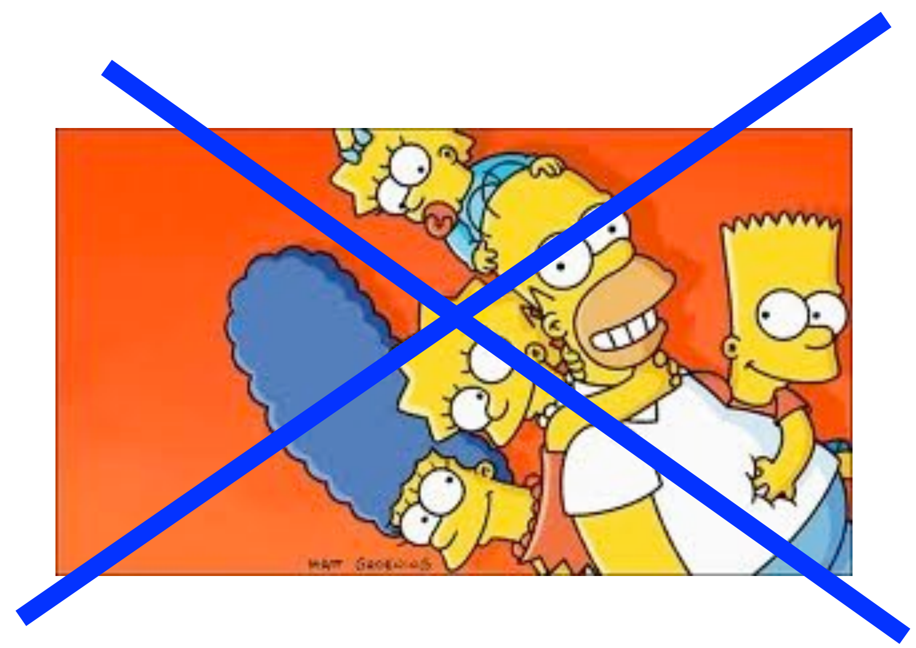
Hovo 44

College 1

Toegifte: 3 deuren; Simpson; Bayes Nets



Regel van Bayes

- *a posteriori* kans-verhouding is gelijk aan *a priori* kans-verhouding maal *Bayes factor* (aka *likelihood ratio*)
- Voorbeeld, drie-deuren probleem

Driedeuren probleem

Und ewig meckert die Ziege

Eine neue Lösung für ein Problem, das seit 20 Jahren die ZEIT-Leser erregt

VON CHRISTOPH DRÖSSER

Ach, das Ziegenproblem! Es beschäftigt die Leser dieser Zeitung seit zwei Jahrzehnten. In der Ausgabe 30/91 erschien der erste Artikel zu dieser scheinbar so einfachen Denksportaufgabe und löste eine Flut von Zuschriften aus, auch von Mathematikprofessoren. Bis heute erhitzt das mathematische Problem die Gemüter.

Für alle, die sich später zugeschaltet haben, hier die Originalformulierung des Problems: »*Sie nehmen an einer Spielshow im Fernsehen teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir, Nummer 1. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet; mit den Worten ›Ich zeige Ihnen mal was‹ öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer 3, und eine meckernde Ziege schaut ins Publikum. Er fragt: ›Bleiben Sie bei Nummer 1,*

Aber das stimmt nicht, denn die ursprüngliche Wahrscheinlichkeit für Tür 1 war ein Drittel, auf Tür 2 und 3 entfielen zwei Drittel. Da Tür 3 nach der Aktion des Moderators definitiv ausfällt, steht das Auto mit einer Wahrscheinlichkeit von zwei Dritteln hinter Tür 2. Also sollte man wechseln!

In der Ziegenproblemforschung ging es allerdings nie um die Lösung an sich, sondern stets um die Frage: Wie kann man die Sache so formulieren, dass sie ihre Paradoxie verliert und jedem die Lösung einleuchtet? Der Mathematiker Sascha Gnedin von der Universität Utrecht unternimmt nun einen neuen Versuch, der in der Zeitschrift *Mathematical Intelligencer* zu lesen sein wird. Seiner Meinung nach ist es ein Fehler, die Sache als Glücksspiel anzusehen, dem man mit den Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu Leibe rücken muss. Denn in dem Spiel kommt an keiner Stelle der Zufall zum Zuge: Die Redaktion versteckt das Auto hinter einer der drei Türen, der

»Im Schach kommt man auch nicht auf die Idee, über den nächsten Zug mit einem Münzwurf zu entscheiden«, sagt Sascha Gnedin. Vielmehr geht es darum, den optimalen Zug in einem Spiel zu finden, in dem auf beiden Seiten Menschen sitzen, die gewinnen wollen. Also solle man sich der mathematischen Theorie bedienen, die solche strategischen Probleme behandelt: der Spieltheorie.

Im Gegensatz zum Schach, dessen Spielvariationen endlich, aber unüberschaubar sind, lässt sich das Ziegenproblem als Spiel sehr leicht vollständig beschreiben. Es besteht aus genau vier Zügen: Im ersten wird das Auto versteckt, im zweiten wählt der Kandidat eine Tür, im dritten öffnet der Moderator eine Ziegentür, und im vierten entscheidet sich der Showgast, ob er bei seiner Wahl bleibt oder wechselt. Insgesamt gibt es 24 mögliche Spielverläufe.

Für ein derart überschaubares Spiel kann sich der Kandidat leicht eine Strategie wählen, die alle

Fälle kann er sich überlegen, ob er bei seiner Wahl bleibt oder wechselt.

Gnedin argumentiert nun: Die drei Strategien »Wähle Tür x und wechsle auf jeden Fall, nachdem der Moderator eine Ziegentür geöffnet hat« sind besser als die anderen, sie »dominieren« sie, wie der spieltheoretische Ausdruck heißt.

In der klassischen Version der Geschichte, die mit Wahrscheinlichkeiten argumentiert, werden nur die beiden Strategien verglichen, bei denen der Kandidat Tür 1 gewählt hat. Dann gewinnt etwa die Strategie A: »Wähle Tür 1 und bleibe dabei, egal was der Moderator tut«, wenn das Auto hinter Tür 1 steht. Die Strategie B: »Wähle Tür 1 und wechsle auf jeden Fall« gewinnt bei Tür 2 und 3. Überlegen ist die zweite Strategie nur unter der Annahme, dass das Auto in weniger als 50 Prozent der Fälle hinter Tür 1 verborgen ist. Aber vielleicht hat das Spielteam ja eine Vorliebe für Tür 1?

Gnedins Idee war es nun, Strategie A auch mit

immer gewinnt, wenn A gewinnt, aber auch noch in einem weiteren Fall. Gnedin hat somit gezeigt: Die drei Strategien, bei denen der Kandidat eine Tür wählt und dann unbedingt wechselt, dominieren die neun anderen Strategien – ohne Annahmen über irgendwelche Wahrscheinlichkeiten.

Welche Tür der Kandidat nun als erste wählen soll, sagt diese Überlegung freilich nicht. Glaubt er, dass das Auto zufällig platziert worden ist, sollte

Stimmt's?
NDR 2

er seine Wahl auch zufällig treffen. Hegt er jedoch

Driedeuren probleem

- Speler kiest deur 1
- Spelleider laat geit zien achter deur 3
- Speler mag keuze heroverwegen: moet hij wisselen (deur 2?)

Driedeuren probleem

- H_1: auto achter deur 1
- H_2: auto achter deur 2
- E: geit achter deur 3
- $P(H_1):P(H_2) = 1:1$ *a priori* gelijke kansen (?)
- $P(E \mid H_1) = 1/2$ keus uit 2 deuren - gelijke kansen (?)
- $P(E \mid H_2) = 1$ spelleider had geen keus
- $P(E \mid H_1) : P(E \mid H_2) = 1/2:1 = 1:2$ *evidentiele waarde*
- $P(H_1 \mid E) : P(H_2 \mid E) = 1:2$ *a posteriori* kansen: wisselen!

Simpson's Paradox

causaliteit versus correlatie

- In probability and statistics, **Simpson's paradox** (or the **Yule–Simpson effect**) is a paradox in which a correlation present in different groups is reversed when the groups are combined. This result is often encountered in social-science and medical-science statistics, and it occurs when frequency data are hastily given causal interpretations. Simpson's Paradox disappears when causal relations are brought into consideration (see Implications to decision making).

Simpson (1951), ... , Pearson (1899), Yule (1903)

Simpson's Paradox

Berkeley gender bias case

[edit]

One of the best known real life examples of Simpson's paradox occurred when the University of California, Berkeley was sued for bias against women who had applied for admission to graduate schools there. The admission figures for the fall of 1973 showed that men applying were more likely than women to be admitted, and the difference was so large that it was unlikely to be due to chance.[3][14]

	Applicants	Admitted
Men	8442	**44%**
Women	4321	35%

However when examining the individual departments, it was found that no department was significantly biased against women. In fact, most departments had a "small but *statistically significant bias* in favor of women."[14] The data from the six largest departments is listed below.

Department	Men		Women	
	Applicants	Admitted	Applicants	Admitted
A	825	62%	108	**82%**
B	560	63%	25	**68%**
C	325	**37%**	593	34%
D	417	33%	375	**35%**
E	191	**28%**	393	24%
F	272	6%	341	**7%**

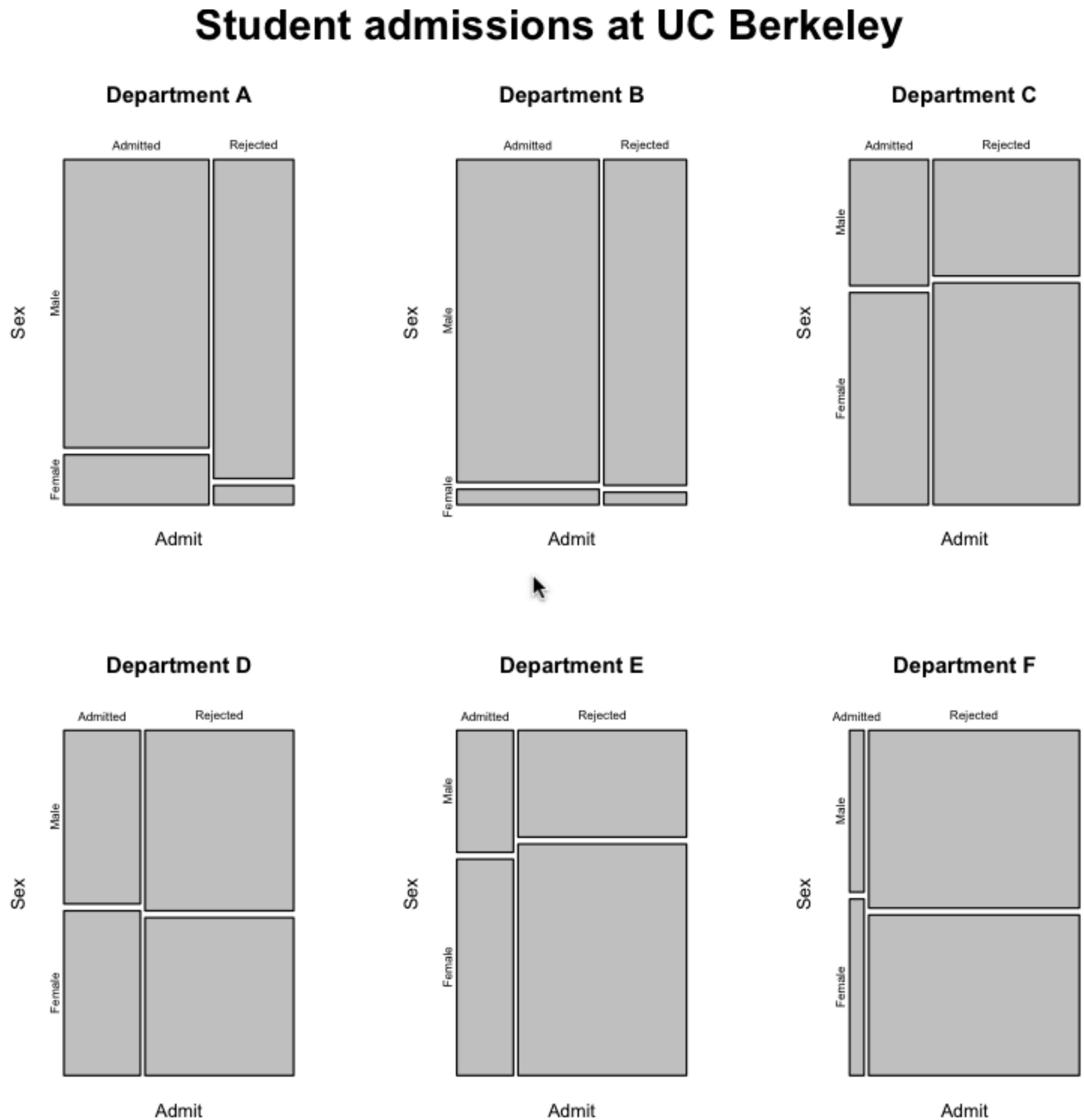
The research paper by Bickel, et al.[14] concluded that women tended to apply to competitive departments with low rates of admission even among qualified applicants (such as in the English Department), whereas men tended to apply to less-competitive departments with high rates of admission among the qualified applicants (such as in engineering and chemistry). The conditions under which the admissions' frequency data from specific departments constitute a proper e to chance.

	Applicants	Admitted
Men	8442	**44%**
Women	4321	35%

examining the individual departments, it was found that no department was significantly bias
most departments had a "small but *statistically significant bias* in favor of women."[14] The d
ents is listed below.

Department	Men		Women	
	Applicants	Admitted	Applicants	Admitted
A	825	62%	108	**82%**
B	560	63%	25	**68%**
C	325	**37%**	593	34%
D	417	33%	375	**35%**
E	191	**28%**	393	24%
F	272	6%	341	**7%**

aper by Bickel, et al.[14] concluded that women tended to apply to competitive departments


Student admissions at UC Berkeley
Department A
Department B
Department C
Department D
Department E
Department F
Admitted
Rejected
Male
Female
Sex
Admit

Simpson's Paradox

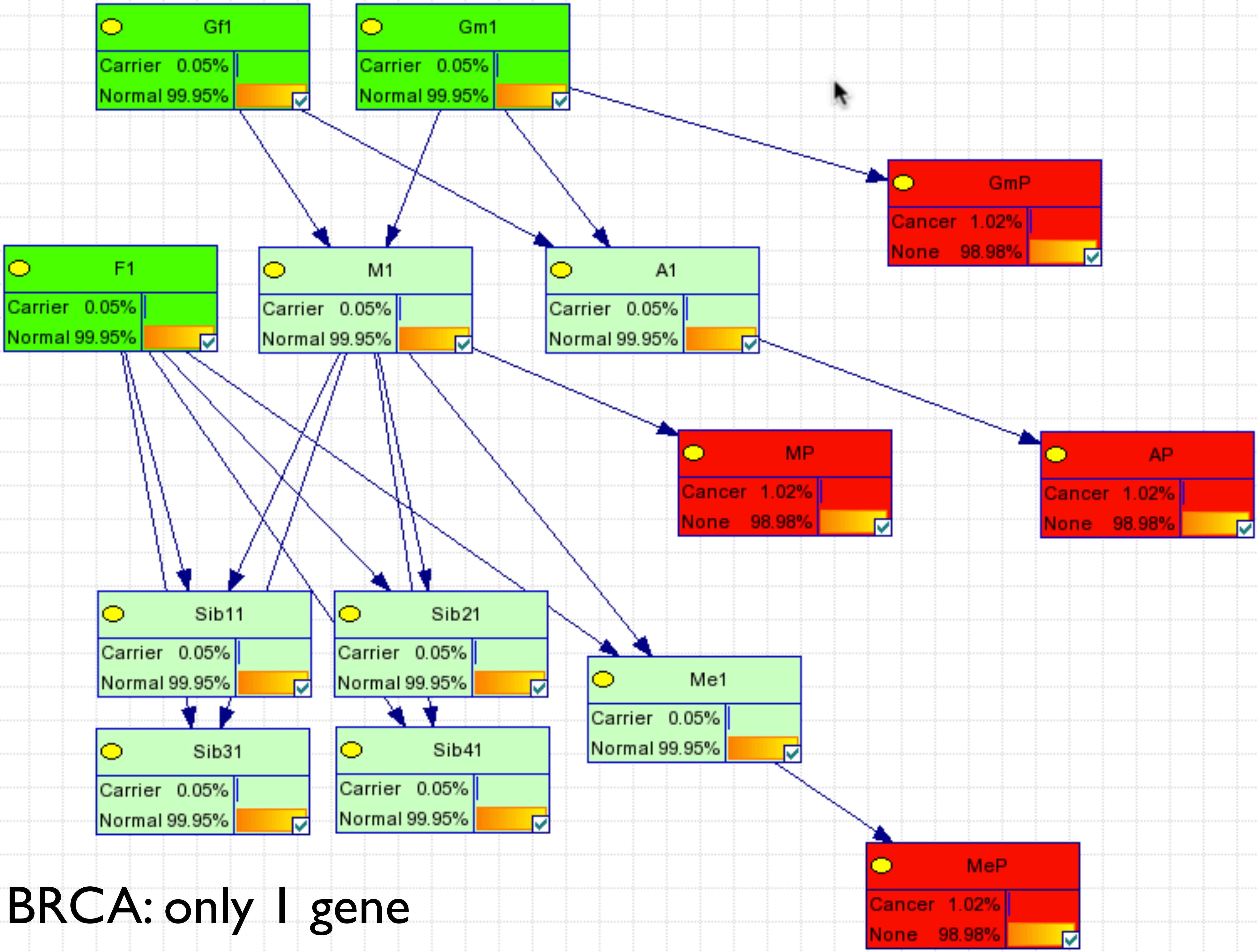
causaliteit versus correlatie

- As to why and how a story, not data, should dictate choices, the answer is that it is the story which encodes the causal relationships among the variables. Once we extract these relationships and represent them in a graph called a causal Bayesian network we can test algorithmically whether a given partition, representing confounding variables, gives the correct answer. The test, called "back-door," requires that we check whether the nodes corresponding to the confounding variables intercept certain paths in the graph. This reduces Simpson's Paradox to an exercise in graph theory.

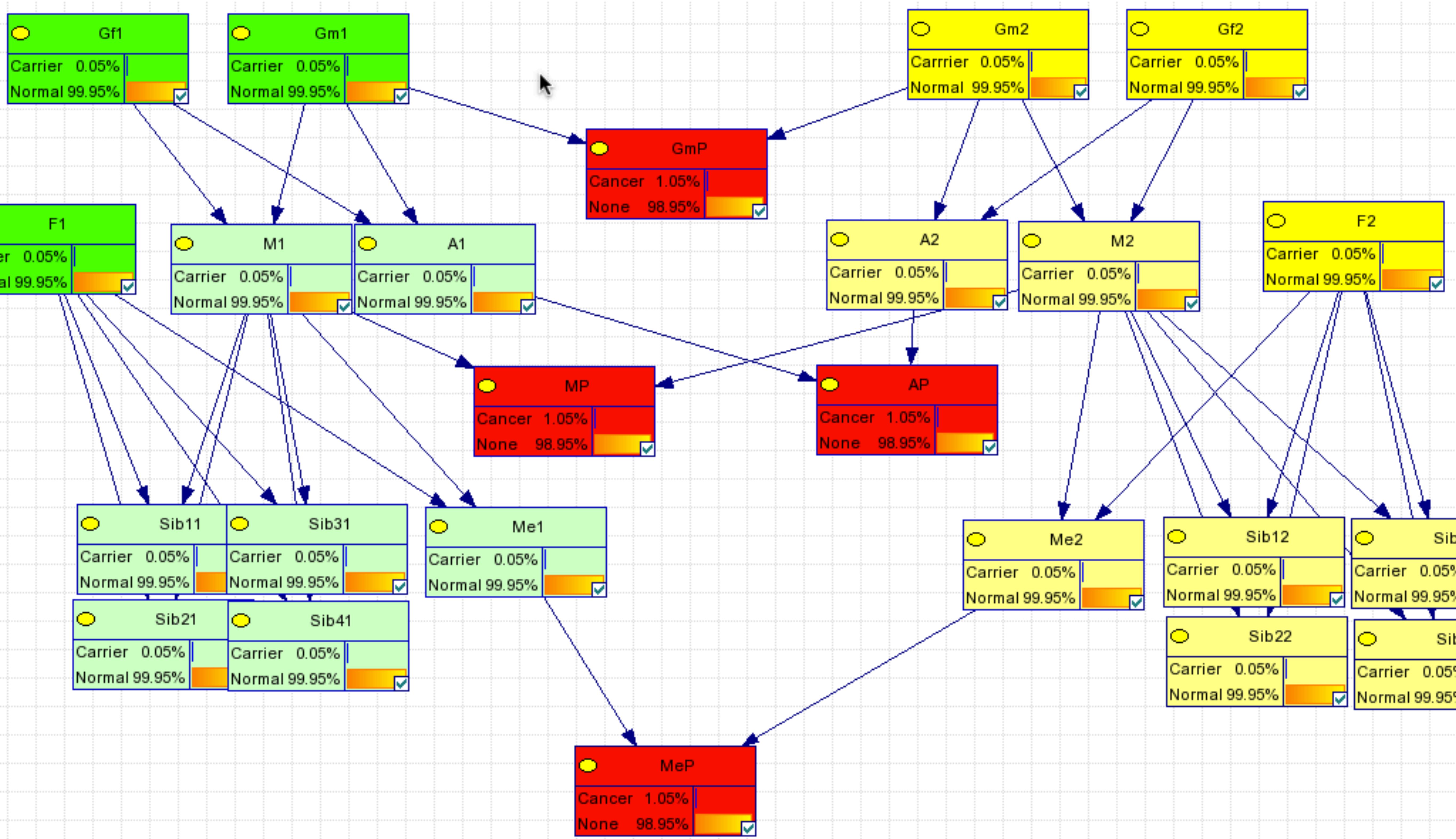
cf. Judea Pearl: "Causality"

Bayes' nets

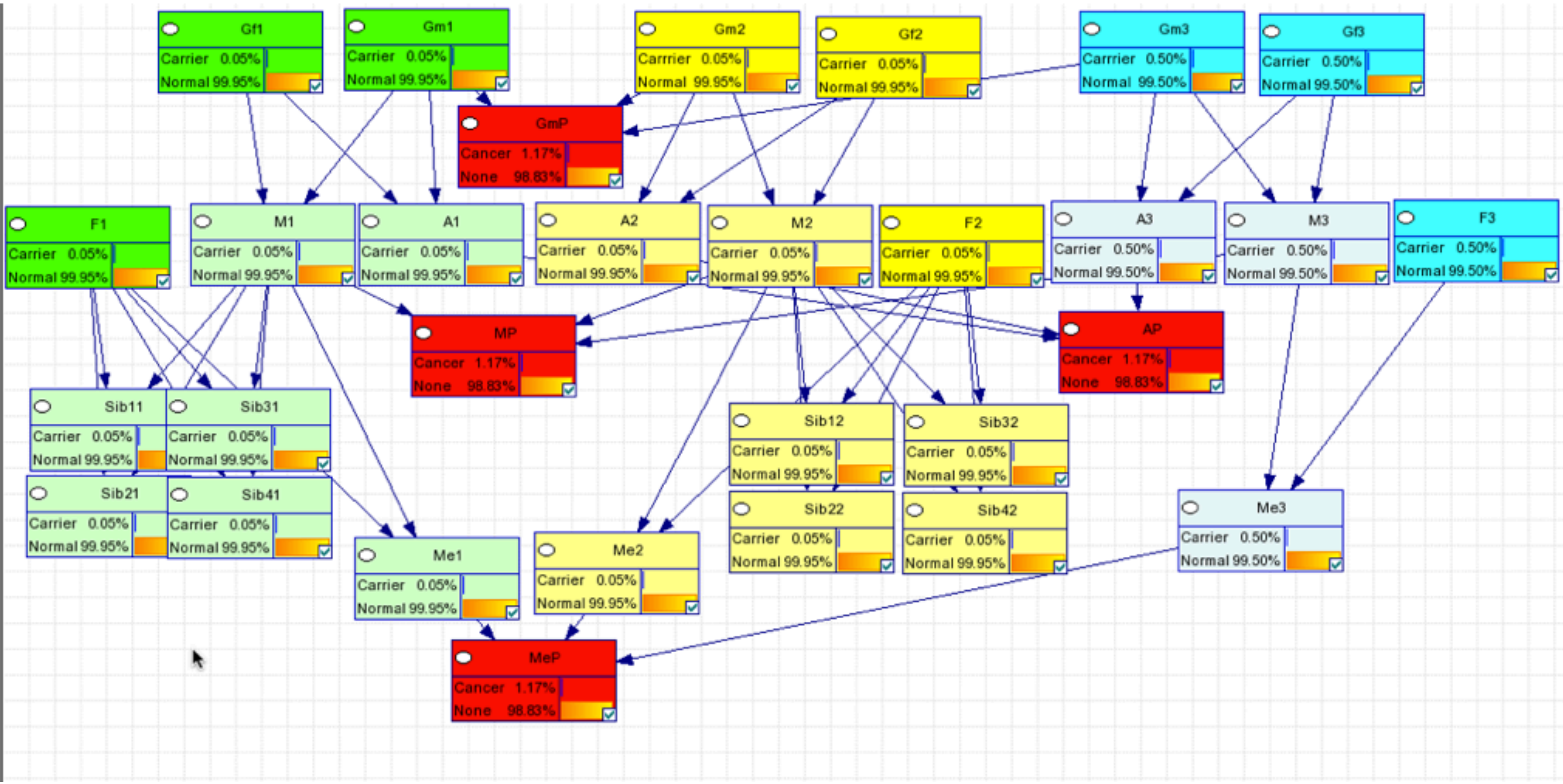
- Voorbeeld: *genetic counselling*
- Software: GeNIe



BRCA: only 1 gene


Gf1
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Gm1
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
GmP
Cancer 1.05%
None 98.95%
Gm2
Carrrier 0.05%
Normal 99.95%
Gf2
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
F1
M1
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
A1
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
A2
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
M2
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
F2
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
MP
Cancer 1.05%
None 98.95%
AP
Cancer 1.05%
None 98.95%
Sib11
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Sib31
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Me1
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Me2
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Sib12
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Sib21
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Sib41
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Sib22
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
MeP
Cancer 1.05%
None 98.95%

BRCA: 2 genes



Gf1
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Gm1
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Gm2
Carrrier 0.05%
Normal 99.95%
Gf2
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Gm3
Carrrier 0.50%
Normal 99.50%
Gf3
Carrier 0.50%
Normal 99.50%
GmP
Cancer 1.17%
None 98.83%
F1
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
M1
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
A1
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
A2
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
M2
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
F2
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
A3
Carrier 0.50%
Normal 99.50%
M3
Carrier 0.50%
Normal 99.50%
F3
Carrier 0.50%
Normal 99.50%
MP
Cancer 1.17%
None 98.83%
AP
Cancer 1.17%
None 98.83%
Sib11
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Sib31
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Sib21
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Sib41
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Sib12
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Sib32
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Sib22
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Sib42
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Me1
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Me2
Carrier 0.05%
Normal 99.95%
Me3
Carrier 0.50%
Normal 99.50%
MeP
Cancer 1.17%
None 98.83%

BRCA: 3 genes