T.D. van Mulligen

De fundamentaalgroep van het complement van een vlakke kromme

Bachelorscriptie, juli 2014

Scriptiebegeleider: Prof. Dr. S.J. Edixhoven

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding

De nulpuntsverzameling in $\mathbb{C}^3$ van een homogeen polynoom van graad $d > 0$ kan, door de homogeniteit, beschouwd worden in de 2-dimensionale complexe projectieve ruimte. Als we nu eisen dat deze verzameling glad is op $\mathbb{C}^3 - \{0\}$, blijkt dat de fundamentaalgroep van het complement in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ verrassend simpel is, namelijk een cyclische groep van orde d. Oscar Zariski vermoedde dit al, maar kon het niet bewijzen. De Nederlandse wiskundige Egbert van Kampen heeft uiteindelijk het bewijs voltooid en publiceerde in 1933 een artikel met zijn bevindingen.

In deze scriptie wordt een nieuw bewijs van deze zogenaamde stelling van Zariski-van Kampen uiteengezet. Het nieuwe bewijs verschilt van het oorspronkelijke bewijs[1] op twee manieren. Ten eerste laat het met een vezelingsargument zien dat de fundamentaalgroep maar voor één kromme berekend hoeft te worden. Ten tweede maakt het gebruik van modernere terminologie. De eerste twee hoofdstukken zullen een topologische en categorietheoretische kijk leveren op twee belangrijke resultaten, namelijk de stelling van Van Kampen en een korte exacte rij van fundamentaalgroepen, geconstrueerd uit een vezelbundel. Deze resultaten vinden een nuttige toepassing in het bewijs van de hoofdstelling, waar hoofdstuk vier aan gewijd is. Daar wordt het probleem gereduceerd en zal er slechts een voorbeeld uitgewerkt worden, waarna dit gegeneraliseerd kan worden naar andere krommen.

Hoewel het bewijs van algebraïsch topologische aard is, komen er ook aspecten van categorietheorie, projectieve meetkunde en manifolds aan bod. De lezer wordt dan ook verondersteld enige voorkennis in algebra, topologie en projectieve meetkunde te hebben. Begrippen die buiten deze voorkennis vallen (pushouts, vezelbundels) zullen echter gedefinieerd en aan de hand van voorbeelden toegelicht worden.

2 De stelling van Van Kampen

Het bewijzen van de vermoedens van Zariski was voor Van Kampen een directe aanleiding tot het bewijzen van wat nu de stelling van Van Kampen heet. Deze stelling geeft onder bepaalde voorwaarden meer inzicht in de structuur van fundamentaalgroepen en zal in het bewijs van de hoofdstelling een belangrijke rol spelen. Voor we hier echter aan toe zijn zullen we eerst enkele andere begrippen moeten definiëren.

2.1 Producten en coproducten

In de categorietheorie zijn het product en het coproduct belangrijke basisbegrippen. We beginnen met de definitie van het product:

Definitie 2.1.1. *Zij $\mathcal{C}$ een categorie met objecten A en B. Het* product *van A en B is een tripel $(A \times B, p_1, p_2)$ bestaande uit een object $A \times B \in \mathcal{C}$ en morfismen $p_1 : A \times B \to A$ en $p_2 : A \times B \to B$ zodat het volgende geldt: voor elke $C \in \mathcal{C}$ met morfismen $f : C \to A$ en $g : C \to B$ bestaat er een unieke $h : C \to A \times B$ zodat het volgende diagram commuteert:*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Voordat we enkele voorbeelden bekijken, geven we eerst de definitie van de duale van het product: het coproduct.

Definitie 2.1.2. *Zij $\mathcal{C}$ een categorie met objecten A en B. Het* coproduct *(ook wel de* som *genoemd) van A en B is een tripel $(A \sqcup B, i_1, i_2)$ bestaande uit een object $A \sqcup B \in \mathcal{C}$ en morfismen $i_1 : A \to A \sqcup B$ en $i_2 : B \to A \sqcup B$ zodat het volgende geldt: voor elke $C \in \mathcal{C}$ met morfismen $f : A \to C$ en $g : B \to C$ bestaat er een unieke $h : A \sqcup B \to C$ zodat het volgende diagram commuteert:*

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_1"'] & A \sqcup B \arrow[u, dashed, "h"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

Een van de basiseigenschappen van het product en het coproduct is dat ze uniek zijn op een uniek isomorfisme na.

Men zal de notatie van het product en coproduct wellicht herkennen van het cartesisch product en de disjuncte vereniging. In de voorbeelden die volgen zal duidelijk worden dat dit niet geheel toevallig is.

Voorbeeld 2.1.3. Bekijk de categorie **Ab** van abelse groepen. Het product $(A \times B, p_1, p_2)$ bestaat hier uit het cartesisch product $A \times B$ met p_i de projectie op de i-de coördinaat. Zij namelijk een object $C \in \mathcal{C}$ gegeven met groepsmorfismen $h_1 : C \to A$ en $h_2 : C \to B$. Dan wordt de afbeelding $h : C \to A \times B$ op de eerste coördinaat vastgelegd door $p_1(h(c)) = h_1(c)$. Analoog hebben we $p_2(h(c)) = h_2(c)$. Dit legt afbeelding h eenduidig vast. De lezer kan eenvoudig nagaan dat h een homomorfisme is (dat is, een morfisme in de categorie van abelse groepen).

Ook het coproduct bestaat uit het cartesisch product $A \times B$, maar met afbeeldingen $i_1 : A \to A \times B, a \mapsto (a, 0)$ en $i_2 : B \to A \times B, b \mapsto (0, b)$. Een morfisme $h : A \times B \to C$ wordt nu uniek vastgelegd door $h(a, 0) = h(i_1(a)) = f(a)$ en $h(0, b) = h(i_2(b)) = g(b)$.

Voorbeeld 2.1.4. Bekijk de categorie **Grp** van (niet noodzakelijk abelse) groepen. Het coproduct in deze categorie bestaat uit het vrije product $A * B$ met morfismen $i_1 : A \to A \times B, a \mapsto a$ en $i_2 : B \to A \times B, b \mapsto b$. Een afbeelding $h : A * B \to C$ wordt vastgelegd door $h(a) = h(i_1(a)) = f(a)$ en $h(b) = h(i_2(b)) = g(b)$. Net als in **Ab** is het product in **Grp** de productgroep.

Voorbeeld 2.1.5. Bekijk de categorie **Set** van verzamelingen. Het coproduct wordt hier gegeven door de disjuncte vereniging $A \sqcup B = (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\})$ van A en B met morfismen $i_1 : A \to A \sqcup B, a \mapsto (a, 1)$ en $i_2 : B \to A \sqcup B, b \mapsto (b, 2)$. Een afbeelding $h : A \sqcup B \to C$ wordt nu vastgelegd door $h(x, 1) = h(i_1(x)) = f(x)$ en $h(x, 2) = h(i_2(x)) = g(x)$.

2.2 Pushouts

Een kernbegrip in de stelling van Van Kampen is de pushout. We geven meteen de definitie.

Definitie 2.2.1. *Zij $\mathcal{C}$ een categorie met objecten A, B en C en morfismen $f : A \to B$ en $h : A \to C$. Een* pushout *van f en h is een tripel (D, g, j) bestaande uit een object $D \in \mathcal{C}$ en morfismen $f : B \to D$ en $j : C \to D$ zodat het diagram*

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & D \\
 & C \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

commuteert, met de volgende eigenschap: voor elke $E \in \mathcal{C}$ met morfismen $g' : B \to E$ en $j' : C \to E$ zodanig dat $g' \circ f = j' \circ h$, bestaat er een unieke $k : D \to E$ zodat het volgende diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, bend left, "g'"] & & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & D \arrow[r, dashed, "k"] & E \\
 & C \arrow[ur, "j"'] \arrow[urr, bend right, "j'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Net als bij het product en het coproduct is een pushout uniek op een uniek isomorfisme na. Hierdoor kunnen pushouts vaak gebruikt worden om aan te tonen dat twee objecten isomorf zijn.

Voorbeeld 2.2.2. Bekijk de categorie **Ab** van abelse groepen. Om een pushout van afbeeldingen $f : A \to B$ en $h : A \to C$ te vinden hebben we een object nodig waar we zowel B als C naartoe kunnen afbeelden. Men denkt dan al snel aan het coproduct. We krijgen zo het volgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, "i_0"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \times C \\
& C \arrow[ur, "j_0"'] &
\end{tikzcd}$$

Hierbij zijn i_0 en j_0 de voor de hand liggende inclusieafbeeldingen. In het algemeen commuteert dit diagram echter niet. Wanneer een $a \in A$ geen element van de kern van f of h is, geldt namelijk $i_0(f(a)) = (f(a), 0) \neq (0, h(a)) = j_0(h(a))$.

We concluderen dat het tripel $(B \times C, i_0, j_0)$ geen pushout is van f en g. Wel kunnen we de groep $B \times C$ uitdelen naar een handig gekozen ondergroep zodat het bovenstaande diagram commuteert. Hiervoor willen we dat geldt $(f(a), 0) = (0, h(a))$, oftewel $(f(a), -h(a)) = 0$. Als we $B \times C$ nu uitdelen naar de verzameling $K := \{(f(a), -h(a)) \in B \times C | a \in A\}$ (van deze verzameling is eenvoudig te verifiëren dat het een ondergroep is van $B \times C$), krijgen we precies wat we willen.

Definieer de quotiëntafbeelding $q : B \times C \to (B \times C)/K, (b, c) \mapsto (b, c) + K$ en de morfismen $i := q \circ i_0$ en $j := q \circ j_0$. We hebben nu het diagram

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, "i_0"] \arrow[drr, bend left, "i"] & & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \times C \arrow[r, "q"] & (B \times C)/K \\
& C \arrow[ur, "j_0"'] \arrow[urr, bend right, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

waarbij geldt $i \circ f = j \circ h$. In de volgende propositie zal bewezen worden dat $((B \times C)/K, i, j)$ een pushout is van f en h.

Propositie 2.2.3. *Beschouw objecten A, B en C in de categorie* **Ab** *van abelse groepen, met morfismen $f : A \to B$ en $h : A \to C$. Definieer morfismen*

$$\begin{aligned}
i :& \quad B \longrightarrow (B \times C)/K, \qquad b \mapsto (b, 0) + K \\
j :& \quad C \longrightarrow (B \times C)/K, \qquad b \mapsto (0, c) + K
\end{aligned}$$

waarbij $K := \{(f(a), -h(a)) \in B \times C | a \in A\}$. Het tripel $((B \times C)/K, i, j)$ is een pushout van f en h.

Bewijs. Beschouw de situatie van voorbeeld 2.2.2. Zij D een object met morfismen $k : B \to D$ en $l : C \to D$ zodanig dat $k \circ f = l \circ h$. We hebben hier de volgende situatie:

$$\begin{tikzcd}
& D & \\
B \arrow[ur, "k"] \arrow[r, "i_0"'] & B \times C & C \arrow[ul, "l"'] \arrow[l, "j_0"]
\end{tikzcd}$$

Omdat $((B \times C), i_0, j_0)$ het coproduct is van B en C, bestaat er een unieke $g : B \times C \to D$ zodanig dat $k = g \circ i_0$ en $l = g \circ j_0$. Merk op dat $K \subset \ker(g)$. Er geldt namelijk

$$g(f(a), -h(a)) = g(f(a), 0) - g(0, h(a)) = k(f(a)) - l(h(a)) = 0$$

voor alle $a \in A$. De homomorfiestelling voor groepen zegt nu dat er een unieke $m : (B \times C)/K \to D$ bestaat zodanig dat het volgende diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd}
B \times C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & D \\
(B \times C)/K \arrow[ur, dashed, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Dit geeft ons het volgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, "i_0"] \arrow[rr, bend left, "i"] \arrow[rrr, bend left=50, "k"] & & & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \times C \arrow[r, "q"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & (B \times C)/K \arrow[r, "m"] & D \\
& C \arrow[ur, "j_0"'] \arrow[urr, bend right, "j"'] \arrow[urrr, bend right=50, "l"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Nu rest ons nog aan te tonen dat geldt $k = m \circ i$ en $l = m \circ j$ en dat m uniek is. Voor alle $b \in B$ geldt $(m \circ i)(b) = (m \circ q \circ i_0)(b) = (g \circ i_0)(b) = k(b)$. Analoog is aan te tonen dat geldt $l = m \circ j$. Stel nu dat er een m' bestaat zodanig dat $k = m' \circ i$ en $l = m' \circ j$. Dan geldt $k = m' \circ q \circ i_0$ en $l = m' \circ q \circ j_0$. We concluderen dat het diagram

$$\begin{tikzcd}
& D & \\
B \arrow[ur, "k"] \arrow[r, "i_0"'] & B \times C \arrow[u, "m' \circ q"] & C \arrow[ul, "l"'] \arrow[l, "j_0"]
\end{tikzcd}$$

commuteert. Hieruit volgt $m' \circ q = g$, want g was uniek. We wisten echter al $m \circ q = g$. Uit de surjectiviteit van q volgt nu $m = m'$. $\square$

Voorbeeld 2.2.4. Bekijk de categorie **Grp** van groepen. De pushout van $f : A \to B$ en $h : A \to C$ wordt gegeven door

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "i"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & (B * C)/K \\ & C \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

waarbij K de kleinste normale ondergroep van het vrije product $B * C$ is die $\{f(a)h(a)^{-1} | a \in A\}$ bevat, met i en j de natuurlijke morfismen.

Voorbeeld 2.2.5. Bekijk de categorie **Top** van topologische ruimtes. Zij X een topologische ruimte en $U, V \subset X$ open zodanig dat $U \cup V = X$. Dan geeft het volgende diagram een pushout:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, hook, "i_2"] & \\ U \cap V \arrow[ur, hook, "i_1"] \arrow[dr, hook, "j_1"'] & & X \\ & V \arrow[ur, hook, "j_2"'] & \end{tikzcd}$$

Om dit aan te tonen nemen we een topologische ruimte Y met morfismen $f : U \to Y$ en $g : V \to Y$ zodanig dat $f \circ i_1 = g \circ j_1$. We moeten nu aantonen dat er een unieke $h : X \to Y$ bestaat zodanig dat het volgende diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "i_2"] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\ U \cap V \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "j_1"'] & & X \arrow[r, "h"] & Y \\ & V \arrow[ur, "j_2"'] \arrow[urr, bend right, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

Stel voor de uniciteit dat $h_1, h_2 : X \to Y$ voldoen. Voor $x \in U$ geldt $h_1(x) = h_1(i_2(x)) = f(x) = h_2(i_2(x)) = h_2(x)$ en voor $x \in V$ kan analoog $h_1 = h_2$ aangetoond worden.

Definieer h als volgt:

$$h : \qquad X \longrightarrow Y, \qquad x \longmapsto \begin{cases} f(x), & x \in U \\ g(x), & x \in V \end{cases}$$

Voor $x \in U \cap V$ geldt $f(x) = f(i_1(x)) = g(j_1(x)) = g(x)$, dus h is welgedefinieerd. Ook is het duidelijk dat h het bovenstaande diagram laat commuteren. We hoeven dus alleen nog aan te tonen dat h continu is.

Zij $W \subset Y$ open. Er geldt $h^{-1}(W) = (h^{-1}(W) \cap U) \cup (h^{-1}(W) \cap V)$ met $h^{-1}(W) \cap U = i_2^{-1}(h^{-1}(W)) = f^{-1}(W)$ open in U, dus open in X, want $U \subset X$ is open en heeft de geïnduceerde topologie. Analoog is $h^{-1}(W) \cap V$ open in X, dus $h^{-1}(W)$ is open in X. We concluderen dat h continu is.

2.3 De stelling van Van Kampen

We kunnen nu de stelling van Van Kampen formuleren. Zoals in de voorbeelden later duidelijk zal worden, is dit een zeer nuttige stelling. Met het oog op voorbeeld 2.2.5 is het echter ook een leuke demonstratie van het functoriale karakter van de fundamentaalgroep. Het bewijs van de stelling is een niet al te spannende exercitie in het opknippen van paden en zal hier niet gegeven worden. Enthousiaste lezers kunnen het bewijs van deze stelling vinden in het boek van Hatcher[2] als stelling 1.20.

Stelling 2.3.1 (Van Kampen)**.** *Zij X een topologische ruimte, $U, V \subset X$ open en $U, V, U \cap V$ padsamenhangend met $x_0 \in U \cap V$. Dan geeft het volgende diagram een pushout in de categorie van groepen:*

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(U, x_0) \arrow[dr, "(i_2)_*"] & \\ \pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[ur, "(i_1)_*"] \arrow[dr, "(j_1)_*"'] & & \pi_1(X, x_0) \\ & \pi_1(V, x_0) \arrow[ur, "(j_2)_*"'] & \end{tikzcd}$$

□

In het bijzonder kunnen we door te kijken naar voorbeeld 2.2.4 zien dat geldt

$$\pi_1(X, x_0) = (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0))/K,$$

met $K = \langle \{ i_1([\gamma]) j_1([\gamma])^{-1} | [\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x_0) \} \rangle$. In de volgende voorbeelden zullen wat toepassingen van de stelling gegeven worden.

Voorbeeld 2.3.2. De stelling van Van Kampen geeft een manier om aan te tonen dat S^2 een triviale fundamentaalgroep heeft. Hiervoor halen we twee punten, de noordpool n en de zuidpool z, uit de 2-sfeer. De verzamelingen $S^2 \setminus \{n\}, S^2 \setminus \{z\} \subset S^2$ zijn open en $S^2 \setminus \{n\}, S^2 \setminus \{z\}, S^2 \setminus \{n, z\}$ zijn padsamenhangend. Omdat S^2 zonder één punt homeomorf is met $\mathbb{R}^2$ middels stereografische projectie, weten we $\pi_1(S^2 \setminus \{n\}, x_0) = \{0\} = \pi_1(S^2 \setminus \{z\}, x_0)$. De stelling van Van Kampen zegt nu dat de fundamentaalgroep van S^2 er als volgt uitziet:

$$\pi_1(S^2, x_0) = (\pi_1(S^2 \setminus \{n\}, x_0) * \pi_1(S^2 \setminus \{z\}, x_0))/\{0\} = \{0\}$$

Voorbeeld 2.3.3. Twee cirkels die op een punt aan elkaar zijn geplakt hebben een fundamentaalgroep die isomorf is met $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Wiskundig definiëren we deze topologische ruimte door in de disjuncte vereniging $S^1 \sqcup S^1$ de basispunten $(1, 1)$ en $(1, 2)$ met elkaar te identificeren. Het resultaat noemen we X. We kunnen intuïtief zien dat we voor U een open omgeving van $S^1 \times \{0\}$ kunnen nemen zodanig dat $U \neq X$, bijvoorbeeld $U = X - \{(-1, 1)\}$. Voor V kiezen we $V = X - \{(-1, 0)\}$. Dan heeft $U \cap V$ een triviale fundamentaalgroep. Wetende dat geldt $\pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}$, vinden we nu door middel van de stelling van Van Kampen

$$\pi_1(X, x_0) = (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0))/\{0\} = \pi_1(S^1, x_0) * \pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

3 Vezelbundels

Voor het bewijs van de hoofdstelling zullen we zien dat vezelbundels verschillende toepassingen hebben. In dit hoofdstuk werken we toe naar een resultaat dat vezelbundels koppelt aan fundamentaalgroepen en exacte rijen. Later zullen we vezelbundels echter ook gebruiken om het bewijs van de hoofdstelling te reduceren tot een specifieker geval.

3.1 Vezelbundels

Informeel is een vezelbundel een topologische ruimte die lokaal lijkt op een productruimte. De abstracte definitie is als volgt:

Definitie 3.1.1. *Een* vezelbundel *bestaat uit drie topologische ruimtes E, B, F en een continue afbeelding $p : E \to B$ zodat elke $x \in B$ een open omgeving $U \subset B$ heeft zodanig dat er een homeomorfisme $h : p^{-1}(U) \to U \times F$ bestaat waarvoor*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "\alpha"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

commuteert. Hier is $\alpha : U \times F \to U$ de projectie op de eerste coördinaat. De ruimte F wordt ook wel de vezel *genoemd.*

Merk op dat $\{x\} \times F$ homeomorf is met F voor alle $x \in B$. Zij $x \in U \subset B$ met U open en $h : p^{-1}(U) \to U \times F$ een homeomorfisme zodanig dat het diagram commuteert. Voor alle $y \in p^{-1}(\{x\})$ geldt $\alpha(h(y)) = x$, dus $p^{-1}(\{x\})$ wordt door h homeomorf afgebeeld op $\{x\} \times F$. Elke vezel $p^{-1}(\{x\})$ boven een element $x \in B$ is dus homeomorf met F. Ieder homeomorfisme van F naar $p^{-1}(\{x\})$ geeft een inclusie van F in E. Een vezelbundel wordt dan ook vaak genoteerd met $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$. Merk op dat deze notatie fout is als $B = \emptyset$.

Voorbeeld 3.1.2. Laten B en F topologische ruimtes zijn en $p : F \times B \to B$ de projectie op de tweede coördinaat. Dan is eenvoudig te zien dat $F \longrightarrow F \times B \xrightarrow{p} B$ een vezelbundel is. Kies namelijk $U = B$ en de commutativiteit van het diagram zal je vragen een homeomorfisme tussen $B \times F$ en $B \times F$ te vinden. Een vezelbundel van deze vorm wordt een *triviale bundel* genoemd.

Voorbeeld 3.1.3. Neem $p : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), (a,b) \mapsto (a : b)$ met vezel $F = \mathbb{C}^*$. Neem voor een $(a,b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ zonder verlies van algemeenheid aan dat geldt $b \neq 0$. Definieer nu $U := \{(a : b) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) | b \neq 0\}$. Een homeomorfisme van $p^{-1}(U) = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} | b \neq 0\}$ naar $U \times \mathbb{C}^*$ wordt gegeven door $(a,b) \mapsto ((a : b), b)$. Het is eenvoudig na te gaan dat

$$\begin{tikzcd} \{(a,b) | b \neq 0\} \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{C}^* \arrow[dl, "\alpha"] \\ & \{(a : b) | b \neq 0\} & \end{tikzcd}$$

commuteert en dat h ook echt een homeomorfisme is. De vezelbundel $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ wordt ook wel de *Hopf-bundel* genoemd.

Definitie 3.1.4. *Laten E en B topologische ruimtes zijn met afbeelding $p : E \to B$. Dan heeft p de* homotopielifteigenschap *ten opzichte van een paar ruimtes (X, Y), waarbij $Y \subset X$, als het volgende geldt: voor alle $f : X \times I \to B$ en voor alle $\tilde{f}_0 : X \to E$ en $g : Y \times I \to E$ zodanig dat het diagram*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "x \mapsto (x,0)"'] & X \arrow[r, "\tilde{f}_0"] \arrow[d, "x \mapsto (x,0)"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "i_2"] \arrow[urr, "g"] & X \times I \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

commuteert, bestaat er een $\tilde{f} : X \times I \to E$ zodanig dat

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "x \mapsto (x,0)"'] & X \arrow[r, "\tilde{f}_0"] \arrow[d, "x \mapsto (x,0)"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "i_2"] \arrow[urr, "g"] & X \times I \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & B
\end{tikzcd}$$

commuteert.

Informeel gezegd betekent bovenstaande definitie dat een lift op het domein $Y \times I$ uitgebreid kan worden naar een lift op $X \times I$.

De volgende propositie kan, inclusief bewijs, gevonden worden als propositie 4.48 in het boek van Hatcher[2].

Propositie 3.1.5. *Zij $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ een vezelbundel. Dan heeft p de homotopielifteigenschap ten opzichte van alle CW-complexen (X, Y). In het bijzonder geldt dit voor $Y = \partial X$ met $X = I$ of $X = I^2$.* □

Deze propositie geeft het verband weer tussen vezelbundels en de homotopielifteigenschap en zal in de volgende paragraaf veelvuldig gebruikt worden.

3.2 Een exacte rij van homotopiegroepen

Een mooie eigenschap van vezelbundels is dat er exacte rijen mee gevormd kunnen worden.

Stelling 3.2.1. *Laat $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ een vezelbundel zijn. Zij $b \in B$ en zij $i : F \to p^{-1}(\{b\}) \subset E$ een homeomorfisme. Zij $f \in F$ en laat $e := i(f)$. Neem aan dat F padsamenhangend is. Dan bestaat er een exacte rij*

$$\pi_2(B, b) \xrightarrow{\partial} \pi_1(F, f) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, e) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b) \longrightarrow \pi_0(F, f).$$

Bewijs. In dit bewijs wordt een constant pad $I \to X, t \mapsto c$ genoteerd met c. Voor een homotopie $h : X \times I \to Y$ noteren we met h_0 de functie gegeven door $x \mapsto h(x, 0)$ en met h_1 de functie gegeven door $x \mapsto (x, 1)$.

We gaan eerst aantonen dat de kern van $\pi_1(B, b) \to \pi_0(F, f)$ gelijk is aan het beeld van p_*. Merk op dat $\pi_0(F, f) = \{0\}$, omdat F padsamenhangend is. Zij $\gamma : I \to B$ met $\gamma(0) = \gamma(1) = b$ en zij $\tilde{\gamma}_0 : \{0\} \to E, x \mapsto e$. Definieer $X = \{0\}, Y = \varnothing$. We hebben:

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] \arrow[d] \arrow[drr, phantom] & \{0\} \arrow[r, "\tilde{\gamma}_0"] \arrow[d, "x \mapsto 0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
\varnothing \arrow[r] \arrow[urr, bend left] & I \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\gamma}"'] & B
\end{tikzcd}$$

Er bestaat dus een pad $\tilde{\gamma} : I \to E$ met $\tilde{\gamma}(0) = e$ en $\tilde{\gamma}(1) \in F$ (want $p(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = b$). Neem $\alpha : I \to F$ met $\alpha(0) = \tilde{\gamma}(1)$ en $\alpha(1) = e$. Dan geldt $p_*([\tilde{\gamma} \odot \alpha]) = [p \circ (\tilde{\gamma} \odot \alpha)] = [\gamma]$. Afbeelding p_* is dus surjectief.

We gaan nu aantonen dat geldt $\operatorname{im}(i_*) = \ker(p_*)$. Zij $\gamma : I \to E$ met $\gamma(0) = \gamma(1) = e$ en $\alpha : I \to F$ met $i_*([\alpha]) = [\gamma]$. Dan geldt $p_*([\gamma]) = p_*(i_*([\alpha])) = [p \circ i \circ \alpha] = [b]$. Hieruit volgt $\operatorname{im}(i_*) \subset \ker(p_*)$.

Zij $\gamma : I \to E$ met $\gamma(0) = \gamma(1) = e$ en $p_*([\gamma]) = [p \circ \gamma] = [b]$. Zij $h : I \times I \to B$ een weghomotopie tussen $p \circ \gamma$ en b, met $h_0 = p \circ \gamma$ en $h_1 = b$, en definieer $(\partial I) \times I \to E, x \mapsto e$. Neem $X = I$ en $Y = \partial X$. We hebben:

$$\begin{tikzcd}
\partial I \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "x \mapsto (x,0)"'] & I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "x \mapsto (x,0)"'] & E \arrow[d, "p"] \\
(\partial I) \times I \arrow[r, "i_2"] \arrow[urr, bend left, "x \mapsto e"'] & I \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{h}"'] & B
\end{tikzcd}$$

Er bestaat dus een $\tilde{h} : I \times I \to E$ met $\tilde{h}_0 = \gamma$ die dit diagram laat commuteren. Voor $\tilde{h}_1$ geldt $p \circ \tilde{h}_1 = h_1$, dus $\tilde{h}_1$ is een pad in F. We concluderen dat $\tilde{h}$ een weghomotopie is tussen γ en $\tilde{h}_1$, waaruit volgt $i_*([\tilde{h}_1]) = [\tilde{h}_1] = [\gamma]$. We vinden zo $\ker(p_*) \subset \operatorname{im}(i_*)$.

We gaan nu de afbeelding ∂ construeren. Laat $\alpha : I \times I \to B$ met $\alpha(\partial(I \times I)) = \{b\}$. Neem $X = I$ en $Y = \partial I$. We hebben:

$$\begin{tikzcd}
\partial I \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "x \mapsto (x,0)"'] & I \arrow[r, "x \mapsto e"] \arrow[d, "x \mapsto (x,0)"'] & E \arrow[d, "p"] \\
(\partial I) \times I \arrow[r, "i_2"] \arrow[urr, bend left, "x \mapsto e"'] & I \times I \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\alpha}"'] & B
\end{tikzcd}$$

Er bestaat dus een $\tilde{\alpha} : I \times I \to E$ met $\tilde{\alpha}_0 = e$ die dit diagram laat commuteren. Voor $\tilde{\alpha}_1$ geldt $p \circ \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 = b$, dus $\tilde{\alpha}_1 : I \to F$. We definiëren nu afbeelding ∂ als volgt:

$$\partial : \qquad \pi_2(B,b) \longrightarrow \pi_1(F,f), \qquad [\alpha] \longmapsto [\tilde{\alpha}_1]$$

Om aan te tonen dat deze afbeelding ook welgedefinieerd is, moeten er twee claims bewezen worden.
Claim: $\partial([\alpha])$ is onafhankelijk van de keuze van $\tilde{\alpha}$.
Bewijs. Laat $\tilde{\alpha}'$ ook een lift zijn. Neem $X = I \times I$ en $Y = \partial X$. Definieer $h : I \times I \times I \to B, (x,t,s) \mapsto \alpha(x,s)$ en

$$f : \qquad \partial(I \times I) \times I \longrightarrow E, \qquad (x,t,s) \longmapsto \begin{cases} \tilde{\alpha}(x,s), & t = 0 \\ \tilde{\alpha}'(x,s), & t = 1 \\ e, & x \in \{0,1\} \end{cases} .$$

We hebben:

$$\begin{tikzcd}
\partial(I \times I) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "{(x,t) \mapsto (x,t,0)}"'] & I \times I \arrow[r, "{(x,t) \longmapsto e}"] \arrow[d, "{(x,t) \mapsto (x,t,0)}"'] & E \arrow[d, "p"] \\
\partial(I \times I) \times I \arrow[r, "i_2"] \arrow[urr, bend right, "f"] & I \times I \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{h}"'] & B
\end{tikzcd}$$

Er is dus een $\tilde{h} : I \times I \times I \to E$ met $\tilde{h}_1(x,0) = \tilde{\alpha}_1(x)$ en $\tilde{h}_1(x,1) = \tilde{\alpha}'_1(x)$, waarbij $\tilde{h}_1(0,t) = \tilde{h}_1(1,t) = e$. Dan is $\tilde{h}_1$ een weghomotopie tussen $\tilde{\alpha}_1$ en $\tilde{\alpha}'_1$, met $\tilde{h}_1 : I \to F$, want $p \circ \tilde{h}_1 = h_1 = b$. We concluderen $[\tilde{\alpha}_1] = [\tilde{\alpha}'_1]$. ■

De tweede claim is van eenzelfde aard.
Claim: $\partial([\alpha])$ is onafhankelijk van de keuze van $\alpha \in [\alpha]$.
Bewijs. Zij $\alpha, \alpha' \in [\alpha]$ met $h : I \times I \times I \to B$ een homotopie russen α en α', waarbij $h(x,0,s) = \alpha(x,s)$ en $h(x,1,s) = \alpha'(x,s)$. Laat $\tilde{\alpha}$ een lift zijn van α en $\tilde{\alpha}'$ een lift van α' en neem $X = I \times I$ en $Y = \partial X$. Definieer f zoals in de vorige claim. De rest van het bewijs is identiek aan het bewijs van de vorige claim. ■

Nu we weten dat ∂ welgedefinieerd is, kunnen we de gelijkheid $\mathrm{Im}(\partial) = \ker(i_*)$ aantonen. Zij daarvoor $[\gamma] \in \pi_1(F,f)$ met $[\alpha] \in \pi_2(B,b)$ zodanig dat $\partial([\alpha]) = [\tilde{\alpha}_1] = [\gamma]$. Dan is $\tilde{\alpha}$ een homotopie tussen $\tilde{\alpha}_1$ en e. Hieruit volgt $i_*([\gamma]) = [\gamma] = [\tilde{\alpha}_1] = [e]$, dus $[\gamma] \in \ker(i_*)$.

Zij nu $\gamma : I \to F$ met $\gamma(0) = \gamma(1) = e$ en $i_*([\gamma]) = [e]$. Dan is er een homotopie $\tilde{\alpha} : I \times I \to E$ tussen γ en e met $\tilde{\alpha}_0 = e$ en $\tilde{\alpha}_1 = \gamma$. Dan is $\tilde{\alpha}$ een lift van $\alpha := p \circ \tilde{\alpha} : I \times I \to B$, waarbij geldt

$$\begin{aligned}
\alpha(0,t) &= p(\tilde{\alpha}(0,t)) = p(e) = b \\
\alpha(1,t) &= p(\tilde{\alpha}(1,t)) = p(e) = b \\
\alpha(x,0) &= p(\tilde{\alpha}(x,0)) = p(e) = b \\
\alpha(x,1) &= p(\tilde{\alpha}(x,1)) = p(\gamma(x)) = b \qquad\qquad (\text{want } \gamma(x) \in F).
\end{aligned}$$

We vinden $[\alpha] \in \pi_2(B,b)$ en $\partial([\alpha]) = [\tilde{\alpha}_1] = [\gamma]$, dus $[\gamma] \in \mathrm{Im}(\partial)$. We concluderen $\mathrm{Im}(\partial) = \ker(i_*)$, wat het bewijs afsluit. □

Deze stelling is zelfs uit te breiden tot hogere homotopiegroepen. Zie hiervoor stelling 4.41 van Hatcher [2]. In het bewijs van de stelling van Zariski-van Kampen is dit echter niet van belang.

4 De fundamentaalgroep van het complement van een vlakke kromme

Nu de benodigde theorie over vezelbundels is behandeld, is het tijd om te kijken naar de stelling die bewezen moet worden.

Stelling 4.0.1 (Zariski-van Kampen)**.** *Zij $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ een gladde kromme van graad $d > 0$ in de 2-dimensionale complexe projectieve ruimte en laat $x_0 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C$ een basispunt zijn. Dan geldt*

$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C, x_0) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

Om deze stelling te bewijzen moet er veelvuldig gebruik worden gemaakt van vezelbundels. Allereerst zullen we aantonen dat $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C, x_0)$ niet afhangt van de keuze van C.

Lemma 4.0.2. *Laten $C, D \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ gladde krommen zijn, beide van graad $d > 0$, met basispunten $x_0 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C$ en $x_1 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - D$. Dan geldt $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - D, x_1)$.*

Bewijs. Beschouw de $\mathbb{C}$-vectorruimte $\mathbb{C}[x, y, z]_d$ van homogene polynomen van graad d. Iedere f in $\mathbb{C}[x, y, z]_d - \{0\}$ definieert een kromme $C(f)$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Er is een polynomiale functie discr op $\mathbb{C}[x, y, z]_d$ waarvan de nulpunten in $\mathbb{C}[x, y, z]_d - \{0\}$ precies de niet gladde krommen zijn, zie hoofdstuk 13, sectie 1.D van het boek van Gelfand, Kapranov en Zelevinsky[3]. Voor $d = 1$ is discr constant en ongelijk aan nul, en voor $d > 1$ is discr irreducibel. De genoemde eigenschappen maken discr uniek op vermenigvuldiging met constanten ongelijk aan nul na.

Laat nu $G_d = \mathbb{C}[x, y, z]_d - \{f \in \mathbb{C}[x, y, z]_d : \mathrm{discr}(f) = 0\}$ en definieer $C_d = \{(P, f) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times G_d : f(P) = 0\}$ en $U_d = (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times G_d) - C_d$ samen met de projectie $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times G_d \to G_d$. Beschouw nu het volgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
U_d \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2|_{U_d}"'] & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times G_d \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & C_d \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2|_{C_d}"] \\
& G_d &
\end{tikzcd}$$

We willen uiteindelijk bewijzen dat $\mathrm{pr}_2|_{U_d} : U_d \to G_d$ een vezelbundel is. Dan zijn alle vezels homeomorf. Deze vezels zijn precies de complementen van gladde krommen in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Een probleem hierbij is dat de vezels van $\mathrm{pr}_2|_{U_d}$ niet compact zijn. We zullen daarom de compactheid van de vezels van pr_2 en $\mathrm{pr}_2|_{C_d}$ gebruiken om te bewijzen dat $\mathrm{pr}_2|_{U_d}$ een vezelbundel is.

De continuïteit van discr impliceert dat G_d open is in $\mathbb{C}[x, y, z]_d$, en zo ook is C_d gesloten en is U_d open in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times G_d$. Dan zijn G_d en U_d reële manifolds. Omdat C_d gegeven wordt door één vergelijking, waarvan de partiële afgeleiden naar x, y en z geen gemeenschappelijke nulpunten hebben op C_d, is ook C_d een manifold, en is de afbeelding $\mathrm{pr}_2|_{C_d}$ een submersie (voorkennis uit het college Introduction to Manifolds komt hier van pas).

We gaan aantonen dat G_d samenhangend is. De Fermatkromme van graad d (gegeven door $x^d + y^d = z^d$) is glad, dus is G_d niet leeg. Neem nu aan dat f en g in G_d zijn, en verschillend zijn. Laat L de complexe lijn door f en g zijn. Dan is $L \cap G_d$ het complement in L van een eindige verzameling (de eindig vele nulpunten van discr op L), dus is $L \cap G_d$ boogsamenhangend. We concluderen dat G_d samenhangend is.

Nu passen we stelling 2.62 en definitie 2.50 van het artikel van Epping[4] toe. Die stelling heeft als aanname dat C_d reële codimensie één heeft in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times G_d$, echter deze aanname wordt in het bewijs nooit gebruikt en correspondentie met de heer Epping bevestigde dit. De stelling zegt dan dat pr_2 en $\mathrm{pr}_2|_{C_d}$ vezelbundels zijn omdat ze submersies zijn met compacte vezels (de stelling van Ehresmann), en dat ook $\mathrm{pr}_2|_{U_d}$ een vezelbundel is.

Aangezien alle vezels van $\mathrm{pr}_2|_{U_d}$ homeomorf zijn, vinden we voor alle $f, g \in G_d$ inderdaad $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C(f), x_0) \cong \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C(g), x_1)$. □

In het volgende lemma zal de blowup van $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ in een punt P_0 centraal staan. Zij $P_0 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ een punt en L_0 een lijn met $P_0 \notin L_0$. We definiëren de blowup $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ als volgt:

$$\widetilde{\mathbb{P}^2} = \{(P, Q) : P \in \mathbb{P}^2, Q \in L_0, P \in \overline{P_0 Q}\} \subset \mathbb{P}^2 \times L_0$$

Hier is $\overline{P_0 Q}$ de lijn die P_0 met Q verbindt. Definieer ook de volgende projecties:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{pr}}_1 : \quad & \widetilde{\mathbb{P}^2} \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \qquad & (P, Q) \longmapsto P \\ \widetilde{\mathrm{pr}}_2 : \quad & \widetilde{\mathbb{P}^2} \longrightarrow L_0, \qquad & (P, Q) \longmapsto Q \end{aligned}$$

Omdat het volgende lemma en het bewijs ervan slechts gebruik maken van padsamenhangende ruimtes, zal voor de leesbaarheid het basispunt van de fundamentaalgroep achterwege gelaten worden.

Lemma 4.0.3. *Zij $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ een homogene kromme van graad $d > 0$ en $P_0 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C$ een punt. Zij $L_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - \{P_0\}$ een lijn en zij $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ de blowup in P_0. Definieer $\widetilde{C} = \widetilde{\mathrm{pr}}_1^{-1}(C)$. Dan geldt*

$$\pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C}) \cong \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C).$$

Bewijs. Om aan te tonen dat de fundamentaalgroepen isomorf zijn, gaan we tweemaal de stelling van Van Kampen toepassen. Eerst gaan we aantonen dat geldt $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C) \cong \pi_1(\mathbb{P}^2 - C - \{P_0\})$. Beschouw hiertoe de open verzamelingen $U = \mathbb{P}^2 - C - \{P_0\}$ en $V = B_\varepsilon(P_0)$, waarbij $B_\varepsilon(P_0)$ de open bal rond P_0 met straal ε is. Kies hierbij $\varepsilon > 0$ klein genoeg, zodat $V \cap C = \emptyset$. De doorsnijding $U \cap V = B_\varepsilon(P_0) - \{P_0\}$ is padsamenhangend, met triviale fundamentaalgroep. Volgens de stelling van Van Kampen geldt nu

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 - C) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \pi_1(U) \cong \pi_1(\mathbb{P}^2 - C - \{P_0\}).$$

Omdat de projectie $\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C} - \widetilde{\mathrm{pr}}_1^{-1}(\{P_0\}) \to \mathbb{P}^2 - C - \{P_0\}$ op de eerste coördinaat een homeomorfisme is, krijgen we

$$\pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C} - \widetilde{\mathrm{pr}}_1^{-1}(\{P_0\})) \cong \pi_1(\mathbb{P}^2 - C - \{P_0\}).$$

Definieer nu de open verzamelingen $U' = \widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C} - \widetilde{\mathrm{pr}}_1^{-1}(\{P_0\})$ en $V' = \widetilde{\mathrm{pr}}_1^{-1}(V)$. Ook hier geldt dat $U' \cap V' = V' - \widetilde{\mathrm{pr}}_1^{-1}(\{P_0\})$ padsamenhangend is met triviale fundamentaalgroep. Merk ook op dat $\pi_1(V') = 0$. Volgens de stelling van Van Kampen geldt nu

$$\pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C}) \cong \pi_1(U') * \pi_1(V') \cong \pi_1(U') \cong \pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C} - \widetilde{\mathrm{pr}}_1^{-1}(\{P_0\})).$$

We concluderen nu

$$\pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C}) \cong \pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C} - \widetilde{\mathrm{pr}}_1^{-1}(\{P_0\})) \cong \pi_1(\mathbb{P}^2 - C - \{P_0\}) \cong \pi_1(\mathbb{P}^2 - C).$$

□

We hebben nu de hulpmiddelen om stelling 4.0.1 te bewijzen.

Bewijs van stelling 4.0.1. Ook in dit bewijs zal ter bevordering van de leesbaarheid het basispunt van de fundamentaalgroep weggelaten worden. Beschouw de Fermatkromme C in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ van graad d, gegeven door $x^d + y^d = z^d$. Merk op dat voor alle d de Fermatkromme glad is. We gaan $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C)$ uitwerken voor deze kromme en vervolgens bovenstaande lemma's gebruiken om te generaliseren naar een willekeurig gegeven kromme. Kies $P_0 = (0 : 1 : 0) \notin C$ en L_0 gegeven door $y - z = 0$. Definieer de projectie $\mathrm{pr} : C \to L_0$ vanuit P_0 op L_0. We bekijken de inverse beelden van deze projectie.

Voor $\mathrm{pr}^{-1}(\{(0:1:1)\})$ bekijken we de lijn $\{(0 : a+b : a) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})\}$ door $(0 : 1 : 1)$ en $(0 : 1 : 0)$. We hebben $\mathrm{pr}^{-1}(\{(0:1:1)\}) = \{(0 : a+b : a) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})\} \cap C$. Dit zijn alle punten $(0 : a+b : a)$ met $(a+b)^d = a^d$. Als we nu opmerken dat $a \neq 0$, vinden we $\mathrm{pr}^{-1}(\{(0:1:1)\}) = \{(0 : 1+b : 1) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : (1+b)^d = 1\}$. Dit zijn d punten.

Voor $\mathrm{pr}^{-1}(\{(1:0:0)\})$ bekijken we de lijn $\{(a : b : 0) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})\}$ door $(1 : 0 : 0)$ en $(0 : 1 : 0)$. We hebben $\mathrm{pr}^{-1}(\{(1:0:0)\}) = \{(a : b : 0) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : a^d + b^d = 0\}$. Er geldt $a \neq 0$, dus we kunnen a schalen naar 1. We krijgen als $\mathrm{pr}^{-1}(\{(1:0:0)\})$ alle punten $(1 : b : 0)$ met $1 + b^d = 0$. Dit zijn d punten.

Voor $\mathrm{pr}^{-1}(\{(x:1:1)\})$ bekijken we de lijn $\{(ax : a+b : a) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})\}$ tussen $(x : 1 : 1)$ en $(0 : 1 : 0)$. We vinden $\mathrm{pr}^{-1}(\{(x:1:1)\}) = \{(ax : a+b : a) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : ax^d + (a+b)^d = a^d\}$. Als voor een punt $(a : b : c) \in \mathrm{pr}^{-1}(\{(x:1:1)\})$ geldt $c = 0$, dan volgt daaruit $a = b = 0$, dus $c \neq 0$. Als we nu c schalen naar 1, krijgen we $\mathrm{pr}^{-1}(\{(x:1:1)\}) = \{(x : 1+b : 1) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : x^d + (1+b)^d = 1\}$. Voor $x^d \neq 1$ krijgen we $(1+b)^d = 1 - x^d \neq 0$, dus dan bestaat $\mathrm{pr}^{-1}(\{(x:1:1)\})$ uit d punten. Voor $x^d = 1$ krijgen we $(1+b)^d = 0$, dus $b = -1$ en $\mathrm{pr}^{-1}(\{(x:0:1)\})$ bestaat uit 1 punt.

Definieer nu $\Sigma = \{(\zeta : 1 : 1) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : \zeta^d = 1\}$. Dan geeft de projectie $p_1 : C - \mathrm{pr}^{-1}(\Sigma) \to L_0 - \Sigma$ een vezelbundel met vezel d punten. Laat $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ de blowup van $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ in het punt P_0 zijn en definieer $\widetilde{C} = \widetilde{\mathrm{pr}}_1^{-1}(C)$. Omdat $C - \mathrm{pr}^{-1}(\Sigma)$ homeomorf is met $\widetilde{C} - \widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\Sigma)$ middels $(a : b : c) \mapsto ((a : b : c), \overline{(a : b : c)P_0} \cap L_0)$, geeft de projectie $\widetilde{p}_1 : \widetilde{C} - \widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\Sigma) \to L_0 - \Sigma$ op de tweede coördinaat een vezelbundel met vezel d punten. Het is eenvoudig in te zien dat $\widetilde{p}_0 : \widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\Sigma) \to L_0 - \Sigma$ een vezelbundel is met vezel isomorf met $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

We hebben nu het volgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C} - \widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\Sigma) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\widetilde{p}_2"'] & \widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\Sigma) \arrow[d, "\widetilde{p}_0"] & \widetilde{C} - \widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\Sigma) \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "\widetilde{p}_1"] \\
& L_0 - \Sigma &
\end{tikzcd}$$

Uit het bovengenoemde resultaat van Epping[4] volgt dat $\widetilde{p}_2$ ook een vezelbundel is, met vezel $\widetilde{p}_2^{-1}(\{x\}) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{d \text{ punten}\}$, waarbij $x \in L_0 - \Sigma$. Volgens stelling 3.2.1 bestaat er nu een exacte rij

$$\begin{aligned}
\pi_2(L_0 - \Sigma) \to \pi_1(\widetilde{p}_2^{-1}(\{x\})) \to \pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C} - \widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\Sigma)) \\
\to \pi_1(L_0 - \Sigma) \to \pi_0(\widetilde{p}_2^{-1}(\{x\})).
\end{aligned}$$

Merk op dat $L_0 - \Sigma$ homeomorf is met $\mathbb{R}^2 - \{d-1 \text{ punten}\}$. De fundamentaalgroep hiervan wordt voortgebracht door lussen om de $d-1$ punten, vanuit een basispunt. Deze lussen kunnen zo gekozen worden dat ze disjunct zijn op het basispunt na. Dan volgt dat $\mathbb{R}^2 - \{d-1 \text{ punten}\}$ homotopie-equivalent is met $\bigvee_{i=1}^{d-1} S^1$, het boeket van $d-1$ cirkels. Dit is de vereniging van $d-1$ cirkels waarbij alle basispunten met elkaar worden geïdentificeerd. Dit boeket heeft een samentrekbare overdekking $\widetilde{X}$. Dit is namelijk de boom waarbij elke knoop $2(d-1)$ takken heeft. Elke knoop wordt afgebeeld op het basispunt van het boeket. Van elk knooppunt worden $d-1$ takken afgebeeld op de $d-1$ cirkels en worden de resterende $d-1$ takken in omgekeerde oriëntatie afgebeeld op de $d-1$ cirkels. Met behulp van propositie 4.1 van Hatcher[2] vinden we

$$\pi_2(L_0 - \Sigma) \cong \pi_2(\mathbb{R}^2 - \{d-1 \text{ punten}\}) \cong \pi_2\left(\bigvee_{i=1}^{d-1} S^1\right) \cong \pi_2(\widetilde{X}) = 0.$$

Omdat $L_0 - \Sigma$ padsamenhangend is krijgen we $\pi_0(L_0 - \Sigma) = 0$ en zo vinden we de korte exacte rij

$$0 \to \pi_1(\widetilde{p}_2^{-1}(\{x\})) \to \pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C} - \widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\Sigma)) \to \pi_1(L_0 - \Sigma) \to 0.$$

Deze rij is gesplitst. Er bestaat namelijk een sectie $L_0 - \Sigma \to \widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C} - \widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\Sigma), x \mapsto (P_0, x)$. Deze wordt door de π_1-functor behouden. Volgens stelling 10.2 uit de syllabus van Stevenhagen[5] geldt nu

$$\pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C} - \widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\Sigma)) \cong \pi_1(\widetilde{p}_2^{-1}(\{x\})) \rtimes \pi_1(L_0 - \Sigma). \qquad (*)$$

Beschouw nu de afbeelding $s_* : \pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C} - \widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\Sigma)) \to \pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C})$ geïnduceerd door de inclusieafbeelding s. Voor elke lus γ in $\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C}$ met $\gamma(I) \cap \widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\Sigma) \neq \emptyset$, kan de lus zó verschoven worden zodat $\gamma(I) \cap \widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\Sigma) = \emptyset$. Dit is mogelijk omdat $\widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\{x\})$ voor $x \in \Sigma$ isomorf is met $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, dus codimensie 2 heeft in $\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C}$. Noem deze verschoven lus γ'. Dan geldt $[\gamma] = [\gamma']$, dus $s_*([\gamma']) = [\gamma]$. Hieruit volgt dat s surjectief is.

Volgens $(*)$ is elke $[\gamma] \in \pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C} - \widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\Sigma))$ te schrijven als product van lussen in $\pi_1(\widetilde{p}_2^{-1}(\{x\}))$ en $\pi_1(L_0 - \Sigma)$, waarbij $x \in L_0 - \Sigma$. Dan wordt elke lus γ

in $L_0 - \Sigma$ door s afgebeeld op een lus in $L_0 - \{(0:1:1)\} \cong \mathbb{R}^2$, want $(0:1:1)$ is het enige punt in $L_0 \cap C$. Dit wil zeggen dat voor $[\gamma] \in \pi_1(L_0 - \Sigma)$ geldt $s_*([\gamma]) = 1$.

We gaan nu aantonen dat elk element van $\widetilde{p_2}^{-1}(\{x\})$ door s_* op hetzelfde element wordt afgebeeld. Beschouw de kromme C' in $\mathbb{C}^2$ gegeven door $a^d + b^d = 1$. Noem $D(0,1)$ de open eenheidsschijf rond $0 \in \mathbb{C}$ en definieer de functies

$$\begin{aligned} F: &\quad \mathbb{C} \times D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C} \times D(0,1), &\quad (a,b) \longmapsto (a - \mathrm{e}^{\frac{1}{d}\log(1-b^d)}, b) \\ G: &\quad \mathbb{C} \times D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C} \times D(0,1), &\quad (a,b) \longmapsto (a + \mathrm{e}^{\frac{1}{d}\log(1-b^d)}, b). \end{aligned}$$

De cruciale eigenschap van afbeelding F is dat deze de Fermatkromme lokaal 'rechttrekt', waardoor we de fundamentaalgroep van een open omgeving van $(1:0:1)$ kunnen berekenen. Merk op dat F en G continue inversen zijn van elkaar en dus homeomorfismen. Kies nu $r > 0$ klein genoeg, zodat $D(1,r) \to \mathbb{C}, a \mapsto a^d$ een injectie is. Merk ook op dat het snijpunt van $\widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\{(1:1:1)\})$ met $\widetilde{C}$ het punt $(1:0:1)$ is. Kies nu x dicht genoeg bij $(1:1:1)$ zodat de d snijpunten van $\widetilde{\mathrm{pr}}_2^{-1}(\{x\})$ met $\widetilde{C}$ in $i(D(1,r) \times D(0,1))$ liggen, waarbij

$$i: \quad \mathbb{C}^2 \longrightarrow \widetilde{\mathbb{P}^2}, \qquad (a,b) \longmapsto ((a:b:1), \overline{(0:1:0)(a:b:1)} \cap L_0)$$

de inclusieafbeelding is. We kunnen $D(1,r) \times D(0,1) \cap C'$ identificeren met $i(D(1,r) \times D(0,1)) \cap \widetilde{C}$. Laten $\gamma_1, \gamma_2 \in \widetilde{p_2}^{-1}(\{x\})$ twee lussen zijn waarvan $[\gamma_1]$ en $[\gamma_2]$ in de verzameling voortbrengers van $\pi_1(\widetilde{p_2}^{-1}(\{x\}))$ zitten. Deze lussen worden door s_* gestuurd naar zichzelf in $i(D(1,r) \times D(0,1)) - \widetilde{C}$. We kunnen $s_*([\gamma_1]), s_*([\gamma_2])$ dus identificeren met voortbrengers $[\gamma_1'], [\gamma_2'] \in \pi_1(D(1,r) \times D(0,1) - C')$. We hebben $F((D(1,r) \times D(0,1)) \cap C') = \{(0,b) : b \in D(0,1)\}$, dus

$$\begin{aligned} \pi_1((D(1,r) \times D(0,1)) - C') &\cong \pi_1((\mathbb{C} - \{0\}) \times D(0,1)) \\ &\cong \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}) \times \pi_1(D(0,1)) \cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat γ_1' en γ_2' homotoop zijn. Dan weten we dat γ_1 en γ_2 homotoop zijn in $\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C}$, dus $s_*([\gamma_1]) = s_*([\gamma_2])$. We concluderen dat alle voortbrengers van $\widetilde{p_2}^{-1}(\{x\})$ op hetzelfde element worden afgebeeld door s_*.

Omdat alle voortbrengers van $\widetilde{p_2}^{-1}(\{x\})$ op hetzelfde element worden afgebeeld, alle beelden van voortbrengers van $\pi_1(L_0 - \Sigma)$ triviaal zijn en de afbeelding s_* surjectief is, moet $\pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C})$ cyclisch zijn en $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C)$ dus ook. De voortbrengersrelatie $[\gamma_1] \cdot \ldots \cdot [\gamma_d] = 1$ van $\widetilde{p_2}^{-1}(\{x\})$ geldt nog steeds in $\pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C})$. Zij $[\gamma]$ de voortbrenger van $\pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C})$. We krijgen het volgende:

$$[\gamma]^d = s_*(\gamma_1) \cdots s_*(\gamma_d) = s_*([\gamma_1] \cdot \ldots \cdot [\gamma_d]) = s_*(1) = 1$$

Hieruit volgt dat de orde van $\pi_1(\widetilde{\mathbb{P}^2} - \widetilde{C})$, en dus ook de orde van $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C)$, een deler van d is.

Beschouw nu $S \subset \mathbb{P}^3$ gedefinieerd door $S = \{(a:b:c:e) \in \mathbb{P}^3 : e^d = a^d + b^d - c^d, e \neq 0\}$ met de afbeelding $f : S \to \mathbb{P}^2 - C, (a:b:c:e) \mapsto (a:b:c)$. Merk op dat S padsamenhangend is en f een overdekkingsafbeelding van graad d (dus voor $x \in \mathbb{P}^2 - C$ bestaat $f^{-1}(\{x\})$ uit d elementen). Volgens stelling 5.2.6

uit het boek van Runde[6] is er een surjectie $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C) \to f^{-1}(\{x\})$. Hieruit volgt dat $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C)$ minimaal d elementen heeft.

We concluderen nu dat $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C)$ cyclisch is en d elementen heeft, dus $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Door toepassing van lemma 4.0.2 vinden we dat voor elke gladde, homogene kromme D van graad $d \geq 1$ geldt

$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - D) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

□

Referenties

[1] Egbert R. van Kampen, *On the Fundamental Group of an Algebraic Curve*, verkregen op 3 augustus 2014 van http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/vankampen.pdf, 1933.

[2] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[3] Israel M. Gelfand, Mikhail M. Kapranov, Andrei V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*, Reprint of the 1994 edition, Birkhäuser, 2008.

[4] Daniel C. Epping, *Locally Trivial Families of Complex Curves*, verkregen op 7 juni 2014 van http://d-nb.info/982833091/34, 2006.

[5] Peter Stevenhagen, *Algebra I*, verkregen op 21 juni 2014 van http://websites.math.leidenuniv.nl/algebra/algebra1.pdf, 2014.

[6] Volker Runde, *A Taste of Topology*, Springer, 2008.