
  sum <-0
  pk <- 1
  u <- 1
  for (k in 1: constante){
```

```
    pk <- p * pk
    if(binair[k] ==1){
      sum <- sum +  pk * u
      u <- ((1-p)/p) * u
    }
  }
  return(sum)
}
constante <- 16
p <- 0.2
steps <- seq(0,1,(1/(2^(constante))))
Qchance <- c()
for (i in 1:length(steps)){
  Qchance[i] <- Q(steps[i], p, constante)
}
plot(steps, Qchance, main = "Q", lty = 5, type = 'l', lwd = 1,
 xlab = "Beginpositie", ylab = "Winstkans", col = 'red', xlim = c(0,1),
  ylim = c(0,1))
p<- 0.1
for (i in 1:length(steps)){
  Qchance[i] <- Q(steps[i], p, constante)
}
lines(steps, Qchance,  lty = 5, type = 'l', lwd = 1, xlab = "Beginpositie",
 ylab = "Winstkans", col = 'blue' , xlim = c(0,1), ylim = c(0,1))
p<- 0.3
for (i in 1:length(steps)){
  Qchance[i] <- Q(steps[i], p, constante)
}
lines(steps, Qchance,  lty = 5, type = 'l', lwd = 1, xlab = "Beginpositie",
ylab = "Winstkans", col = 'orange' , xlim = c(0,1), ylim = c(0,1))
p<- 0.4
for (i in 1:length(steps)){
  Qchance[i] <- Q(steps[i], p, constante)
}
lines(steps, Qchance,  lty = 5, type = 'l', lwd = 1, xlab = "Beginpositie",
 ylab = "Winstkans", col = 'green' , xlim = c(0,1), ylim = c(0,1))
p<- 0.05
for (i in 1:length(steps)){
  Qchance[i] <- Q(steps[i], p, constante)
}
lines(steps, Qchance,  lty = 5, type = 'l', lwd = 1, xlab = "Beginpositie",
 ylab = "Winstkans", col = 'purple' , xlim = c(0,1), ylim = c(0,1))
legend("topleft", inset=0.02, title = "p", legend = c(0.05,0.1,0.2,0.3,0.4),
 fill = c("purple", "blue", "red", "orange", "green")  )
```